

Karel Havlíček; Jürgen Tietze

Zur Geometrie der endlichen Ebene der Ordnung  $n = 4$

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 21 (1971), No. 1, 157–164

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/101010>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1971

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ZUR GEOMETRIE DER ENDLICHEN EBENE DER ORDNUNG  $n = 4$ 

KAREL HAVLÍČEK, Praha und JÜRGEN TIETZE, Aachen

(Vorgelegt am 9. März 1970)

Aus verschiedenen bekannten Schemas endlicher projektiver Ebenen  $\pi_4$  der Ordnung  $n = 4$  wählen wir als Basis das folgende Schema<sup>1)</sup> aus. Die 21 Punkte (bzw. Geraden) in  $\pi_4$  bezeichnen wir mit  $A_j, B_j, C_j, D_j, W_i$  (bzw.  $a_j, b_j, c_j, d_j, w_i$ ), wobei  $j = 1, 2, 3; i = 1, \dots, 9$ .

Das Inzidenzschema ist dann folgendermaßen definiert<sup>2)</sup>:

$$(1) \quad \begin{array}{ll} a_1 = \{A_2, A_3, W_1, W_2, W_3\} & b_1 = \{B_2, B_3, W_1, W_4, W_7\} \\ a_2 = \{A_1, A_3, W_4, W_5, W_6\} & b_2 = \{B_1, B_3, W_2, W_5, W_8\} \\ a_3 = \{A_1, A_2, W_7, W_8, W_9\} & b_3 = \{B_1, B_2, W_3, W_6, W_9\} \\ \\ c_1 = \{C_2, C_3, W_3, W_5, W_7\} & d_1 = \{D_2, D_3, W_2, W_6, W_7\} \\ c_2 = \{C_1, C_3, W_2, W_4, W_9\} & d_2 = \{D_1, D_3, W_3, W_4, W_8\} \\ c_3 = \{C_1, C_2, W_1, W_6, W_8\} & d_3 = \{D_1, D_2, W_1, W_5, W_9\} \\ \\ w_1 = \{A_1, B_1, C_3, D_3, W_1\} & w_5 = \{A_2, B_3, C_3, D_1, W_6\} \\ w_2 = \{A_1, B_3, C_1, D_2, W_3\} & w_6 = \{A_2, B_2, C_1, D_3, W_5\} \\ w_3 = \{A_1, B_2, C_2, D_1, W_2\} & w_7 = \{A_3, B_1, C_1, D_1, W_7\} \\ w_4 = \{A_2, B_1, C_2, D_2, W_4\} & w_8 = \{A_3, B_3, C_2, D_3, W_9\} \\ \\ & w_9 = \{A_3, B_2, C_3, D_2, W_8\}. \end{array}$$

Die Anordnung von Punkten und Geraden in diesem Schema (1) legt es nahe, die geometrischen Eigenschaften verschiedener homologischer Dreiecke in  $\pi_4$  zu untersuchen. Dabei muß man zunächst folgendes erläutern:

Wir nennen eine Untermenge von  $\pi_4$ , die aus sechs verschiedenen Punkten besteht, von denen keine drei kollinear sind, ein einfaches Sechseck oder ein  $E_6$ -System. Zwei punktfremde Dreiecke aus einem  $E_6$  heißen homologisch, wenn sie zentrisch und axial sind, also die Desargues'sche Konfiguration bilden. Gilt diese Eigenschaft

<sup>1)</sup> [3] S. 73, Schema (6); das hier gebrauchte Schema unterscheidet sich von dem in [3] angegebenen Schema durch die Vertauschung von  $W_5$  und  $W_6$  sowie  $w_5$  und  $w_6$ .

<sup>2)</sup> Jede dieser Geraden ist dabei als 5-tupel der Punkte von  $\pi_4$  dargestellt.

zweier Dreiecke in  $\pi_4$  insgesamt für  $n$  verschiedene Zuordnungen ihrer Eckpunkte bzw. Verbindungsgeraden ihrer Eckpunkte, so heißen die Dreiecke  $n$ -fach homologisch. (Da es höchstens sechs verschiedene solcher Zuordnungen gibt, ist  $n = 6$  die Maximalzahl möglicher Homologien zweier Dreiecke.)

In  $\pi_4$  existiert folgende Konfiguration:

**Satz 1.** *Es gibt vier punktfremde Dreiecke in  $\pi_4$ , von denen je zwei 6-fach homologisch sind. Die Zentren der Homologien je zweier Dreiecke sind die Eckpunkte der restlichen beiden Dreiecke, die Achsen der Homologien liegen den entsprechenden Zentren in den restlichen beiden Dreiecken gegenüber. Entsprechende Dreiecksseiten der Homologien schneiden sich auf den zugehörigen Homologieachsen in weiteren 9 verschiedenen Punkten. (Diese 9 Punkte sind also von den gegebenen 12 Eckpunkten der Dreiecke verschieden.)*

Der Beweis wird dadurch geliefert, daß wir ein Beispiel der eben angegebenen Konfiguration konstruieren: Man zeigt leicht, daß die 4 Dreiecke

$$(2) \quad A_1A_2A_3, B_1B_2B_3, C_1C_2C_3, D_1D_2D_3$$

eine solche Konfiguration bilden. Betrachten wir z. B. die beiden Dreiecke  $A_1A_2A_3$  und  $B_1B_2B_3$  mit der Zuordnung

$$(3) \quad A'_1 = B_1, \quad A'_2 = B_2, \quad A'_3 = B_3,$$

so bestätigt man aus dem Inzidenzschema (1), daß die Verbindungsgeraden  $(A_i, A'_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) durch denselben Punkt  $D_3$  gehen. Die Schnittpunkte entsprechender Seiten  $(A_i, A_k)$  und  $(A'_i, A'_k)$ <sup>3)</sup> sind:

$$(4) \quad \begin{aligned} (A_1, A_2) \cap (A'_1, A'_2) &= W_9, \\ (A_3, A_1) \cap (A'_3, A'_1) &= W_5, \\ (A_2, A_3) \cap (A'_2, A'_3) &= W_1. \end{aligned}$$

Die Punkte  $W_1, W_5, W_9$  liegen auf der Geraden  $d_3$ , die dem Punkt  $D_3$  im Dreieck  $D_1D_2D_3$  gegenüberliegt. Wir sagen kurz, daß bei der Zuordnung der Eckpunkte (3) die Dreiecke  $A_1A_2A_3$  und  $B_1B_2B_3$  homologisch mit dem Zentrum  $D_3$  und der Achse  $d_3$  sind.

Ganz analog weist man nach, daß für alle weiteren Zuordnungen der Eckpunkte die beiden Dreiecke  $A_1A_2A_3$  und  $B_1B_2B_3$  homologisch mit folgenden Zentren und Achsen sind:

<sup>3)</sup> Hinsichtlich der Symbolik siehe etwa [1], [4].

### Die Zuordnungen

$$(5) \quad A'_1 = B_3, \quad A'_2 = B_1, \quad A'_3 = B_2$$

$$(6) \quad A'_1 = B_2, \quad A'_2 = B_3, \quad A'_3 = B_1$$

$$(7) \quad A'_1 = B_3, \quad A'_2 = B_2, \quad A'_3 = B_1$$

$$(8) \quad A'_1 = B_2, \quad A'_2 = B_1, \quad A'_3 = B_3$$

$$(9) \quad A'_1 = B_1, \quad A'_2 = B_3, \quad A'_3 = B_2$$

liefern nacheinander die Zentren  $D_2, D_1, C_1, C_2, C_3$  und die Achsen  $d_2, d_1, c_1, c_2, c_3$ , wobei sich entsprechende Seiten in jeder Homologie auf den jeweiligen Achsen in den Punkten

$$(5') \quad W_3, W_4, W_8$$

$$(6') \quad W_2, W_6, W_7$$

$$(7') \quad W_3, W_5, W_7$$

$$(8') \quad W_2, W_4, W_9$$

$$(9') \quad W_1, W_6, W_8$$

schneiden.

Wie man durch analoge Überlegung bestätigt, gilt diese Eigenschaft für zwei beliebige Dreiecke aus (2). Es ist bemerkenswert, daß bei der Konstruktion der 6-fachen Homologie zweier Dreiecke sämtliche 21 Punkte (und Geraden) aus  $\pi_4$  verwendet wurden.

Weiterhin ist aus dem Schema (1) ersichtlich, daß je zwei beliebige Dreiecke aus (2) ein einfaches Sechseck  $E_6$  bilden und daß die zugehörigen Homologiezentren ein weiteres zu  $E_6$  punktfremdes<sup>4)</sup> System  $E'_6$  bilden. Dabei können wir  $E'_6$  in eindeutiger Weise so in zwei punktfremde Dreiecke zerlegen, daß diese wiederum 6-fach homologisch sind und ihre Zentren und Achsen die Eckpunkte und deren gegenüberliegende Seiten der beiden Ausgangsdreiecke aus  $E_6$  bilden.

Über die  $E_6$  gilt in  $\pi_4$  der

**Satz 2.** *Jedes  $E_6$  aus  $\pi_4$  ist durch vier seiner Eckpunkte eindeutig bestimmt.*

**Beweis.** Wir bezeichnen die vier Eckpunkte, die ein vollständiges Viereck bilden, mit  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , die Diagonalepunkte mit  $D_1, D_2, D_3$  und die sechs Seiten mit  $p_1, \dots, p_6$ . Auf den Geraden  $p_k$  liegen insgesamt 19 Punkte (vier  $P_i$ , drei  $D_j$  und

<sup>4)</sup> Zwei  $n$ -Ecke sind punktfremd, wenn sie keinen gemeinsamen Eckpunkt besitzen.

außerdem noch zwei weitere Punkte auf jeder  $p_k$ ). Es bleiben also noch genau zwei weitere Punkte  $P_5, P_6$  in  $\pi_4$ , die offenbar auf der Verbindungsgeraden der Diagonalepunkte  $D_1, D_2, D_3$  liegen und das gegebene Viereck  $P_1, P_2, P_3, P_4$  zu einem  $E_6$  ergänzen.

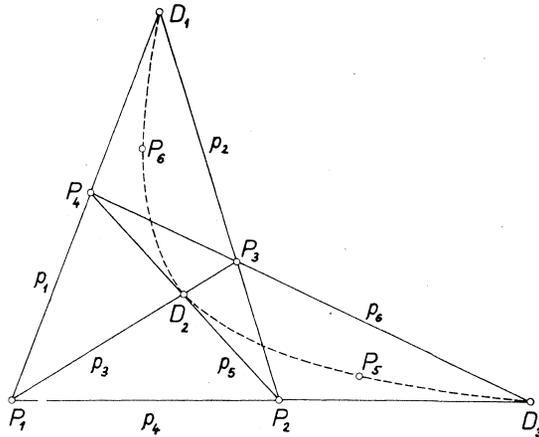


Fig. 1.

**Satz 3.** Sind in  $\pi_4$  zwei Dreiecke  $P_1P_2P_3, Q_1Q_2Q_3$  gegeben, die zusammen ein einfaches Sechseck  $E_6$  bilden; dann sind diese zwei Dreiecke 6-fach homologisch. Die Zentren dieser Homologien bilden ein zu  $E_6$  punktfremdes einfaches Sechseck  $E'_6$ .

**Beweis.** Nach Satz 2 ist  $E_6$  durch vier beliebige seiner Eckpunkte bestimmt, etwa durch  $P_1, P_2, P_3, Q_1$ . Nach dem Fundamentalsatz über projektive Kollineationen<sup>5)</sup> existiert eine Kollineation  $\varphi$  mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} \varphi : A_i &\rightarrow P_i \quad (i = 1, 2, 3), \\ \varphi : B_1 &\rightarrow Q_1. \end{aligned}$$

Nach Satz 2 bilden die Punkte  $B_2, B_3$  in eindeutiger Weise mit  $A_1, A_2, A_3, B_1$  ein einfaches Sechseck  $\bar{E}_6$ , dessen Bild in der Kollineation  $\varphi$  genau das gegebene  $E_6$  ist. Alle weiteren Behauptungen des Satzes 3 sind jetzt schon einfache Folgerungen des Satzes 1 und der Tatsache, daß die Inzidenz bei der Kollineation  $\varphi$  erhalten bleibt.

Insbesondere folgt aus Satz 3, daß sämtliche punktfremde Dreiecke, die sich aus einem beliebigen  $E_6$  bilden lassen, 6-fach homologisch sind.

**Satz 4.** In der Ebene  $\pi_4$  gibt es 1680 verschiedene<sup>6)</sup> Paare punktfremder Dreiecke, die 6-fach homologisch sind.

<sup>5)</sup> vgl. [2] S. 146, Theorem 8.12.

<sup>6)</sup> Zwei Dreiecke sind verschieden, wenn sie nicht in allen Eckpunkten übereinstimmen.

Beweis. Um Satz 4 zu beweisen, genügt es nach Satz 2 und Satz 3, die Anzahl der verschiedenen vollständigen Vierecke in  $\pi_4$  zu bestimmen. Von den insgesamt  $\binom{21}{4}$  Möglichkeiten, irgend vier verschiedene Punkte aus  $\pi_4$  zu wählen, liefern folgende Fälle kein vollständiges Viereck:

1. Vier Punkte auf einer Geraden: Für jede Gerade ergeben sich  $\binom{5}{4}$  Möglichkeiten, insgesamt also 105 Möglichkeiten.

2. Drei Punkte auf einer Geraden, ein Punkt auf einer beliebigen anderen Geraden: Auf jeder Geraden kann man auf  $\binom{5}{3}$  Arten drei Punkte auswählen. Für den vierten Punkt bleiben also noch jeweils 16 Möglichkeiten übrig. Insgesamt gibt es also  $21 \cdot 16 \cdot 10 = 3360$  Möglichkeiten.

Jede andere als unter 1. und 2. aufgeführte Wahl von vier verschiedenen Punkten liefert ein vollständiges Viereck in  $\pi_4$ . Es sind dies  $\binom{21}{4} - 105 - 3360 = 2520$  verschiedene vollständige Vierecke. Jeweils  $\binom{6}{4}$  vollständige Vierecke liefern dasselbe  $E_6$  (Satz 2). Damit gibt es insgesamt 168 verschiedene Systeme  $E_6$ . In jedem  $E_6$  gibt es  $\frac{1}{2} \binom{6}{3} = 10$  verschiedene Paare 6-fach homologischer Dreiecke, in  $\pi_4$  also insgesamt 1680 verschiedene Paare von 6-fach homologischen Dreiecken.

**Satz 5.** *Aus der Vorgabe eines einfachen Sechsecks  $E_6$  in der Ebene  $\pi_4$  läßt sich ein Inzidenzschema von  $\pi_4$  konstruieren.*

Beweis. Nach Satz 3 sind je zwei punktfremde Dreiecke aus  $E_6$  6-fach homologisch, wobei Zentren und Achsen der Homologien von den Eckpunkten der Ausgangsdreiecke und deren Verbindungsgeraden verschieden sind. Aus Satz 1 folgt weiterhin, daß bei der Konstruktion der 6-fachen Homologie zweier Dreiecke alle 21 Punkte und Geraden von  $\pi_4$  benötigt werden. Unter Verwendung dieser Tatsachen läßt sich jetzt ein Inzidenzschema von  $\pi_4$  bestimmen:

Bezeichnen wir die Eckpunkte zweier punktfremder Dreiecke aus  $E_6$  mit 0, 1, 2 bzw. 3, 4, 5 und ihre Verbindungsgeraden mit

$$(10) \quad \begin{aligned} (0, 1) = \mathbf{0}, \quad (2, 0) = \mathbf{1}, \quad (1, 2) = \mathbf{2} \quad \text{bzw.} \\ (3, 4) = \mathbf{3}, \quad (5, 3) = \mathbf{4}, \quad (4, 5) = \mathbf{5}. \end{aligned}$$

Die Homologiezentren sind

$$(11) \quad \begin{aligned} 6 &= (0, 3) \cap (1, 4) \cap (2, 5), & 9 &= (0, 5) \cap (1, 4) \cap (2, 3), \\ 7 &= (0, 4) \cap (1, 5) \cap (2, 3), & 10 &= (0, 4) \cap (1, 3) \cap (2, 5), \\ 8 &= (0, 5) \cap (1, 3) \cap (2, 4), & 11 &= (0, 3) \cap (1, 5) \cap (2, 4). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen wir die auftretenden Geraden folgendermaßen:

$$(12) \quad \begin{aligned} (0, 3) &= 12, & (0, 4) &= 15, & (0, 5) &= 18, \\ (1, 4) &= 13, & (1, 5) &= 16, & (1, 3) &= 19, \\ (2, 5) &= 14, & (2, 3) &= 17, & (2, 4) &= 20. \end{aligned}$$

Die Numerierung der Punkte und Geraden wurde so gewählt, daß wir die den Zentren entsprechenden Homologieachsen auf duale Weise ermitteln können, d. h. indem wir in (11) und (12) Punkte und Geraden vertauschen. Damit ist bereits teilweise das Inzidenzschema (Fig. 2) bestimmt. Durch analoge Konstruktion der sechsfachen Homologie zweier anderer Dreiecke aus  $E_6$  erhalten wir unter Beachtung der Dualität das vollständige Inzidenzschema (Fig. 2):

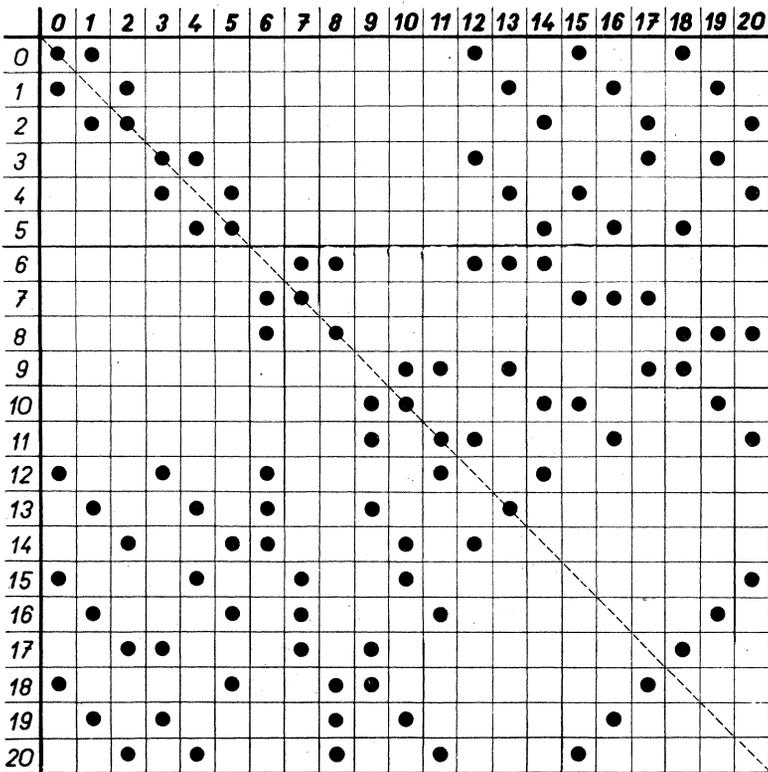


Fig. 2.

Bemerkenswert ist hierbei, daß durch die Wahl eines  $E_6$  aus  $\pi_4$  ein Inzidenzschema von  $\pi_4$  bereits bis auf die Numerierung von Punkten und Geraden eindeutig festgelegt ist.

Aus dieser Tatsache folgt unmittelbar der

**Satz 6.** Ein Isomorphismus zwischen zwei verschiedenen Inzidenzschemas  $I, I'$  einer Ebene  $\pi_4$  ist bis auf Numerierung der Punkte und Geraden eindeutig bestimmt durch die eineindeutige Abbildung der Eckpunkte eines beliebigen  $E_6$  aus  $I$  auf die Eckpunkte eines beliebigen  $E'_6$  aus  $I'$ .

So liefert beispielsweise die Abbildung der Eckpunkte  $0, 1, 2, 3, 4, 5$  eines  $E_6$  aus Schema Fig. 2 auf die Eckpunkte  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$  eines  $E'_6$  aus Schema (1) den folgenden Isomorphismus:

$$(13) \quad \begin{array}{l} 0 \rightarrow A_1, \quad 1 \rightarrow A_2, \quad 2 \rightarrow A_3, \quad 3 \rightarrow B_1, \quad 4 \rightarrow B_2, \\ 5 \rightarrow B_3, \quad 6 \rightarrow D_3, \quad 7 \rightarrow D_1, \quad 8 \rightarrow D_2, \quad 9 \rightarrow C_1, \\ 10 \rightarrow C_2, \quad 11 \rightarrow C_3, \quad 12 \rightarrow W_9, \quad 13 \rightarrow W_5, \quad 14 \rightarrow W_1, \\ 15 \rightarrow W_8, \quad 16 \rightarrow W_4, \quad 17 \rightarrow W_3, \quad 18 \rightarrow W_7, \quad 19 \rightarrow W_6 \\ 20 \rightarrow W_2; \\ 0 \rightarrow a_3, \quad 1 \rightarrow a_2, \quad 2 \rightarrow a_1, \quad 3 \rightarrow b_3, \quad 4 \rightarrow b_2, \\ 5 \rightarrow b_1, \quad 6 \rightarrow d_3, \quad 7 \rightarrow d_2, \quad 8 \rightarrow d_1, \quad 9 \rightarrow c_1, \\ 10 \rightarrow c_3, \quad 11 \rightarrow c_2, \quad 12 \rightarrow w_1, \quad 13 \rightarrow w_6, \quad 14 \rightarrow w_8, \\ 15 \rightarrow w_3, \quad 16 \rightarrow w_5, \quad 17 \rightarrow w_7, \quad 18 \rightarrow w_2, \quad 19 \rightarrow w_4, \\ 20 \rightarrow w_9. \end{array}$$

*Schlußbemerkung.* Der Fall der mehrfach homologischen Dreiecke in der klassischen Ebene über dem Körper der reellen bzw. komplexen Zahlen ist schon 1870 untersucht worden, vgl. [5], [6], [7], [8]. Die Eigenschaften der 6-fach homologischen Dreiecke in der Ebene  $\pi_4$ , die hier unmittelbar aus dem Inzidenzschema (1) dieser Ebene folgen, hat unter anderem W. L. Edge [9] überwiegend mittels der Galoisfelder untersucht.

#### Literaturverzeichnis

- [1] P. Dembowski: Endliche Geometrien, Mathematisch-Physikalische Semesterberichte, XIII (1966), 32–61.
- [2] R. Hartshorne: Foundations of Projective Geometry, New York 1967.
- [3] K. Havlíček: Zur Konstruktion einer endlichen Ebene, Časopis pro pěst. mat. 95 (1970), 71–75.
- [4] R. Lingenberg: Grundlagen der Geometrie I, Mannheim—Wien—Zürich 1969.
- [5] J. Rosanes: Über Dreiecke in perspektivischer Lage, Mathematische Annalen, 2 (1870), 549–552.
- [6] H. Schröter: Über perspektivisch liegende Dreiecke, Mathematische Annalen, 2 (1870), 553–562.

- [7] *E. Hess*: Beiträge zur Theorie der mehrfach perspectiven Dreiecke und Tetraeder, *Mathematische Annalen*, 28 (1887), 167—260.
- [8] *J. Vályi*: Über die Gruppen von mehrfach perspectiven Dreiecken in der Ebene, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 9 (1898), 169—176.
- [9] *W. L. Edge*: Some implications of the geometry of the 21-point plane. *Mathematische Zeitschrift*, 87 (1965) 348—362.

*Anschrift der Verfasser*: Karel Havlíček, Praha 1, Malostranské nám. 25 (Matematicko-fyzikální fakulta KU), ČSSR.

Jürgen Tietze, 51 — Aachen, Templergraben 55 (Institut für Geometrie und Praktische Mathematik der RWTH Aachen), BRD.