

Izu Vaisman

К геометрии многообразии флагов в симплектическом пространстве. II

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 19 (1969), No. 1, 60–66

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100875>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1969

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

К ГЕОМЕТРИИ МНОГООБРАЗИЙ ФЛАГОВ В СИМПЛЕКТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ. II

IZU VAISMAN (Изу Вайсман), Iași
(Поступило в редакцию 5/VI. 1967 г.)

Настоящая работа является продолжением работы [1]. Поэтому мы используем те же определения и обозначения. Напомним, что в [1] были изложены необходимые общие сведения из симплектической геометрии, определение многообразия $F(Sp_{2n-1})$ флагов симплектического пространства Sp_{2n-1} , дифференциальная теория однопараметрических флаговых многообразий и общие соображения относительно k -параметрических флаговых многообразий. В настоящей работе мы построим дифференциальную теорию общих, k -параметрических флаговых многообразий проективно-симплектического пространства Sp_{2n-1} при $1 \leq k < 2n - 1$. Окажется, что эта теория является прямым обобщением теории однопараметрических многообразий [1].

1. Учитываем проективно-симплектическое пространство Sp_{2n-1} . Известно [1], что флаг этого пространства есть совокупность вида

$$(1) \quad P_0 \subseteq P_1 \subseteq \dots \subseteq P_{2n-1} = Sp_{2n-1},$$

где P_h неособые плоскости. Флаг однозначно определяется его *центрами* A_α и *осями* d_α ($\alpha = 1, \dots, n$) (они являются попарно сопряженными неособыми прямыми, и d_α проходит через A_α). *Ассоциированные реперы* флага — это симплектические реперы $\{A_\alpha, B_\alpha\}$, где $B_\alpha \in d_\alpha$. Тогда мы имеем

$$(2) \quad \begin{aligned} P_{2h-2} &= \{A_1, \dots, A_h, B_1, \dots, B_{h-1}\}, \\ P_{2h-1} &= \{A_1, \dots, A_h, B_1, \dots, B_h\} \quad (h = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Многообразие флагов пространств Sp_{2n-1} отождествляется с однородным пространством

$$(3) \quad F(Sp_{2n-1}) = GSp_{2n-1}/G_0,$$

где GSp_{2n-1} — симплектическая группа и G_0 ее подгруппа, определенная матри-

цами вида [1]

$$(4) \quad \begin{pmatrix} \varrho_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \varrho_n & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 & \dots & 0 & 1/\varrho_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n & 0 & \dots & 1/\varrho_n \end{pmatrix}.$$

Это многообразие имеет $n(2n - 1)$ измерений, и k -параметрическое флаговое многообразие — это k -мерное подмногообразие в $F(Sp_{2n-1})$.

Пусть VF_k такое k -параметрическое многообразие флагов $\{F\}$, центры которых нормированы инвариантным образом. Для его изучения мы возьмем [1] семейство ассоциированных реперов к флагам F , $\{A_\sigma, B_\sigma\}$. Уравнения движения этих реперов суть [1]

$$(5) \quad dA_\sigma = \omega_\sigma^\tau A_\tau + \bar{\omega}_\sigma^\tau B_\tau, \quad dB_\sigma = \vartheta_\sigma^\tau A_\tau + \eta_\sigma^\tau B_\tau, \quad (\sigma, \tau = 1, \dots, n),$$

где пфаффовы формы $\omega, \bar{\omega}, \vartheta, \eta$ удовлетворяют условиям

$$(6) \quad \bar{\omega}_\sigma^\tau = \bar{\omega}_\tau^\sigma, \quad \vartheta_\sigma^\tau = \vartheta_\tau^\sigma, \quad \omega_\sigma^\tau + \eta_\tau^\sigma = 0,$$

а уравнения структуры суть

$$(7) \quad \begin{aligned} d\omega_\sigma^\lambda &= \omega_\sigma^\tau \wedge \omega_\tau^\lambda + \bar{\omega}_\sigma^\tau \wedge \vartheta_\tau^\lambda, \\ d\bar{\omega}_\sigma^\tau &= \omega_\sigma^\tau \wedge \bar{\omega}_\tau^\lambda + \bar{\omega}_\sigma^\tau \wedge \eta_\tau^\lambda, \\ d\vartheta_\sigma^\lambda &= \vartheta_\sigma^\tau \wedge \omega_\tau^\lambda + \eta_\sigma^\tau \wedge \vartheta_\tau^\lambda. \end{aligned}$$

Переход к другому семейству ассоциированных реперов дается формулами [1]

$$(8) \quad \tilde{A}_\sigma = A_\sigma, \quad \tilde{B}_\sigma = \lambda_\sigma A_\sigma + B_\sigma, \quad (\sigma = 1, \dots, n),$$

при которых найдется

$$(9) \quad \begin{aligned} \tilde{\omega}_\sigma^\tau &= \omega_\sigma^\tau - \lambda_\tau \bar{\omega}_\sigma^\tau, \\ \tilde{\bar{\omega}}_\sigma^\tau &= \bar{\omega}_\sigma^\tau, \\ \tilde{\vartheta}_\sigma^\tau &= \vartheta_\sigma^\tau + \lambda_\sigma \omega_\sigma^\tau + \lambda_\tau \omega_\tau^\sigma - \lambda_\sigma \lambda_\tau \bar{\omega}_\sigma^\tau + \delta_\sigma^\tau d\lambda_\sigma. \end{aligned}$$

Эти формулы показывают, что формы $\bar{\omega}_\sigma^\tau$ являются инвариантными формами многообразия VF_k . Они удовлетворяют первому условию (6), так что их число $n(n + 1)/2$.

2. В дальнейшем мы будем предполагать, что выполняется условие

$$(10) \quad 1 \leq k < 2n - 1.$$

Также, раз на всегда, будем предполагать, что многообразие VF_k находится в таком общем положении, что все следующие рассуждения справедливы.

Тогда, так как $n(n+1)/2 \geq 2n-1$, можно выбрать между инвариантными формами $\bar{\omega}_\sigma^r$ k независимых форм. Если обозначим выбранные формы через ω^i ($i = 1, \dots, k$), имеем

$$(11) \quad \bar{\omega}_\sigma^r = P_{\sigma i}^r \omega^i, \quad \omega_\sigma^r = \Gamma_{\sigma i}^r \omega^i, \quad \mathfrak{F}_\sigma^r = \Theta_{\sigma i}^r \omega^i,$$

где $P_{\sigma i}^r$ являются инвариантами многообразия VF_k (некоторые из них постоянны), а $\Gamma_{\sigma i}^r$ и $\Theta_{\sigma i}^r$ зависят также от „вторичных параметров“.

Дальше мы укажем, как можно выбрать инвариантным образом точки B_α ассоциированных реперов.

Пусть T_k^h — касательная плоскость к многообразию V_h , описанному центром A_h флагов многообразия VF_k , и \bar{T}_{2n-k-2}^h — ее сопряженная плоскость; мы предполагаем, что эти плоскости являются неособыми. Если Q_{2n-2}^h есть сопряженная гиперплоскость центра A_h , то очевидно

$$(12) \quad \bar{T}_{2n-k-2}^h \subset Q_{2n-2}^h.$$

В дальнейшем, индекс центров, осей, точек B и индексы, определенные при их помощи, надо всегда заменять индексом, находящимся в последовательности $\{1, \dots, n\}$ и конгруэнтным по модулю n с данным.

Пусть, во-первых, $k = 2m - 1$. Рассмотрим для каждого флага F из VF_k оси d_{h-m}, \dots, d_{h-1} ($h = 1, \dots, n$). Их объединение есть неособая $(2m - 1)$ -плоскость R_{2m-1}^h ($h = 1, \dots, n$), все точки которой, очевидно, сопряжены с A_h , так что $R_{2m-1}^h \subset Q_{2n-2}^h$. Тогда, в общем случае, плоскости \bar{T}_{2n-k-2}^h и R_{2m-1}^h пересекаются в одной точке C_{h-1} . Теперь спроектируем эту точку из сопряженной плоскости оси d_{h-1} на d_{h-1} . Это даст нам определенную точку оси d_{h-1} , которую мы выберем в качестве точки B_{h-1} .

Если $k = 2m$, заменим плоскость R_{2m-1}^h плоскостью \bar{R}_{2m}^h , являющейся объединением между R_{2m-1}^h и A_h (или A_{h-m-1}), после чего точки B_{h-1} получаются как и выше.

Заметим еще, что в случае $k = 2m$ мы могли бы взять в качестве точки C_{h-1} из предыдущей конструкции полюс плоскости T_k^h [1], но это не очень удобно с аналитической точки зрения.

Конечно все предыдущие соображения невозможны в случае $k \geq 2n - 1$.

Выразим теперь аналитические условия, которые следуют из предыдущего выбора точек B_h ассоциированных реперов.

В этих реперах произвольная точка пространства имеет вид

$$(13) \quad M = x^\sigma A_\sigma + y^\sigma B_\sigma,$$

так что уравнения плоскости \bar{T}_{2m-k-2}^h , которые получаются из

$$(14) \quad \langle A_h, M \rangle = 0, \quad \langle dA_h, M \rangle = 0$$

будут

$$(15) \quad y^h = 0, \quad \sum_{\tau=1}^n (\Pi_{hi}^{\tau} x^{\tau} - \Gamma_{hi}^{\tau} y^{\tau}) = 0, \quad (h = 1, \dots, n; i = 1, \dots, k).$$

Если $k = 2m - 1$, плоскость R_{2m-1}^h имеет уравнения

$$(16) \quad x^{\alpha} = 0, \quad y^{\alpha} = 0, \quad (\alpha \in [h - m, \dots, h - 1])$$

и для того, чтобы точка пересечения плоскостей (15) и (16) имела своей проекцией на d_{h-1} точку B_{h-1} , необходимо и достаточно условие

$$(17) \quad \text{Det} |\Pi_{hi}^{\tau}, \Gamma_{hi}^{\sigma}| = 0, \quad (\tau = h - m, \dots, h - 2, \sigma = h - m, \dots, h - 1),$$

где первый член — определитель порядка $2m - 1$.

В случае $k = 2m$, плоскость \bar{R}_{2m}^h имеет уравнения

$$(18) \quad x^{\alpha} = 0 \quad (\alpha \in [h - m, \dots, h]), \quad y^{\beta} = 0 \quad (\beta \in [h - m, \dots, h - 1]),$$

и условие (17) заменяется условием

$$(19) \quad \text{Det} |\Pi_{hi}^{\tau}, \Gamma_{hi}^{\sigma}| = 0 \quad (\tau = h - m, \dots, h - 2, h; \sigma = h - m, \dots, h - 1),$$

где в левой части имеется определитель порядка $2m$.

Предыдущая теория была построена при заданной нормализации центров флагов многообразия VF_k , но эта нормализация входила только в аналитические выражения. Ясно, что геометрические точки B_h не зависят от этой нормализации. Это дает нам возможность указать инвариантную нормализацию точек A_h .

Легко видеть, что изменение заданной нормализации точек A_h выражается формулами

$$(20) \quad \bar{A}_h = \varrho_h A_h, \quad \bar{B}_h = \frac{1}{\varrho_h} B_h \quad (\text{не суммировать}),$$

так что мы должны выбрать инвариантным образом функции ϱ_h .

Очевидно, что между многообразиями V_h , описанными точками A_h , существует естественное соответствие. Мы будем искать на многообразиях V_1, \dots, V_{k-1} систему соответствующих кривых, род которых больше 1, т.е. касательные которых принадлежат абсолютному комплексу [2]. Заметим, что это имеет геометрический смысл потому, что порядок точек A_h является существенным [1]. Аналитически искомые кривые даются дифференциальными уравнениями

$$(21) \quad \langle A_{\sigma}, dA_{\sigma} \rangle = 0, \quad (\sigma = 1, \dots, k - 1),$$

т.е.

$$(22) \quad \bar{\omega}_{\sigma}^{\sigma} = 0, \quad (\sigma = 1, \dots, k - 1; \text{не суммировать}).$$

В общем случае эти уравнения определяют через каждую точку A_h на V_h ($h = 1, \dots, n$) кривую C_h ; мы скажем, что кривые C_h являются *особыми кривыми* многообразия VF_k , и обозначим через σ_h их симплектический инвариантный параметр [2].

Сейчас мы вводим следующее условие нормирования (см. и [1])

$$(23) \quad \left\langle B_h, \frac{dB_h}{d\sigma_h} \right\rangle = \text{sign} \left(\left\langle B_h, \frac{dB_h}{d\sigma_h} \right\rangle \right),$$

которое в силу формул (20) определяет (до знака) функции ϱ_h .

При помощи уравнений (5) условия (23) станут

$$(24) \quad \vartheta_h^h = - \text{sign} \left(\left\langle B_h, \frac{dB_h}{d\sigma_h} \right\rangle \right) d\sigma_h \pmod{\bar{\omega}_\sigma^\sigma = 0, \sigma = 1, \dots, k-1}.$$

Этим задача нахождения канонического репера для многообразия VF_k вполне решена. Полная система инвариантов есть система функций Π, Γ, Θ , определенных формулами (11) и выполняющих условия (17) (или (19)), (24), условия

$$(25) \quad \Pi_{\sigma i}^\tau = \Pi_{\tau i}^\sigma, \quad \Theta_{\sigma i}^\tau = \Theta_{\tau i}^\sigma,$$

которые следуют из (6), и условия интегрируемости, которые следуют из (7). Для получения этих последних условий обозначим

$$(26) \quad d\omega^i = \frac{1}{2} A_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k, \quad (A_{jk}^i = -A_{kj}^i)$$

и введем эти обозначения и формулы (11) в (7). Конкретный расчет не представляет здесь интереса.

Сейчас, известным образом, можно сформулировать основную теорему определения многообразия VF_k при помощи ее полной системы инвариантов.

3. Также некоторые другие соображения, сделанные в [1] для однопараметрических многообразий, прямо переносятся на общий случай.

Так, вычисление отклонений от параллелизма Миллера для канонического репера многообразия VF_k вдоль кривых

$$(27) \quad \omega^1 = \dots = \omega^{i-1} = \omega^{i+1} = \dots = \omega^k = 0, \quad (i = 1, \dots, k)$$

дает [1]

$$(28) \quad \left| A_1, A_\sigma, B_1, \dots, A_k, \hat{B}_k, \dots, A_n, B_n, \frac{\partial A_\sigma}{\omega^i} \right| = \iota_\tau \Pi_{\sigma i}^\tau,$$

$$\left| A_1, A_\sigma, B_1, \dots, \hat{A}_k, B_k, \dots, A_n, B_n, \frac{\partial A_\sigma}{\omega^i} \right| = \iota_\tau \Gamma_{\sigma i}^\tau \quad (\sigma \neq \tau),$$

$$\left| A_1, B_\sigma, B_1, \dots, \hat{A}_k, B_k, \dots, A_n, B_n, \frac{\partial B_\sigma}{\omega^i} \right| = t_\tau \Theta_{\sigma i}^\tau,$$

где [1]

$$t_\tau = \begin{cases} 1 & \text{для } \tau < \sigma, \\ -1 & \text{для } \tau \geq \sigma. \end{cases}$$

Эти соотношения являются геометрическими истолкованиями инвариантов многообразия VF_k , а также и их исчезновения. Другие истолкования можно получить при помощи симплектического инварианта пар прямых, как это сделано в [1].

Для многообразий VF_k переносится еще определение связности плоскостей P_{2h-1} вдоль некоторой кривой. В силу формул (2) эта связность определяется операторами ковариантного дифференцирования

$$(29) \quad \begin{aligned} {}_{(h)}dA_\sigma &= \sum_{k=1}^h (\omega_\sigma^k A_k + \bar{\omega}_\sigma^k B_k), \\ {}_{(h)}dB_\sigma &= \sum_{k=1}^h (\vartheta_\sigma^k A_k + \eta_\sigma^k B_k), \quad (\sigma = 1, \dots, h) \end{aligned}$$

и допускает различные соображения параллелизма [1].

С той же точки зрения займемся рассмотрением последовательности $*$ [1]. Для многообразия VF_k эту последовательность можно определить как и в случае VF_1 [1], именно центры B_h и оси d_h определяют многообразие VF_k^* , о котором скажем, что оно получилось из VF_k при преобразовании $*$, а последовательность $*$ получается повторным применением этого преобразования. Многообразие VF_k является *циклическим порядка $n-1$* , если n -ый член его последовательности $*$ совпадает с самим многообразием VF_k .

Установим условия, характеризующие циклические многообразия порядка 2. Для этого обозначим как и в [1] через D_h центры многообразия VF_k^{**} . Точка D_{h-1} получается проектированием на d_h точки пересечения плоскости (16) или (18) с сопряженной плоскостью касательной плоскости многообразия, описанного точкой B_h . Искомые условия для $k = 2m - 1$ суть

$$(30) \quad \text{Det} |\Gamma_{\tau i}^h, \Theta_{hi}^\sigma| = 0, \quad (\tau = h - m, \dots, h - 1; \sigma = h - m, \dots, h - 2)$$

и для $k = 2m$

$$(31) \quad \text{Det} |\Gamma_{\tau i}^h, \Theta_{hi}^\sigma| = 0, \quad (\tau = h - m, \dots, h; \sigma = h - m, \dots, h - 2).$$

(Определители из (30), (31) аналогичны определителям из (17) и (19).)

Наконец, как обычно, и здесь будет интересно найти замечательные однопараметрические подмногообразия многообразия VF_k . Так, подмногообразия VF_k вдоль его особых кривых образуют *особые многообразия VF_1 из VF_k* .

Естественно называть *асимптотическими* VF_1 в VF_k те подмногообразия VF_1 , вдоль которых плоскости P_2 являются соприкасающимися к кривой, описанной точкой A_1 [1]. Из (2) и (5) следует, что дифференциальные уравнения асимптотических подмногообразий VF_1 имеют вид

$$(32) \quad \begin{cases} \omega_1^\tau = 0, & \omega_1^2 \omega_2^\tau + \bar{\omega}_1^1 \vartheta_1^\tau = 0, & (\tau = 3, \dots, n), \\ \bar{\omega}_1^\sigma = 0, & \bar{\omega}_1^2 \bar{\omega}_2^\sigma + \bar{\omega}_1^1 \eta_1^\sigma = 0, & (\sigma = 2, \dots, n). \end{cases}$$

Конечно, такие подмногообразия не всегда существуют.

Будем называть *геодезическими подмногообразиями* VF_1 в VF_k те подмногообразия, вдоль которых все прямые P_1 совпадают [1].

Для них мы найдем уравнения

$$(33) \quad \omega_1^\tau = \bar{\omega}_1^\tau = \vartheta_1^\tau = \eta_1^\tau = 0, \quad (\tau = 2, \dots, n).$$

Очевидно, не трудно получить и другие аналогичные результаты.

Литература

- [1] Вайсман И.: К геометрии многообразий флагов в симплектическом пространстве. Чех. Мат. Журнал 18 (93), (1968), 377—387.
- [2] Vaisman I.: Courbes, configurations de Myller et distributions dans les espaces à connexion symplectique. An. st. Univ. Iași, T. X (1964), p. 417—436.

Адрес автора: Seminarul Matematic „A. Myller“, Universitate Iași, România.