

# Aplikace matematiky

---

Josef Matušů; Josef Novák  
Über eine elementare Fläche

*Aplikace matematiky*, Vol. 24 (1979), No. 2, 93–104

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103786>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1979

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## ÜBER EINE ELEMENTARE FLÄCHE

JOSEF MATUŠŮ, JOSEF NOVÁK

(Eingegangen 26. April 1977)

Das in der Arbeit [1] konstruierte Kurvensegment erwies sich mit seinen Eigenschaften in zahlreichen konkreten Anwendungsbeispielen als sehr gut geeignet. In dieser Arbeit wird deshalb eine elementare Fläche derart konstruiert, dass ihre Hauptgeneratrizen die Eigenschaften dieses Kurvensegments haben. Wir bezeichnen sie kurz als sog. **M**-Fläche.

### I. BESTIMMUNG DES KURVENSEGMENTS

Im Raum  $\mathbf{R}^3$  seien zwei verschiedene Punkte **A**, **C** gegeben; mit **A**, **C** bezeichnen wir die entsprechenden Radiusvektoren dieser Punkte. In jedem von diesen Punkten sei ein Einheitsvektor  $d\mathbf{A}/ds$ ,  $d\mathbf{C}/ds$  vorgeschrieben. Wir versuchen ein Polynom der Variablen  $s \in \langle 0, 1 \rangle$

$$(1) \quad \mathbf{P}_s = \mathbf{a}_3 s^3 + \mathbf{a}_2 s^2 + \mathbf{a}_1 s + \mathbf{a}_0$$

derart zu bestimmen, dass

$$(2) \quad \begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= \mathbf{A}, \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{C}, \\ \frac{d\mathbf{P}_0}{ds} &= k \frac{d\mathbf{A}}{ds}, \quad \frac{d\mathbf{P}_1}{ds} = m \frac{d\mathbf{C}}{ds}, \end{aligned}$$

wobei die positiven Zahlen  $k, m$  wie in [1] bestimmt werden. Die Vektoren  $\mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_0$  treten als Lösung des folgenden Gleichungssystems auf:

$$(4) \quad \mathbf{P}_0 = \mathbf{A} = \mathbf{a}_0,$$

$$(5) \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{C} = \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_0,$$

$$(6) \quad \frac{d\mathbf{P}_0}{ds} = k \frac{d\mathbf{A}}{ds} = \mathbf{a}_1,$$

$$(7) \quad \frac{d\mathbf{P}_1}{ds} = m \frac{d\mathbf{C}}{ds} = 3\mathbf{a}_3 + 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1.$$

Man überzeugt sich leicht, dass

$$(8) \quad \begin{aligned} \mathbf{a}_3 &= 2(\mathbf{A} - \mathbf{C}) + k \frac{d\mathbf{A}}{ds} + m \frac{d\mathbf{C}}{ds}, \\ \mathbf{a}_2 &= 3(\mathbf{C} - \mathbf{A}) - 2k \frac{d\mathbf{A}}{ds} - m \frac{d\mathbf{C}}{ds}, \\ \mathbf{a}_1 &= k \frac{d\mathbf{A}}{ds}, \\ \mathbf{a}_0 &= \mathbf{A}. \end{aligned}$$

## II. ANDERE DARSTELLUNG DES KURVENSEGMENTS

Nach der UNISURF-Methode (sich [2]) schreiben wir in Analogie zu (1)

$$(9) \quad \mathbf{P}_s = \mathbf{b}_3 \cdot f_3(s) + \mathbf{b}_2 \cdot f_2(s) + \mathbf{b}_1 \cdot f_1(s) + \mathbf{b}_0 \cdot f_0(s),$$

wobei die differenzierbaren Funktionen  $f_i(s)$  ( $s \in \langle 0, 1 \rangle$ ) gewissen Bedingungen genügen. Aus  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{b}_0$  (vergl. mit (4)) folgt, dass

$$(10) \quad f_0(0) = 1 \quad \text{und} \quad f_i(0) = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Ferner folgt aus  $\mathbf{P}_1 = \sum_0^3 \mathbf{b}_i$  (vergl. mit (5)), dass

$$(11) \quad f_i(1) = 1 \quad \text{für} \quad 0 \leq i \leq 3.$$

Wenn wir  $f_0(s) \equiv 1$  setzen, dann sind die Bedingungen in (10), (11) erfüllt. Die Gleichung (9) kann dann in der Form

$$(12) \quad \mathbf{P}_s = \mathbf{b}_0 + \sum_1^3 \mathbf{b}_i \cdot f_i(s)$$

geschrieben werden. Die Ableitung von (12) ist

$$(13) \quad \mathbf{P}'_s = \sum_1^3 \mathbf{b}_i \cdot f'_i(s).$$

Wenn wir in (13)  $s = 0, 1$  setzen und die Bedingungen  $\mathbf{P}'_0 = 3\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{P}'_1 = 3\mathbf{b}_3$  berücksichtigen (jetzt also ein wenig anders wie in (7)), dann folgt

$$(14) \quad f'_1(0) = 3 \quad \text{und} \quad f'_i(0) = 0 \quad \text{für} \quad 2 \leq i \leq 3,$$

$$(15) \quad f'_3(1) = 3 \quad \text{und} \quad f'_i(1) = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Mann überzeugt sich leicht, dass z. B. die Funktionen

$$(16) \quad \begin{aligned} f_1(s) &= s^3 - 3s^2 + 3s, \\ f_2(s) &= -2s^3 + 3s^2, \\ f_3(s) &= s^3 \end{aligned}$$

die Bedingungen (10), (11), (14), (15) erfüllen.

Wenn wir nun in (12)

$$\mathbf{b}_3 = \frac{m}{3} \frac{d\mathbf{C}}{ds},$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{C} - \mathbf{A} - \frac{k}{3} \frac{d\mathbf{A}}{ds} - \frac{m}{3} \frac{d\mathbf{C}}{ds},$$

$$\mathbf{b}_1 = \frac{k}{3} \frac{d\mathbf{A}}{ds},$$

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{A}$$

setzen, dann ist das Kurvensegment (1), welches die Bedingungen (2), (3) erfüllt, durch die Gleichung

$$(17) \quad \mathbf{P}_s = \mathbf{A} + \frac{k}{3} \frac{d\mathbf{A}}{ds} \cdot f_1(s) + \left( \mathbf{C} - \mathbf{A} - \frac{k}{3} \frac{d\mathbf{A}}{ds} - \frac{m}{3} \frac{d\mathbf{C}}{ds} \right) \cdot f_2(s) + \frac{m}{3} \frac{d\mathbf{C}}{ds} \cdot f_3(s)$$

dargestellt.

Wenn wir die Vektoren  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  aus der Darstellung (9) in den Endpunkten einander anschliessen, dann erhalten wir ein Vektorpolygon mit den Ecken  $S_0, S_1, S_2, S_3$ . Aus Abb. 1 folgt, dass  $\mathbf{S}_0 = \mathbf{b}_0$ ,  $\mathbf{S}_3 = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$ ; dies sind die Endpunkte des Kurvensegments (9). Dieses Polygon bezeichnen wir als charakteristisches Polygon des Kurvensegments, in Zeichen  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ .

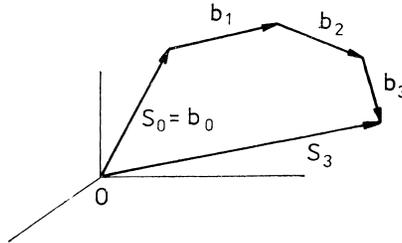


Abb. 1

### III. DIE UNISURF-FLÄCHEN

Für das Weitere ist es notwendig einiges über die sog. UNISURF-Flächen zu sagen (siehe [2]). Wir führen nur das an, was für die Konstruktion der M-Fläche unbedingt nötig ist.

Im Raum  $\mathbf{R}^3$  betrachten wir die Punkte  $A_{0,1}, A_{0,2}, A_{0,3}, A_{0,4}$ ; wir wollen voraussetzen, dass sie Eckpunkte eines charakteristischen Polygons  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  sind. Ferner

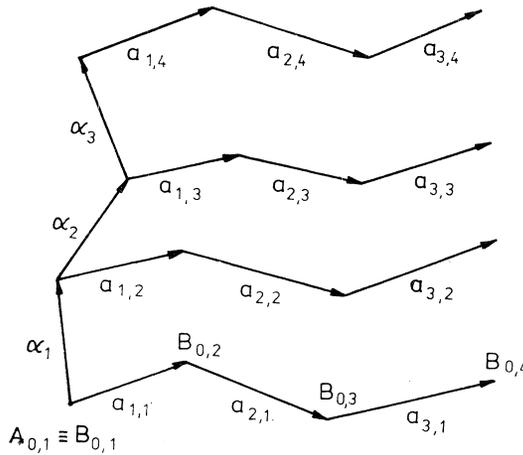


Abb. 2

betrachten wir die charakteristischen Polygone  $(\mathbf{a}_{1,q}, \mathbf{a}_{2,q}, \mathbf{a}_{3,q})$ , dessen Anfangsecken in  $A_{0,q}$  liegen ( $q = 1, 2, 3, 4$ ). Durch die Menge der charakteristischen Polygone  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  und  $(\mathbf{a}_{1,q}, \mathbf{a}_{2,q}, \mathbf{a}_{3,q})$  für  $q = 1, 2, 3, 4$  ist dann ein charakteristisches „Netz“ für eine elementare Fläche  $F$  gegeben, die von vier Kurven beschränkt ist. Es sind dies die Kurven  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $(\mathbf{a}_{1,1}, \mathbf{a}_{2,1}, \mathbf{a}_{3,1})$ ,  $(\mathbf{a}_{1,4}, \mathbf{a}_{2,4}, \mathbf{a}_{3,4})$ , die also durch die entsprechenden charakteristischen Polygone ausgedrückt sind, und dazu noch die vierte Kurve, deren charakteristisches Polygon die Endpunkte der Vektoren  $\mathbf{a}_{3,1}, \mathbf{a}_{3,2}, \mathbf{a}_{3,3}, \mathbf{a}_{3,4}$  zu den Eckpunkten hat (siehe Abb. 2).

Jede von diesen vier Kurven, die auf der elementaren Fläche  $F$  liegen, bezeichnen wir als Hauptgeneratrizen der Fläche; speziell sei  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  die 0-te Generatrix bezüglich des Parameters  $s$ , in Zeichen  $G(0)$ . Die durch die restlichen Polygone  $(\mathbf{a}_{1,2}, \mathbf{a}_{2,2}, \mathbf{a}_{3,2})$ ,  $(\mathbf{a}_{1,3}, \mathbf{a}_{2,3}, \mathbf{a}_{3,3})$  bestimmten Kurven, die nicht auf der Fläche  $F$  liegen, aber ihre Definition wesentlich beeinflussen, bezeichnen wir als Nebengeneratrizen der Fläche. Aus der Darstellung (12) ausgehend kann nun gezeigt werden

(siehe [2]), dass die Fläche  $F$  durch die Gleichung

$$(18) \quad \mathbf{P}(s, t) = \mathbf{A}_{0,1} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_{i,1} \cdot f_i(s) + \sum_{j=1}^3 \alpha_j \cdot f_j(t) + \\ + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\mathbf{a}_{i,j+1} - \mathbf{a}_{i,j}) \cdot f_i(s) \cdot f_j(t)$$

parametrisiert werden kann ( $s, t \in \langle 0, 1 \rangle$ ),  $\mathbf{P}(s, t)$  bedeutet den variablen Punkt der Fläche  $F$ ). Für ein fest gewähltes  $s$  bekommen wir aus (18) die Generatrix  $G(s)$  unserer Fläche  $F$ .

Das charakteristische Netz in Abb. 2 kann durch das sog. konjugierte Netz ergänzt werden (siehe Abb. 3).

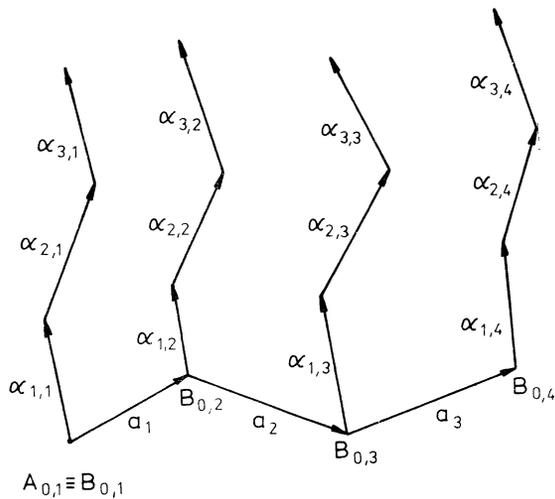


Abb. 3

Durch dieses Netz ist eine elementare Fläche  $\Phi$  erklärt, die wieder von vier Kurven begrenzt ist. Es sind dies die Kurven  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ ,  $(\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{3,1})$ ,  $(\alpha_{1,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,4})$  und dazu noch die vierte Kurve, deren charakteristisches Polygon die Endpunkte der Vektoren  $\alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}$  zu den Eckpunkten hat. Jede von diesen vier Kurven, die auf der elementaren Fläche  $\Phi$  liegen, bezeichnen wir als Hauptgeneratrizen der Fläche; speziell sei  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  die 0-te Generatrix bezüglich des Parameters  $t$ , in Zeichen  $\Gamma(0)$ . Die durch die restlichen charakteristischen Polygone  $(\alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}, \alpha_{3,2})$ ,  $(\alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{3,3})$  bestimmten Kurven, die nicht auf der Fläche  $\Phi$  liegen, aber ihre Definition durchaus beeinflussen, bezeichnen wir als Nebengeneratrizen der Fläche. Aus der Darstellung (12) ausgehend kann nun ähnlich wie früher gezeigt werden,

dass die Fläche  $\Phi$  durch die Gleichung

$$(19) \quad \begin{aligned} \Pi(t, s) = & \mathbf{B}_{0,1} + \sum_{j=1}^3 \alpha_{j,1} \cdot f_j(t) + \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i \cdot f_i(s) + \\ & + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\alpha_{j,i+1} - \alpha_{j,i}) \cdot f_i(s) \cdot f_j(t) \end{aligned}$$

parametrisiert werden kann ( $\Pi(t, s)$  bedeutet den variablen Punkt der Fläche  $\Phi$ ). Für ein fest gewähltes  $t$  bekommen wir aus (19) die Generatrix  $\Gamma(t)$  der Fläche  $\Phi$ .

Nun ist aber (siehe Abb. 2, 3)  $\mathbf{A}_{0,1} = \mathbf{B}_{0,1}$ ,  $\alpha_{j,1} = \alpha_j$ ,  $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{i,1}$ ,  $\mathbf{a}_{i,j+1} - \mathbf{a}_{i,j} = \alpha_{j,i+1} - \alpha_{j,i}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), woraus (vergl. (18), (19))

$$(20) \quad \mathbf{P}(s, t) = \Pi(t, s)$$

folgt. Damit ist gezeigt, dass die oben definierten Netze eine und dieselbe Fläche definieren:  $F \equiv \Phi$ . Auf dieser Fläche gibt es zwei Systeme von zueinander konjugierten Generatrizen  $G$  und  $\Gamma$ . Jede Generatrix des einen Systems schneidet alle Generatrizen des anderen Systems.

#### IV. KONSTRUKTION DER M-FLÄCHE

Im Raum  $\mathbf{R}^3$  betrachten wir die vier verschiedenen Punkte  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ . Diesen Punkten entsprechenden Radiusvektoren seien  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ . In jedem von diesen Punkten sei ein Paar von Einheitsvektoren  $d\mathbf{A}/ds, d\mathbf{A}/dt$  usw. gegeben. Durch die Gleichung (17) ist dann das Kurvensegment (1) bestimmt, welches die Bedingungen (2), (3) erfüllt:

$$(21) \quad \begin{aligned} \mathbf{P}_s = & \mathbf{A} + \frac{k_{AC}}{3} \frac{d\mathbf{A}}{ds} \cdot f_1(s) + \left( \mathbf{C} - \mathbf{A} - \frac{k_{AC}}{3} \frac{d\mathbf{A}}{ds} - \frac{m_{AC}}{3} \frac{d\mathbf{C}}{ds} \right) \cdot f_2(s) + \\ & + \frac{m_{AC}}{3} \frac{d\mathbf{C}}{ds} \cdot f_3(s); \end{aligned}$$

wir setzen  $k = k_{AC}$ ,  $m = m_{AC}$ . Ähnlich bestimmen wir das Kurvensegment

$$(22) \quad \begin{aligned} \mathbf{P}_s = & \mathbf{B} + \frac{k_{BD}}{3} \frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot f_1(s) + \left( \mathbf{D} - \mathbf{B} - \frac{k_{BD}}{3} \frac{d\mathbf{B}}{ds} - \frac{m_{BD}}{3} \frac{d\mathbf{D}}{ds} \right) \cdot f_2(s) + \\ & + \frac{m_{BD}}{3} \frac{d\mathbf{D}}{ds} \cdot f_3(s). \end{aligned}$$

Wir setzen  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{0,1}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{A}_{0,4}$ , mit  $\mathbf{A}_{0,2}, \mathbf{A}_{0,3}$  in dieser Reihenfolge bezeichnen wir die Endpunkte der Vektoren  $(k_{AB}/3)(d\mathbf{A}/dt)$ ,  $-(m_{AB}/3)(d\mathbf{B}/dt)$ ; ihre Anfangspunkte sind in  $\mathbf{A}$ , bzw.  $\mathbf{B}$ . Es sind  $\mathbf{A}_{0,1}, \mathbf{A}_{0,2}, \mathbf{A}_{0,3}, \mathbf{A}_{0,4}$  die Ecken eines charakteristischen

Polygons  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , wobei

$$(23) \quad \alpha_1 = \frac{k_{AB}}{3} \frac{d\mathbf{A}}{dt}, \quad \alpha_2 = \mathbf{B} - \mathbf{A} - \frac{k_{AB}}{3} \frac{d\mathbf{A}}{dt} - \frac{m_{AB}}{3} \frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad \alpha_3 = \frac{m_{AB}}{3} \frac{d\mathbf{B}}{dt}.$$

Ähnlich setzen wir  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{0,1}$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{C}_{0,4}$ , mit  $\mathbf{C}_{0,2}$ ,  $\mathbf{C}_{0,3}$  in dieser Reihenfolge bezeichnen wir die Endpunkte der Vektoren  $(k_{CD}/3)(d\mathbf{C}/dt)$ ,  $-(m_{CD}/3)(d\mathbf{D}/dt)$ ; ihre Anfangspunkte sind in  $\mathbf{C}$ , bzw.  $\mathbf{D}$ . Die Anfangspunkte der Vektoren  $d\mathbf{A}/ds$ , bzw.  $d\mathbf{C}/ds$  verschieben wir in die Punkte  $\mathbf{A}_{0,2}$ , bzw.  $\mathbf{C}_{0,2}$ ; ähnlich verschieben wir die Anfangspunkte der Vektoren  $d\mathbf{B}/ds$ , bzw.  $d\mathbf{D}/ds$  in die Punkte  $\mathbf{A}_{0,3}$ , bzw.  $\mathbf{C}_{0,3}$ . Wir haben dann die vier folgenden charakteristischen Polygone, dessen Anfangsecken in  $\mathbf{A}_{0,1}$  (sich (21)),  $\mathbf{A}_{0,2}$ ,  $\mathbf{A}_{0,3}$ ,  $\mathbf{A}_{0,4}$  (sich (22)) liegen:

$$(24) \quad \left( \frac{k_{AC}}{3} \frac{d\mathbf{A}}{ds}, \mathbf{C} - \mathbf{A} - \frac{k_{AC}}{3} \frac{d\mathbf{A}}{ds} - \frac{m_{AC}}{3} \frac{d\mathbf{C}}{ds}, \frac{m_{AC}}{3} \frac{d\mathbf{C}}{ds} \right) = (\mathbf{a}_{1,1}, \mathbf{a}_{2,1}, \mathbf{a}_{3,1}),$$

$$(25) \quad \left( \frac{k_{A_{0,2}C_{0,2}}}{3} \frac{d\mathbf{A}}{ds}, \mathbf{C} + \frac{k_{CD}}{3} \frac{d\mathbf{C}}{dt} - \mathbf{A} - \frac{k_{AB}}{3} \frac{d\mathbf{A}}{dt} - \frac{k_{A_{0,2}C_{0,2}}}{3} \frac{d\mathbf{A}}{ds} - \frac{m_{A_{0,2}C_{0,2}}}{3} \frac{d\mathbf{C}}{ds}, \right. \\ \left. \frac{m_{A_{0,2}C_{0,2}}}{3} \frac{d\mathbf{C}}{ds} \right) = (\mathbf{a}_{1,2}, \mathbf{a}_{2,2}, \mathbf{a}_{3,2}),$$

(26)

$$\left( \frac{k_{A_{0,3}C_{0,3}}}{3} \frac{d\mathbf{B}}{ds}, \mathbf{D} - \frac{m_{CD}}{3} \frac{d\mathbf{D}}{dt} - \mathbf{B} + \frac{m_{AB}}{3} \frac{d\mathbf{B}}{dt} - \frac{k_{A_{0,3}C_{0,3}}}{3} \frac{d\mathbf{B}}{ds} - \frac{m_{A_{0,3}C_{0,3}}}{3} \frac{d\mathbf{D}}{ds}, \right. \\ \left. \frac{m_{A_{0,3}C_{0,3}}}{3} \frac{d\mathbf{D}}{ds} \right) = (\mathbf{a}_{1,3}, \mathbf{a}_{2,3}, \mathbf{a}_{3,3}),$$

$$(27) \quad \left( \frac{k_{BD}}{3} \frac{d\mathbf{B}}{ds}, \mathbf{D} - \mathbf{B} - \frac{k_{BD}}{3} \frac{d\mathbf{B}}{ds} - \frac{m_{BD}}{3} \frac{d\mathbf{D}}{ds}, \frac{m_{BD}}{3} \frac{d\mathbf{D}}{ds} \right) = (\mathbf{a}_{1,4}, \mathbf{a}_{2,4}, \mathbf{a}_{3,4}).$$

Durch die Menge der charakteristischen Polygone  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  (sich (23)) und  $(\mathbf{a}_{1,q}, \mathbf{a}_{2,q}, \mathbf{a}_{3,q})$  für  $q = 1, 2, 3, 4$  ist dann eine UNISURF-Fläche  $\mathbf{M}$  mit der Parameterdarstellung (18) gegeben.

Die partielle Ableitung von  $\mathbf{P}(s, t)$  nach  $s$  ist

$$(28) \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial s}(s, t) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_{i,1} \cdot f'_i(s) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\mathbf{a}_{i,j+1} - \mathbf{a}_{i,j}) \cdot f'_i(s) \cdot f_j(t).$$

Wenn wir in (28)  $s = 0$  setzen, dann folgt (sich (14))

$$(29) \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial s}(0, t) = 3\mathbf{a}_{1,1} + 3 \sum_{j=1}^3 (\mathbf{a}_{1,j+1} - \mathbf{a}_{1,j}) \cdot f_j(t).$$

Aus (29) folgt für  $t = 0, 1$  (siehe (10), (11), (24), (26))

$$(30) \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial s}(0, 0) = k_{AC} \frac{d\mathbf{A}}{ds}, \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial s}(0, 1) = k_{BD} \frac{d\mathbf{B}}{ds}.$$

Wenn wir in (28)  $s = 1$  setzen, dann folgt (siehe (15))

$$(31) \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial s}(1, t) = 3\mathbf{a}_{3,1} + 3 \sum_{j=1}^3 (\mathbf{a}_{3,j+1} - \mathbf{a}_{3,j}) \cdot f_j(t).$$

Aus (31) folgt für  $t = 0, 1$  (siehe (10), (11), (24), (27))

$$(32) \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial s}(1, 0) = m_{AC} \frac{d\mathbf{C}}{ds}, \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial s}(1, 1) = m_{BD} \frac{d\mathbf{D}}{ds}.$$

Mit (30), (32) ist gezeigt, dass die auf der Fläche  $\mathbf{M}$  liegenden Hauptgeneratrizen (21), (22) den am Anfang unserer Ausführungen postulierten Bedingungen (2), (3) genügen.

Die partielle Ableitung von  $\mathbf{P}(s, t)$  nach  $t$  ist

$$(33) \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}(s, t) = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \cdot f'_j(t) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\mathbf{a}_{i,j+1} - \mathbf{a}_{i,j}) \cdot f_i(s) \cdot f'_j(t).$$

Wenn wir in (33)  $t = 0$  setzen, dann folgt (siehe (14), (23), (24), (25))

$$(34) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}(s, 0) &= 3\alpha_1 + 3 \sum_{i=1}^3 (\mathbf{a}_{i,2} - \mathbf{a}_{i,1}) \cdot f_i(s) = \\ &= k_{AB} \frac{d\mathbf{A}}{dt} + (k_{A_0,2C_0,2} - k_{AC}) \frac{d\mathbf{A}}{ds} \cdot f_1(s) + \\ &+ \left[ k_{CD} \frac{d\mathbf{C}}{dt} - k_{AB} \frac{d\mathbf{A}}{dt} - (k_{A_0,2C_0,2} - k_{AC}) \frac{d\mathbf{A}}{ds} - (m_{A_0,2C_0,2} - m_{AC}) \frac{d\mathbf{C}}{ds} \right] \cdot f_2(s) + \\ &+ (m_{A_0,2C_0,2} - m_{AC}) \frac{d\mathbf{C}}{ds} \cdot f_3(s). \end{aligned}$$

Aus (34) folgt für  $s = 0, 1$  (siehe (10), (11))

$$(35) \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}(0, 0) = k_{AB} \frac{d\mathbf{A}}{dt}, \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}(1, 0) = k_{CD} \frac{d\mathbf{C}}{dt}.$$

Wenn wir in (33)  $t = 1$  setzen, dann ist (siehe (15), (23), (26), (27))

$$(36) \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}(s, 1) = 3\alpha_3 + 3 \sum_{i=1}^3 (\mathbf{a}_{i,4} - \mathbf{a}_{i,3}) \cdot f_i(s) =$$

$$\begin{aligned}
&= m_{AB} \frac{d\mathbf{B}}{dt} + (k_{BD} - k_{A_0,3C_0,3}) \frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot f_1(s) + \\
&+ \left[ m_{CD} \frac{d\mathbf{D}}{dt} - m_{AB} \frac{d\mathbf{B}}{dt} - (k_{BD} - k_{A_0,3C_0,3}) \frac{d\mathbf{B}}{ds} - (m_{BD} - m_{A_0,3C_0,3}) \frac{d\mathbf{D}}{ds} \right] \cdot f_2(s) + \\
&\quad + (m_{BD} - m_{A_0,3C_0,3}) \frac{d\mathbf{D}}{ds} \cdot f_3(s).
\end{aligned}$$

Aus (36) folgt für  $s = 0, 1$  (siehe (10), (11))

$$(37) \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}(0, 1) = m_{AB} \frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}(1, 1) = m_{CD} \frac{d\mathbf{D}}{dt}.$$

Mit (35), (37) ist gezeigt, dass auch die zwei restlichen Hauptgeneratrizen der Fläche  $M$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_t &= \mathbf{A} + \frac{k_{AB}}{3} \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot f_1(t) + \left( \mathbf{B} - \mathbf{A} - \frac{k_{AB}}{3} \frac{d\mathbf{A}}{dt} - \frac{m_{AB}}{3} \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right) \cdot f_2(t) + \\
&\quad + \frac{m_{AB}}{3} \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot f_3(t), \\
\mathbf{P}_t &= \mathbf{C} + \frac{k_{CD}}{3} \frac{d\mathbf{C}}{dt} \cdot f_1(t) + \left( \mathbf{D} - \mathbf{C} - \frac{k_{CD}}{3} \frac{d\mathbf{C}}{dt} - \frac{m_{CD}}{3} \frac{d\mathbf{D}}{dt} \right) \cdot f_2(t) + \\
&\quad + \frac{m_{CD}}{3} \frac{d\mathbf{D}}{dt} \cdot f_3(t)
\end{aligned}$$

den Bedingungen (2), (3) (jetzt bezüglich des Parameters  $t$ ) genügen.

#### V. ANDERE BESTIMMUNG DER ABLEITUNGEN (34), (36)

Sei  $\mathbf{P}_{s,AC}$  ein Punkt auf der Hauptgeneratrix (21),  $\mathbf{P}_{s,A_0,2C_0,2}$  derjenige Punkt auf der Nebengeneratrix (25) mit demselben Parameterwert  $s$ :

$$\begin{aligned}
(38) \quad \mathbf{P}_{s,A_0,2C_0,2} &= \mathbf{A} + \frac{k_{AB}}{3} \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{k_{A_0,2C_0,2}}{3} \frac{d\mathbf{A}}{ds} \cdot f_1(s) + \\
&+ \left( \mathbf{C} + \frac{k_{CD}}{3} \frac{d\mathbf{C}}{dt} - \mathbf{A} - \frac{k_{AB}}{3} \frac{d\mathbf{A}}{dt} - \frac{k_{A_0,2C_0,2}}{3} \frac{d\mathbf{A}}{ds} - \frac{m_{A_0,2C_0,2}}{3} \frac{d\mathbf{C}}{ds} \right) \cdot f_2(s) + \\
&\quad + \frac{m_{A_0,2C_0,2}}{3} \frac{d\mathbf{C}}{ds} \cdot f_3(s).
\end{aligned}$$

Wenn wir (21) von (38) abziehen, dann folgt

$$\begin{aligned}
3(\mathbf{P}_{s,A_0,2C_0,2} - \mathbf{P}_{s,AC}) &= k_{AB} \frac{d\mathbf{A}}{dt} + (k_{A_0,2C_0,2} - k_{AC}) \frac{d\mathbf{A}}{ds} \cdot f_1(s) + \\
+ \left[ k_{CD} \frac{d\mathbf{C}}{dt} - k_{AB} \frac{d\mathbf{A}}{dt} - (k_{A_0,2C_0,2} - k_{AC}) \frac{d\mathbf{A}}{ds} - (m_{A_0,2C_0,2} - m_{AC}) \frac{d\mathbf{C}}{ds} \right] \cdot f_2(s) + \\
&+ (m_{A_0,2C_0,2} - m_{AC}) \frac{d\mathbf{C}}{ds} \cdot f_3(s).
\end{aligned}$$

Der Vergleich mit (34) zeigt, dass

$$(39) \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}(s, 0) = 3[\mathbf{P}_{s,A_0,2C_0,2} - \mathbf{P}_{s,AC}].$$

Sei  $\mathbf{P}_{s,BD}$  ein Punkt auf der Hauptgeneratrix (22),  $\mathbf{P}_{s,A_0,3C_0,3}$  derjenige Punkt auf der Nebengeneratrix (26) mit demselben Parameterwert  $s$ :

$$\begin{aligned}
(40) \quad \mathbf{P}_{s,A_0,3C_0,3} &= \mathbf{B} - \frac{m_{AB}}{3} \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{k_{A_0,3C_0,3}}{3} \frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot f_1(s) + \\
+ \left( \mathbf{D} - \frac{m_{CD}}{3} \frac{d\mathbf{D}}{dt} - \mathbf{B} + \frac{m_{AB}}{3} \frac{d\mathbf{B}}{dt} - \frac{k_{A_0,3C_0,3}}{3} \frac{d\mathbf{B}}{ds} - \frac{m_{A_0,3C_0,3}}{3} \frac{d\mathbf{D}}{ds} \right) \cdot f_2(s) + \\
&+ \frac{m_{A_0,3C_0,3}}{3} \frac{d\mathbf{D}}{ds} \cdot f_3(s).
\end{aligned}$$

Wenn wir (40) von (22) abziehen, dann folgt

$$\begin{aligned}
3(\mathbf{P}_{s,BD} - \mathbf{P}_{s,A_0,3C_0,3}) &= m_{AB} \frac{d\mathbf{B}}{dt} + (k_{BD} - k_{A_0,3C_0,3}) \frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot f_1(s) + \\
+ \left[ m_{CD} \frac{d\mathbf{D}}{dt} - m_{AB} \frac{d\mathbf{B}}{dt} - (k_{BD} - k_{A_0,3C_0,3}) \frac{d\mathbf{B}}{ds} - (m_{BD} - m_{A_0,3C_0,3}) \frac{d\mathbf{D}}{ds} \right] \cdot f_2(s) + \\
&+ (m_{BD} - m_{A_0,3C_0,3}) \frac{d\mathbf{D}}{ds} \cdot f_3(s).
\end{aligned}$$

Der Vergleich mit (36) zeigt, dass

$$(41) \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}(s, 1) = 3[\mathbf{P}_{s,BD} - \mathbf{P}_{s,A_0,3C_0,3}].$$

Von (39), (41) ausgehend bestimmen wir nun umgekehrt das Kurvensegment

$$(42) \quad (\mathbf{P}_{s,A_0,2C_0,2} - \mathbf{P}_{s,AC}, \mathbf{P}_{s,A_0,3C_0,3} - \mathbf{P}_{s,A_0,2C_0,2}, \mathbf{P}_{s,BD} - \mathbf{P}_{s,A_0,3C_0,3})$$

mit dem Anfangspunkt  $\mathbf{P}_{s,AC}$  und dem Endpunkt  $\mathbf{P}_{s,BD}$  (siehe (12)):

$$(43) \quad \mathbf{P}(s, t) = \mathbf{P}_{s,AC} + (\mathbf{P}_{s,A_0,2C_0,2} - \mathbf{P}_{s,AC}) \cdot f_1(t) + \\ + (\mathbf{P}_{s,A_0,3C_0,3} - \mathbf{P}_{s,A_0,2C_0,2}) \cdot f_2(t) + (\mathbf{P}_{s,BD} - \mathbf{P}_{s,A_0,3C_0,3}) \cdot f_3(t).$$

Man überzeugt sich leicht, dass (siehe (21)–(27), (38), (40))

$$(44) \quad \mathbf{P}_{s,AC} = \mathbf{A} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_{i,1} \cdot f_i(s),$$

$$(45) \quad \mathbf{P}_{s,A_0,2C_0,2} - \mathbf{P}_{s,AC} = \alpha_1 + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{a}_{i,2} - \mathbf{a}_{i,1}) \cdot f_i(s),$$

$$(46) \quad \mathbf{P}_{s,A_0,3C_0,3} - \mathbf{P}_{s,A_0,2C_0,2} = \alpha_2 + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{a}_{i,3} - \mathbf{a}_{i,2}) \cdot f_i(s),$$

$$(47) \quad \mathbf{P}_{s,BD} - \mathbf{P}_{s,A_0,3C_0,3} = \alpha_3 + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{a}_{i,4} - \mathbf{a}_{i,3}) \cdot f_i(s).$$

Wenn wir (44)–(47) in (43) einsetzen, dann folgt (vergl. mit (18))

$$\mathbf{P}(s, t) = \mathbf{A} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_{i,1} \cdot f_i(s) + \sum_{j=1}^3 \alpha_j \cdot f_j(t) + \\ + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\mathbf{a}_{i,j+1} - \mathbf{a}_{i,j}) \cdot f_i(s) \cdot f_j(t),$$

d. h. es resultiert die auf der Fläche  $M$  liegende Generatrix  $G(s)$ .

Mit dieser Methode kann die variable Generatrix  $G(s)$  unserer Fläche  $M$  verhältnismässig rasch als das Kurvensegment (42) bestimmt werden.

In den Abb. 4 und 5 sind zwei Beispiele von  $M$ -Flächen mittels eines Computers gezeichnet. Die zueinander konjugierten Generatrizensysteme sind dabei unterschiedlich dargestellt (voller Strichzug und eingekreiselte Punkte). Die räumliche Konfiguration dieser Flächen ist gut sichtbar.

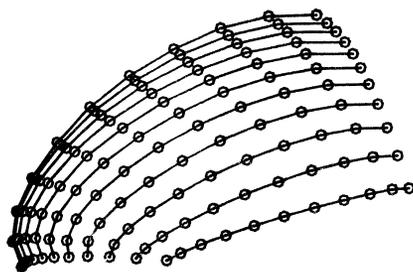


Abb. 4

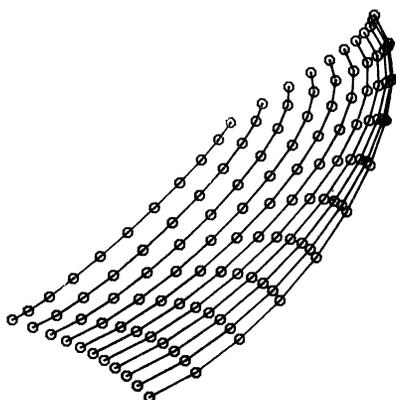


Abb. 5

*Literaturverzeichnis*

- [1] *J. Matušů, J. Novák*: Über ein Interpolationsproblem, *Aplikace matematiky* 2, 1976.  
 [2] *P. Bézier*: *Numerical Control — Mathematics and Applications*. John Wiley & Sons, London—New York—Sydney—Toronto.

Souhrn

O JEDNÉ ELEMENTÁRNÍ PLOŠE

JOSEF MATUŠŮ, JOSEF NOVÁK

Vlastnosti křivkového oblouku, konstruovaného v práci [1], se v četných konkrétních aplikacích projevily jako velmi dobré. V této práci se proto konstruuje elementární plocha takovým způsobem, aby její hlavní vytvářející křivky měly vlastnosti tohoto křivkového oblouku.

*Adressen der Autoren*: Doc. Dr. *Josef Matušů*, CSc., ČVUT, Karlovo nám. 13, 121 35 Praha 2; Dr. *Josef Novák*, CSc., ČVUT, Horská ul. 4, 121 35 Praha 2.