Czechoslovak Mathematical Journal

Jaroslav Janda

Über die Kategorie der Menge stetiger Funktionen, welche Differentialgleichungen ohne Eindeutigkeit bestimmen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 23 (1973), No. 1, 30–33

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/101142`

Czechoslovak Mathematical Journal, 23 (98) 1973, Praha

ÜBER DIE KATEGORIE DER MENGE STETIGER FUNKTIONEN, WELCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN OHNE EINDEUTIGKEIT BESTIMMEN

JAROSLAV JANDA, Praha

(Eingelangt am 21. Oktober 1971)

Es sei N die Menge natürlicher, Q die Menge rationaler und R die Menge reeller Zahlen. R^2 sei das kartesische Produkt $R \times R$. In R^2 sei die Metrik ξ folgenderweise vorgegeben:

$$\xi((x, y), (\tilde{x}, \tilde{y})) = \max\left(|x - \tilde{x}|, |y - \tilde{y}|\right)$$

für $(x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in R^2$. Es sei weiter

$$U_a(\tilde{x}, \tilde{y}) = \{(x, y) \in R^2, \xi((x, y), (\tilde{x}, \tilde{y})) < a\} .$$

$C(R^2)$ sei die Menge aller Funktionen, welche in R^2 stetig sind. Für $f, g \in C(R^2)$ legen wir

$$\varrho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\sup\limits_{(x,y)\in U_n(0,0)} |f(x, y) - g(x, y)|}{1 + \sup\limits_{(x,y)\in U_n(0,0)} |f(x, y) - g(x, y)|} .$$

Bekanntlich ist ϱ eine Metrik in $C(R^2)$ und der metrische Raum $(C(R^2), \varrho)$ ist vollständig.

Ferner sei $C_0^\infty(R^2)$ die Menge aller Funktionen von $C(R^2)$, die stetige Ableitungen aller Ordnungen in R^2 haben und deren Träger eine kompakte Menge im metrischen Raum (R^2, ξ) ist.

Dem Weierstrass'schen Approximationssatz zufolge bildet $C_0^\infty(R^2)$ im metrischen Raum $(C(R^2), \varrho)$ eine dichte Teilmenge.

Wir untersuchen in dieser Arbeit gewöhnliche Differentialgleichungen der Form

$$y' = f(x, y) , \tag{1}$$

wobei $f \in C(R^2)$ ist.

Für Einzelheiten über Gleichungen der Form (1) verweisen wir den Leser auf Lehrbücher über gewöhnliche Differentialgleichungen (z. B. [1]).

Wir erwähnen nur, dass für die Gleichung (1) mit $f \in C(R^2)$ der lokale Existenzsatz für Lösungen gilt.

Definition. Ein Punkt $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in R^2$ wird ein Uneindeutigkeitspunkt der Funktion $f \in C(R^2)$ genannt, wenn zumindest zwei Lösungen $y(x)$, $y^*(x)$ der Gleichung (1) mit $y(\tilde{x}) = y^*(\tilde{x}) = \tilde{y}$ so existieren, dass in jedem Intervall $(\tilde{x} - a, \tilde{x} + a)$, $a > 0$ ein zu ihrem gemeinsamen Definitionsbereich gehörender Punkt zu finden ist, in welchem die Lösungen y und y^* verschiedene Werte annehmen.

Es sei M die Menge aller Funktionen $f \in C(R^2)$, welche zumindest einen Uneindeutigkeitspunkt besitzen.

Wir untersuchen ferner die Menge $M \subset C(R^2)$ mit der Absicht zu beweisen, dass diese erster Kategorie in $C(R^2)$ ist.

Definieren wir für $\alpha, A > 0$ und $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in R^2$ die Menge $M(\alpha, A, \tilde{x}, \tilde{y})$ als die Menge solcher Funktionen $f \in C(R^2)$, für welche $(x_1, y_1) \in \overline{U_1(\tilde{x}, \tilde{y})}$ und zwei Lösungen $y(x)$, $y^*(x)$ der Gleichung (1) im Intervall $(x_1 - \alpha, x_1 + \alpha)$ so existieren, dass $y(x_1) = y^*(x_1) = y_1$, $|y(x) - y_1| \leqq 1$, $|y^*(x) - y_1| \leqq 1$ für $x \in (x_1 - \alpha, x_1 + \alpha)$ und

$$\sup_{x \in (x_1 - \alpha, x_1 + \alpha)} |y(x) - y^*(x)| \geqq A$$

ist.

Lemma 1. *Für alle* $\alpha, A > 0$ *und* $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in R^2$ *ist* $M(\alpha, A, \tilde{x}, \tilde{y})$ *eine in* $C(R^2)$ *abgeschlossene Menge (die Topologie in* $C(R^2)$ *ist von der Metrik* ϱ *angegeben).*

Beweis. Es sei eine Folge $\{f_l\} \subset M(\alpha, A, \tilde{x}, \tilde{y})$ so gegeben, dass $\lim_{l \to \infty} \varrho(f_l, f) = 0$ ist. Es seien $(x_1^{(l)}, y_1^{(l)}) \in \overline{U_1(\tilde{x}, \tilde{y})}$ bzw. $y^{(l)}$, $y^{*(l)}$ die zu $f_l \in M(\alpha, A, \tilde{x}, \tilde{y})$ gehörenden Punkte bzw. Lösungen der Gleichung (1), welche der Definition von $M(\alpha, A, \tilde{x}, \tilde{y})$ entsprechen. Ohne die Allgemeinheit einzuschränken kann man voraussetzen, dass die Punktfolge $(x_1^{(l)}, y_1^{(l)})$ zu einem Grenzwert $(x_1, y_1) \in \overline{U_1(\tilde{x}, \tilde{y})}$ strebt (sonst wählt man eine Teilfolge mit dieser Eigenschaft).

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu ε ordne man ein $l_1 \in N$ so zu, dass $\xi((x_1^{(l)}, y_1^{(l)}), (x_1, y_1)) < \varepsilon$ für $l \geqq l_1$ ist. Es gibt weiter ein $p \in N$ so, dass

$$\langle x_1 - \alpha - \varepsilon, x_1 + \alpha + \varepsilon \rangle \times \langle y_1 - 1 - \varepsilon, y_1 + 1 + \varepsilon \rangle \subset U_p(0, 0)$$

sein wird. Nachdem die Konvergenz in $C(R^2)$ die gleichmässige Konvergenz von f_l zu f in Mengen der Form $U_p(0, 0)$ mit sich bringt, gibt es ein $l_2 \in N$ so, dass $|f_l(x, y) - f(x, y)| < \varepsilon$ für alle $l \geqq l_2$, $(x, y) \in U_p(0, 0)$ ist. Ferner gibt es ein $K > 0$ derart, dass $|f(x, y)| \leqq K$ für $(x, y) \in U_p(0, 0)$ sein wird. Daher folgt dann $|f_l(x, y)| < K + \varepsilon$ für alle $(x, y) \in U_p(0, 0)$ und $l \geqq l_0 = \max(l_1, l_2)$; demzufolge sind die Ableitungen der Lösungen $y^{(l)}$, $y^{*(l)}$ der Gleichung (1) in $(x_1^{(l)} - \alpha, x_1^{(l)} + \alpha)$ von der Zahl $K + \varepsilon$ beschränkt wenn $l \geqq l_0$ ist und so sind diese Lösungen im Intervall $(x_1^{(l)} - \alpha, x_1^{(l)} + \alpha)$ gleichmässig stetig. Es exstieren also die Limes dieser Funktionen in den Randpunkten des Intervalles $(x_1^{(l)} - \alpha, x_1^{(l)} + \alpha)$ und man kann also die

Funktionen $y^{(l)}$, $y^{*(l)}$ stetig auf $\langle x_1 - \alpha - \varepsilon,\ x_1 + \alpha + \varepsilon\rangle$ so erweitern, dass diese ausser $(x_1^{(l)} - \alpha,\ x_1^{(l)} + \alpha)$ konstant sind. Offenbar bilden die Funktionen $y^{(l)}$, $y^{*(l)}$, $l \geqq l_0$ in $\langle x_1 - \alpha - \varepsilon, x_1 + \alpha + \varepsilon\rangle$ Folgen gleichstetiger Funktionen, nachdem diese da die Lipschitzbedingung mit der Konstante $K + \varepsilon$ erfüllen. Es ist leicht nachzuweisen, dass $\{y^{(l)}\}$ eine Folge gleichbeschränkter Funktionen in $\langle x_1 - \alpha - \varepsilon,$ $x_1 + \alpha + \ \rangle$ bildet. Dasselbe gilt auch über die Folge $\{y^{*(l)}\}$.

Nach dem Arzel'aschen Satz kann man den Folgen $\{y^{(l)}\}$, $\{y^{*(l)}\}$ in $\langle x_1 - \alpha - \varepsilon,$ $x_1 + \alpha + \varepsilon\rangle$ gleichmässig konvergente Teilfolgen $\{y^{(l_i)}\}_{i=1}^{\infty}$, $\{y^{*(l_i)}\}_{i=1}^{\infty}$ entnehmen. Bezeichnen wir die Limesfunktionen dieser Folgen mit y bzw. y^*. Es ist nun leicht zu zeigen, dass die Funktionenfolge $f_{l_i}(x, y^{(l_i)}(x))$ bzw. $f_{l_i}(x, y^{*(l_i)}(x))$ gleichmässig in $\langle x_1 - \alpha - \varepsilon, x_1 + \alpha + \varepsilon\rangle$ zu $f(x, y(x))$ bzw. $f(x, y^*(x))$ konvergiert.

Die Funktionen y und y^* sind Lösungen der Gleichung (1) im Intervall $(x_1 - \alpha,$ $x_1 + \alpha)$. Um dieses zu zeigen bedenke man dass y genau dann eine Lösung von (1) in $(x_1 - \alpha, x_1 + \alpha)$ ist, wenn

$$y(x) = y_1 + \int_{x_1}^{x} f(z, y(z))\,\mathrm{d}z \tag{2}$$

für alle $x \in (x_1 - \alpha, x_1 + \alpha)$ gilt.

Es sei $x \in (x_1 - \alpha, x_1 + \alpha)$; für hinreichend grosses i $(i \geqq i_0)$ ist dann $x \in (x_1^{(l_i)} - \alpha,$ $x_1^{(l_i)} + \alpha)$ und es ist

$$y^{(l_i)}(x) = y_1^{(l_i)} + \int_{x_1}^{x} f_{l_i}(t, y^{(l_i)}(t))\,\mathrm{d}t + \operatorname{sgn}(x_1 - x_1^{(l_i)}) \int_{x_1^{(l_i)}}^{x_1} f_{l_i}(t, y^{(l_i)}(t))\,\mathrm{d}t\,.$$

Nach dem Grenzübergang $i \to \infty$ ergibt sich daher sofort (2) d. h. $y(x)$ ist eine Lösung der Gleichung (1) in $(x_1 - \alpha, x_1 + \alpha)$. Soeben zeigt man dass auch die Funktion $y^*(x)$ eine Lösung der Gleichung (1) im Intervall $(x_1 - \alpha, x_1 + \alpha)$ ist.

Nun sei $\tau > 0$ beliebig gegeben. Nach der Definition von $M(\alpha, A, \tilde{x}, \tilde{y})$ ist $\sup\limits_{x \in (x_1 - \alpha, x_1 + \alpha)} |y^{(l_i)}(x) - y^{*(l_i)}(x)| > A - \tau$. Es existiert also $x_i \in (x_1^{(l_i)} - \alpha, x_1^{(l_i)} + \alpha)$ so dass

$$|y^{(l_i)}(x_i) - y^{*(l_i)}(x_i)| > A - \tau$$

für alle $i \in N$ ist. Von der Folge $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ wählen wir eine konvergente Teilfolge $\{x_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$, $x_{i_j} \to x_0 \in \langle x_1 - \alpha, x_1 + \alpha\rangle$. Von der gleichmässigen Konvergenz der Folgen $y^{(n_{i_j})}$, $y^{*(n_{i_j})}$ ergibt sich

$$\lim_{j \to \infty} |y^{(n_{i_j})}(x_{i_j}) - y^{*(n_{i_j})}(x_{i_j})| = |y(x_0) - y^*(x_0)| \geqq A - \tau\,.$$

Daher ist $\sup\limits_{x \in (x_1 - \alpha, x_1 + \alpha)} |y(x) - y^*(x)| \geqq A - \tau.$

Nachdem $\tau > 0$ beliebig gewählt worden ist, gilt auch

$$\sup_{x \in (x_1 - \alpha, x_1 + \alpha)} |y(x) - y^*(x)| \geqq A\,.$$

Die Menge $M(\alpha, A, \tilde{x}, \tilde{y})$ ist also in $C(R^2)$ abgeschlossen.

Lemma 2. *Für beliebige α, $A > 0$, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in R^2$ ist die Menge $M(\alpha, A, \tilde{x}, \tilde{y})$ in $C(R^2)$ nirgendsdicht (bei der von der Metrik ϱ bestimmten Topologie in $C(R^2)$).*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $C_0^\infty(R^2) \cap M(\alpha, A, \tilde{x}, \tilde{y}) = \emptyset$ für alle α, $A > 0$, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in R^2$ ist, nachdem $C_0^\infty(R^2)$ in $C(R^2)$ dicht ist und $M(\alpha, A, \tilde{x}, \tilde{y})$ in $C(R^2)$ nach dem Lemma 1 abgeschlossen ist.

Es sei $f \in C_0^\infty(R^2)$. Offenbar genügt f der Lipschitzbedingung in R^2 mit einer positiven Konstante und also sind alle Lösungen der entsprechenden Gleichung (1) eindeutig bestimmt. Es muss also $f \notin M(\alpha, A, \tilde{x}, \tilde{y})$ sein und daher folgt dann sofort unser Lemma.

Satz. *Die Menge M ist erster Kategorie im Raum $C(R^2)$, in dem die Topologie die Metrik ϱ angibt.*

Beweis. Es sei $f \in M$; bezeichnen wir mit (x_1, y_1) den Uneindeutigkeitspunkt der Funktion f. Es existiert offenbar $(r, s) \in Q \times Q$ so dass $(x_1, y_1) \in \overline{U_1(r, s)}$ ist. Von den Eigenschaften der Funktion f, dem lokalen Existenzsatz und der Stetigkeit der Lösungen von (1) ergibt sich sofort, dass man ein $\alpha \in Q \cap (0, 1)$ so finden kann, dass im Intervall $(x_1 - \alpha, x_1 + \alpha)$ zwei Lösungen $y^*(x)$, $y^*(x)$ der Gleichung (1) existieren, für die $y(x_1) = y^*(x_1) = y_1$ ist, die Ungleichungen $|y(x) - y_1| \leqq 1$, $|y^*(x) - y_1| \leqq 1$ für alle $x \in (x_1 - \alpha, x_1 + \alpha)$ gelten und $\sup\limits_{x \in (x_1 - \alpha, x_1 + \alpha)} |y(x) - y^*(x)| \geqq A$ für irgendein $A \in Q \cap (0, 1)$ ist. Dieses aber bedeutet, dass $f \in M(\alpha, A, r, s)$ ist, wobei $A \in Q \cap (0, 1)$, $\alpha \in Q \cap (0, 1)$, $r \in Q$, $s \in Q$ ist (vgl. die Definition der Menge $M(\alpha, A, \tilde{x}, \tilde{y})$). Daher erhält man also die Inklusion

$$M \subset \bigcup M(\alpha, A, r, s),$$

wobei rechts die (abzählbare) Vereinigung über alle geordnete Quadrupel $(\alpha, A, r, s) \in [Q \cap (0, 1)] \times [Q \cap (0, 1)] \times Q \times Q$ steht. Die Menge M ist also in einer abzählbaren Vereinigung abgeschlossener (vgl. Lemma 1) und nirgendsdichter (vgl. Lemma 2) Mengen enthalten und ist demzufolge eine Menge erster Kategorie.

Bemerkung. Wir bemerken noch, dass das ganze Verfahren auch für Funktionen $f(x, y)$, $x \in R$, $y \in R^n$, $f \in C(R^{n+1})$ durchführbar ist und dass man also ein ähnliches Ergebnis auch für den Vektorfall erreichen kann.

Literatur

[1] *Hartman Ph.:* Ordinary differential Equations. New York, J. Wessley and Sons, 1964.

Anschrift des Verfassers: 440 01 Louny, Březinova 2023.