Aplikace matematiky

Christian P. Ullrich

Über schwach zyklische Abbildungen in nichtlinearen Produkträumen und einige Monotonieaussagen

Aplikace matematiky, Vol. 24 (1979), No. 3, 209–234

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103798`

ÜBER SCHWACH ZYKLISCHE ABBILDUNGEN IN NICHTLINEAREN PRODUKTRÄUMEN UND EINIGE MONOTONIEAUSSAGEN

CHRISTIAN ULLRICH

(Eingegangen 7. Juni 1977)

1. EINLEITUNG

Numerische Algorithmen werden grundsätzlich in einem über der endlichen Menge der Maschinenzahlen aufgebauten Raum durchgeführt. Den hierbei auftretenden Räumen fehlt eine Reihe mathematischer Eigenschaften gegenüber den Strukturen, in welchen man sonst zu denken und zu arbeiten gewohnt ist. Die Abschwächung der Strukturen liegt im wesentlichen bei den algebraischen und insbesondere bei den topologischen Eigenschaften sowie den betreffenden Verträglichkeitseigenschaften, während die Verbandsstruktur jeweils erhalten bleibt ([5]). Die Untersuchung von Algorithmen in den tatsächlich für die Rechnung vorliegenden Räumen wird man daher naturgemäß auf den Nachweis von Eigenschaften bezüglich dieser Struktur, d. h. von Monotonieaussagen konzentrieren.

Die vorliegende Arbeit behandelt diesen Fragenkreis an einer Reihe von Iterationsverfahren für die Klasse schwach zyklischer Abbildungen des n-fachen Produkts R^n über einem Ringoid $\{R, +, \cdot\}$. In endlich-dimensionalen linearen Räumen findet man die Definition schwach zyklischer Abbildungen eingeführt für die Menge der linearen Selbstabbildungen, welche dort bekanntlich durch die quadratischen Matrizen beschrieben werden. Der Grund für die Betrachtung von linearen Abbildungen dieses Typs, d. h. von schwach zyklischen Matrizen, war deren Auftreten bei der Diskretisierung partieller Differentialgleichungen. Löst man z. B. das Dirichlet'sche Randwertproblem

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$$

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma,$$

wobei Γ den Rand des Einheitsquadrats darstellt, so lassen sich bei Einführung eines Gitters im Einheitsquadrat nach vorgenommener Diskretisierung und Linearisierung

Näherungen u_i für die Funktion $u(x, y)$ an den inneren Gitterpunkten unmittelbar aus dem Gleichungssystem $A \cdot u = k$ berechnen; dabei bildet $E - A$ eine schwach zyklische Matrix vom Index 2.

Nun bilden schwach zyklische Matrizen nicht nur ihrer äußeren Form nach eine spezielle Klasse der quadratischen Matrizen, sondern sie zeichnen sich auch durch Aussagen über ihre Eigenwerte aus. So besitzt eine schwach zyklische Matrix A vom Index k genau k Eigenwerte vom Betrag $\varrho(A)$ (Spektralradius von A).

Darüber hinaus geht bei Drehungen der komplexen Ebene um den Ursprung mit dem Winkel $2\pi/k$ (aber keinen kleineren) die Menge der Eigenwerte in sich über ([9]).

Diese speziellen Eigenschaften schwach zyklischer Matrizen gehen verloren, wenn wir diese als Abbildungen des nichtlinearen Produktraumes R^n interpretieren, so daß es naheliegt, von vorneherein für die Gewinnung von Monotonieaussagen schwach zyklische Abbildungen als Verallgemeinerung dieser Klasse von Matrizen zu betrachten.

Zu bemerken bleibt noch, daß aufgrund des gesteckten Ziels auf die übliche Einführung einer Ordnung, d. h. einer reflexiven, transitiven und antisymmetrischen Relation, für die Menge R^n der n-Tupel über $\{R, +, \cdot\}$ mittels eines Kegels verzichtet werden muß, da hierzu die in $\{R, +, \cdot\}$ i. a. nicht vorliegende Eigenschaft

$$\bigwedge_{a,b,c \in R} (a - b) + (b - c) = a - c$$

benötigt wird. Wir setzen daher in R eine Ordnungsrelation $\leqq$ voraus und betrachten in R^n die komponentenweise eingeführte Relation $\leqq_I$ mit $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, welche die Ordnung $\leqq$ in den durch die Indexmenge I bezeichneten Komponenten in der natürlichen Weise und in den restlichen Komponenten die zu $\leqq$ duale Ordnung $\geqq$ verwendet. Diese Darstellung beinhaltet neben der kanonischen Ordnung $\leqq$ in R^n weitere $2^n - 1$ Ordnungsrelationen und erscheint im Hinblick auf das ins Auge gefaßte Ziel angemessen.

Durch die Verwendung der allgemeineren Ordnung $\{R^n, \leqq_I\}$ wird jedoch wiederum die Entscheidung erschwert, ob eine vorgesehene $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in R$ für $i, j = 1(1)\, n$, einen isotonen bzw. antitonen Operator in R^n bildet. Wir werden daher zunächst im folgenden Abschnitt ein allgemeines Kriterium für solche Matrizen angeben.

2. EINIGE GRUNDLEGENDE BEGRIFFE UND EIGENSCHAFTEN

Wir bezeichnen mit $\{M, \leqq\}$ eine „geordnete Menge", falls $\leqq$ eine zweistellige Relation für Elemente von M mit den Eigenschaften der Reflexivität, Transitivität und Antisymmetrie bildet. Die in M durch die Beziehung

$$x \geqq y :\Leftrightarrow y \leqq x$$

definierte Relation $\geqq$, welche offensichtlich wieder eine Ordnung ist, nennen wir „duale Relation zu $\leqq$“ (i. Z. $d(\leqq)$). Gilt zusätzlich die Eigenschaft

$$\bigwedge_{a,b\in M} a \leqq b \vee b \geqq a\,,$$

so heißt $\{M, \leqq\}$ „linear geordnet“.

Sei nun $\{M, \leqq\}$ eine geordnete Menge und

$$M^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \mid x_i \in M,\ i = 1(1)\,n\}$$

das n-fache direkte Produkt über M. In natürlicher Weise wird in M^n eine Ordnungsrelation $\leqq$ mittels

$$X \leqq Y :\Leftrightarrow \bigwedge_{i=1(1)n} x_i \leqq y_i\,, \quad X = (x_i)\,, \quad Y = (y_i) \in M^n$$

erklärt. Neben dieser Ordnung ist die Definition weiterer $2^n - 1$ Ordnungsrelationen in M^n möglich. Wir bezeichnen hierzu mit $N := \{1, 2, \ldots, n\}$ die Indexmenge und mit I eine Teilmenge von N. Gemäß [2] legen wir dann fest:

Definition 1. *Es sei $\{M, \leqq\}$ eine geordnete Menge und I eine Teilmenge von N. Dann definieren wir in M^n eine Relation $\leqq_I$ durch*

$$X \leqq_I Y :\Leftrightarrow \big(\bigwedge_{i\in I} x_i \leqq y_i \wedge \bigwedge_{i\in N\setminus I} x_i \geqq y_i\big)\,. \quad \square$$

Aufgrund der Gültigkeit in jeder Komponente bildet jede Relation $\leqq_I$ eine Ordnungsrelation. Für $I = N$ erhält man speziell die kanonische Ordnung $\leqq$ und für $I = \emptyset$ die hierzu duale $\geqq$. Insbesondere läßt sich bei zugrunde liegender linear geordneter Menge $\{M, \leqq\}$ für je zwei Elemente $X, Y \in M^n$ mindestens eine Ordnungsrelation $\leqq_{I'}$, angeben, so daß gilt $X \leqq_{I'} Y$. Man wähle nur $I' := \{i \in N \mid x_i \leqq y_i\}$. Ganz allgemein erhält man die zur Ordnungsrelation $\leqq_I$ duale Relation $d(\leqq_I)$ durch $\leqq_{N/I}$, wie man sich leicht überlegt.

Alle im folgenden auftretenden weiteren verbandstheoretischen Ausdrücke folgen der üblichen Begriffsbildung. Für unseren Gebrauch zusammengestellt findet man sie auch in [5].

Den Begriff der monotonen Abbildung führen wir in der üblichen Weise ein:

Definition 2. *Es seien $\{M_i, \leqq_i\}$, $i = 1, 2$ geordnete Mengen. Eine Abbildung $F : M_1 \to M_2$ heißt „isoton“ bzw. „antiton“, wenn gilt*

$$\bigwedge_{x,y\in M_1} (x \leqq_1 y \Rightarrow Fx \leqq_2 Fy)$$

bzw.

$$\bigwedge_{x,y\in M_1} (x \leqq_1 y \Rightarrow Fx \geqq_2 Fy)\,.$$

Eine Abbildung $F : M \to N$ heißt „monoton", wenn sie entweder isoton oder antiton ist. $\square$

Bemerkung. Offensichtlich ist ein isotoner Operator von $\{M_1, \leqq_1\}$ in $\{M_2, \leqq_2\}$ auch isoton bezüglich der dualen Ordnungen $\geqq_1$, $\geqq_2$.

In [5] wird nachgewiesen, daß die algebraischen und Ordnungseigenschaften einer Rechnerarithmetik sinnvollerweise die Struktur des vollständig linear geordneten Divisionsringoides $\{R, N, +, \cdot, /, \leqq\}$ erfüllen müssen. Die Menge V_nR der Vektoren bzw. M_nR der $n \times n$-Matrizen über $\{R, N, +, \cdot, /, \leqq\}$ bilden dann mit der kanonischen Ordnung $\leqq$ und den üblichen Verknüpfungen wiederum ein vollständig geordnetes Vektoid $\{V_nR, R, \leqq\}$ bzw. ein vollständig geordnetes Ringoid $\{M_nR, +, \cdot, \leqq\}$ (siehe etwa [8]). Für die gemäß Definition 2.1 eingeführten Ordnungen wird in [2] der folgende Sachverhalt nachgewiesen:

Satz 3. *Es sei $\{R, +, \cdot, \leqq\}$ ein geordnetes Ringoid mit den ausgezeichneten Elementen $\{-e, o, e\}$. Dann ist $\{V_nR, R, \leqq_I\}$ ein geordnetes R-Vektoid und $\{V_nR, M_nR, \leqq_I\}$ ein geordnetes M_nR-Vektoid, falls die Ordnung $\{M_nR, \leqq_I\}$ in der folgenden Weise erklärt ist:*

$$A \leqq_I B :\Leftrightarrow \Big(\bigwedge_{(i,j)\in I^2 \cup (N\setminus I)^2} a_{ij} \leqq b_{ij} \wedge \bigwedge_{(i,j)\in I\times(N\setminus I)\cup(N\setminus I)\times I} a_{ij} \geqq b_{ij} \Big)$$

mit $A, B \in M_nR$ und $I \subseteq N$. $\square$

Zur Erläuterung sei noch vermerkt, daß eine Matrix $A \geqq_I O$ dann durch die folgenden Eigenschaften (P1) bis (P4) gekennzeichnet ist:

(P1) A ist vorzeichensymmetrisch, d. h. $\bigwedge_{i,j\in N} (a_{ij}Ro \Rightarrow a_{ji}Ro)$, $R \in \{\leqq, \geqq\}$.

(P2) Die Zeilen und Spalten aus I bzw. $N \setminus I$ sind komponentenweise vorzeichengleich.

(P3) Die Zeilen bzw. Spalten aus I und $N \setminus I$ sind zueinander vorzeichendual.

(P4) $\bigwedge_{i\in N} a_{ii} \geqq o$.

Satz 4. *Es sei $\{R, +, \cdot, \leqq\}$ ein linear geordnetes Ringoid und $\{V_nR, R, \leqq_{I_n}\}$, $\{V_mR, R, \leqq_{I_m}\}$ zwei geordnete Vektoide über $\{R, +, \cdot, \leqq\}$ mit $I_n \subseteq N$, $I_m \subseteq M$, sowie $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}R$ eine $m \times n$-Matrix. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *A ist eine isotone Abbildung von $\{V_nR, \leqq_{I_n}\}$ in $\{V_mR, \leqq_{I_m}\}$.*
2. *Die durch I_n bzw. $N \setminus I_n$ bestimmten Spaltenvektoren von A sind $\geqq_{I_m} O$ bzw. $\leqq_{I_m} O$.*
3. *Die durch I_m bzw. $M \setminus I_m$ bestimmten Zeilen von A sind als Vektoren $\geqq_{I_n} O$ bzw. $\leqq_{I_n} O$.*

Beweis. 1. → 2.: Es sei A isoton, d. h.

$$\bigwedge_{X,Y\in V_nR} \left(X \leqq_{I_n} Y \Rightarrow AX \leqq_{I_m} AY\right).$$

Da für die Vektoren $E^{(j)} = (\delta_{ij}) \in V_nR$ mit $\delta_{ij} = \begin{cases} e & \text{für } i = j \\ o & \text{sonst} \end{cases}$ die Relationen

$$\bigwedge_{j\in I_n} O \leqq_{I_n} E^{(j)} \quad \text{und} \quad \bigwedge_{j\in N\setminus I_n} E^{(j)} \leqq_{I_n} O$$

gelten, erhalten wir aus der Isotonieeigenschaft von A

$$\bigwedge_{j\in I_n}\left(O \leqq_{I_n} E^{(j)} \Rightarrow O \leqq_{I_m} A\cdot E^{(j)} = \begin{bmatrix} a_{1j}e \\ \vdots \\ a_{mj}e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \bigwedge_{i\in I_m} o \leqq a_{ij} \wedge \\ \bigwedge_{i\in M\setminus I_m} o \geqq a_{ij} \end{cases}\right)$$

und

$$\bigwedge_{j\in N\setminus I_n}\left(E^{(j)} \leqq_{I_n} O \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j}e \\ \vdots \\ a_{mj}e \end{bmatrix} = A\cdot E^{(j)} \leqq_{I_m} O \Leftrightarrow \begin{cases} \bigwedge_{i\in I_m} a_{ij} \leqq o \wedge \\ \bigwedge_{i\in M\setminus I_m} a_{ij} \geqq o \end{cases}\right),$$

d. h. die durch I_n bzw. $N \setminus I_n$ bestimmten Spaltenvektoren von A sind $\geqq_{I_m} O$ bzw. $\leqq_{I_m} O$.

2. → 3. Durch Umschreiben erhält man dann sofort auch

$$\bigwedge_{i\in I_m}\left(\bigwedge_{j\in I_n} o \leqq a_{ij} \wedge \bigwedge_{j\in N\setminus I_n} a_{ij} \leqq o\right)$$

bzw.

$$\bigwedge_{i\in M\setminus I_m}\left(\bigwedge_{j\in I_n} o \geqq a_{ij} \wedge \bigwedge_{j\in N\setminus I_n} a_{ij} \geqq o\right),$$

d. h. die durch I_m bzw. $M \setminus I_m$ bestimmten Zeilen von A sind als Vektoren $\geqq_{I_n} O$ bzw. $\leqq_{I_n} O$.

3. → 1. Der Beweis erfolgt wie in [2]. □

Bemerkung. Der eben bewiesene Satz gibt uns auch die entsprechende Aussage für eine antitone Abbildung von $\{V_nR, \leqq_{I_n}\}$ in $\{V_mR, \leqq_{I_m}\}$, die ja eine isotone Abbildung von $\{V_nR, \leqq_{I_n}\}$ in $\{V_mR, d(\leqq_{I_m})\}$ darstellt. Man beachte bei Anwendung des Satzes, daß die zu $d(\leqq_{I_m})$ gehörige Teilmenge der Indexmenge $M = \{1, \ldots, m\}$ durch $M \setminus I_m$ gegeben ist.

Für quadratische Matrizen erhalten wir unmittelbar das folgende.

Korollar 5. *Es sei $\{R, +, \cdot, \leqq\}$ ein linear geordnetes Ringoid und $\{V_nR, R, \leqq_I\}$ das geordnete R-Vektoid über $\{R, +, \cdot, \leqq\}$ zur Teilmenge I von N.*

Dann ist eine $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ eine isotone (bzw. antitone) Abbildung in V_nR genau dann, wenn $A \geqq_I O$ (bzw. $A \leqq_I O$) ist. □

Zur Auszeichnung spezieller Matrizenklassen bzw. Klassen von Vektorfunktionen in der Menge R^n der n-Tupel über einem Ringoid $\{R, +, \cdot\}$ mit den ausgezeichneten Elementen $\{-e, o, e\}$ verwenden wir im folgenden Permutationsmatrizen.

Definition 6. *Ein Element $P \in M_n R$, welches in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einmal das Element e und sonst nur das Nullelement o enthält, heißt „Permutationsmatrix".* □

Die Anwendung einer Permutationsmatrix P auf einen Vektor $X \in R^n$ ergibt eine Vertauschung der Komponenten x_i von X. Genauer gilt der

Hilfssatz 7. *Eine Permutationsmatrix $P = (p_{ij}) \in M_n R$ und eine Permutation P*[1]) *der Elemente $\{1, 2, \ldots, n\}$ erfüllen genau dann die Eigenschaft*

$$\bigwedge_{i=1(1)n} p_{iP(i)} = e\,, \tag{3.1}$$

falls gilt

$$\bigwedge_{X \in V_n R} PX = (x_{P(i)})\,.$$

Beweis. Die Aussage des Hilfssatzes in der Richtung von links nach rechts erhält man unmittelbar aus der Gleichung $PX = (\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j) = (p_{iPi} x_{Pi}) = (x_{Pi})$. Umgekehrt ist für alle $i = 1(1)\,n$ für den Vektor $Y = (y_j)$ mit $y_j = o$ für $j \neq Pi$ und $y_{Pi} = e$

$$PY = \begin{bmatrix} p_{1Pi} \cdot y_{Pi} \\ \vdots \\ p_{nPi} \cdot y_{Pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{P1} \\ \vdots \\ y_{Pn} \end{bmatrix} \Rightarrow p_{iPi} = e\,. \quad \square$$

Ganz entsprechend bewirkt die Anwendung von P auf eine Matrix $A \in M_n R$ eine P entsprechende Zeilenvertauschung und das Produkt $A \cdot P^{\mathrm{T}}$ mit $P^{\mathrm{T}} = (p^{\mathrm{T}}_{ij})$, $p^{\mathrm{T}}_{ij} := p_{ji}$, $i = 1(1)n$ der Transponierten zu P mit A die gleichlautende Spaltenvertauschung in A. Die Anwendung von P^{T} auf einen Vektor X ergibt dagegen die zu P inverse Komponentenvertauschung in X. Man erhält zu Hilfssatz 7 das folgende

Korollar 8. *Eine Permutationsmatrix $P = (p_{ij}) \in M_n R$ und eine Permutation P der Elemente $\{1, 2, \ldots, n\}$ erfüllen genau dann die Eigenschaft*

$$\bigwedge_{i=1(1)n} p_{iP(i)} = e\,, \tag{3.1}$$

---

[1]) Wir verwenden in des Schreibweise $\mathscr{P}$ sowohl für die Permutationsmatrix, als auch für die zugehörige Permutation, da die Bedeutung grundsätzlich durch die Verwendung geklärt ist.

wenn gilt

$$\bigwedge_{X \in V_n R} P^{\mathsf{T}} X = \left(x_{P^{-1}(i)}\right).$$

Beweis. Die Aussage des Korollars läßt sich wegen

$$\bigwedge_{i=1(1)n} p^{\mathsf{T}}_{iP^{-1}(i)} = p_{P^{-1}(i)i} = p_{jPj} = e \quad \text{mit} \quad P^{-1}i = j$$

unmittelbar aus dem Hilfssatz ablesen. □

Bemerkungen. 1. Wie aus dem Beweis zu dem Korollar ersichtlich, läßt sich Eigenschaft (3.1) auf den Zusammenhang von P^{T} und P^{-1} umschreiben in der Form:

$$\bigwedge_{i=1(1)n} p^{\mathsf{T}}_{iP^{-1}(i)} = e.$$

2. Es ist $P \cdot P^{\mathsf{T}} = P^{\mathsf{T}} \cdot P = E$, was z. B. anhand von

$$p_{ij} \cdot p^{\mathsf{T}}_{jk} = \begin{cases} e \text{ für } j = Pi,\ k = P^{-1}j = i \\ o \text{ sonst} \end{cases}$$

für den ersten Teil der Gleichung unmittelbar einzusehen ist. Entsprechendes gilt für den zweiten Teil.

3. Für Matrizen $A, B \in M_n R$ rechnet man leicht nach:

$$P \cdot (A \cdot B) = (P \cdot A) \cdot B$$
$$(A \cdot B) \cdot P^{\mathsf{T}} = A \cdot (B \cdot P^{\mathsf{T}})$$

4. In Erweiterung von 2. bildet die Menge der Permutationsmatrizen über einem Ringoid $\{R, +, \cdot\}$ bezüglich der im Ringoid $\{M_n R, +, \cdot\}$ erklärten Multiplikation eine Gruppe. Das Produkt zweier Permutationsmatrizen P, P' läßt sich dabei formal schreiben in der Form

$$P \cdot P' = (p_{ij}) \cdot (p)'_{ij} = (p''_{ij}), \quad p''_{ij} = \begin{cases} e \text{ für } j = P'(P(i)), \\ o \text{ sonst} \end{cases}$$

wobei P, P' die den Matrizen P, P' zugehörigen Permutationen gemäß (3.1) bezeichnen.

5. Aufgrund der Bemerkungen 2. und 3. ist unmittelbar klar, daß die Relation

$$A \sim B :\Leftrightarrow \bigvee_{P} A = P \cdot B \cdot P^{\mathsf{T}}$$

eine Äquivalenzrelation definiert.

Sei nun zusätzlich $\{R, \leqq\}$ eine geordnete Menge und $\leqq_I$ die durch die Indexmenge I in R^n festgelegte Ordnungsrelation. Im allgemeinen ist dann eine Permutationsmatrix P keine isotone Abbildung in $\{R^n, \leqq_I\}$. Es gilt jedoch der folgende

Hilfssatz 9. *Es sei* $\{R, +, \cdot\}$ *ein Ringoid,* $\{R, \leqq\}$ *eine geordnete Menge und* $\{R^n, \leqq_I\}$ *die geordnete Menge der n-Tupel über R zur Zerlegung* $I, N \setminus I$. *Weiter sei* $P = (p_{ij})$ *eine* $n \times n$*-Permutationsmatrix und P die mittels der Eigenschaft*

$$\bigwedge_{i=1(1)n} p_{iPi} = e$$

definierte Permutation der Elemente $1, \ldots, n$. *Dann gilt*

$$\bigwedge_{X,Y \in R^n} (X \leqq_I Y \Leftrightarrow PX \leqq_{P^{-1}I} PY),$$

d. h. P ist ein Ordnungsisomorphismus von $\{R^n, \leqq_I\}$ *auf* $\{R^n, \leqq_{P^{-1}I}\}$.

Beweis. Es gilt mit $P^{-1}(N \setminus I) = N \setminus P^{-1}I$

$$\begin{aligned} X \leqq_I X &\Leftrightarrow (\bigwedge_{i \in I} x_i \leqq y_i \wedge \bigwedge_{i \in N \setminus I} x_i \geqq y_i) \\ &\Leftrightarrow (\bigwedge_{Pj \in I} x_{Pj} \leqq y_{Pj} \wedge \bigwedge_{Pj \in N \setminus I} x_{Pj} \geqq y_{Pj}) \\ &\Leftrightarrow (\bigwedge_{j \in P^{-1}I} x_{Pj} \leqq y_{Pj} \wedge \bigwedge_{j \in P^{-1}(N \setminus I)} x_{Pj} \geqq y_{Pj}) \\ &\Leftrightarrow PX \leqq_{P^{-1}I} PY. \quad \square \end{aligned}$$

Die Äquivalenz in Hilfssatz 9 läßt sich auch in der Form

$$\bigwedge_{X,Y \in R^n} (X \leqq_{PI} Y \Leftrightarrow PX \leqq_I PY).$$

angeben. Ferner läßt sich aufgrund dieser Aussage sehr leicht entscheiden, wann eine Permutationsmatrix eine isotone (bzw. antitone) Abbildung in $\{R^n, \leqq_I\}$ darstellt. Dies ist nämlich genau dann der Fall, wenn für die zugehörige Permutation $PI = I$ (bzw. $PI = N \setminus I$) gilt. Man vergleiche hierzu das Korollar zu Satz 4.

4. SCHWACH ZYKLISCHE VEKTORFUNKTIONEN

Es sei M^n die Menge der n-Tupel über einer Menge M und $F(X) \equiv (f_i(X)) : M_n \to \to M^n$ eine Abbildung in M^n. Durch die k Mengen $N_1, \ldots, N_k$, $N_i \neq \emptyset$ für $i = 1, 2, \ldots, k$, sei eine disjunkte Zerlegung der Indexmenge $N := \{1, 2, \ldots, n\}$ bestimmt. Mit n_i bezeichnen wir die Anzahl der Elemente von N_i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Definition 10. *Eine disjunkte Zerlegung* $\mathcal{N} = \{N_1, N_2, \ldots, N_k\}$ *von N heißt „sequentiell", falls die Teilmengen* $N_i \subseteq N$ *von der Form*

$$N_i = \{r_{i-1} + 1, r_i + 2, \ldots, r_i\}, \quad i = 1(1)\,k,$$

mit $r_0 := 0$ *und* $r_i := \sum_{j=1}^{i} n_j$ *sind.* $\square$

$M^{n_1} \times M^{n_2} \times \ldots \times M^{nk}$ sei die zu einer sequentiellen Zerlegung $\mathcal{N}$ von N gehörige Zerlegung von M^n in das kartesische Produkt der Räume M^{n_i} der n_i-Tupel über M. Zu jedem Element $X \in M^n$ werde durch X_i das der Menge M^{n_i} zugehörige n_i-Tupel von X und die F entsprechende Abbildung durch $F_i(X) : M^n \to M^{n_i}$ beschrieben.

Zu einer beliebigen disjunkten Zerlegung $\mathcal{N}$ von N existieren insgesamt

$$\sum_{i=1}^{k} n_i!$$

Permutationen der Elemente der Menge N, die jeder Menge $\bar{N}_i$ der sequentiellen Zerlegung $\bar{N}_1, \ldots, \bar{N}_k$ von N mit $\# \bar{N}_i = n_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ die Menge N_i als Bild zuordnen. Durch die Forderung

$$\bigwedge_{r,s \in \bar{N}_i} (r \leqq s \Rightarrow \bar{P}r \leqq \bar{P}s) , \quad i = 1, 2, \ldots, k ,$$

läßt sich z. B. in eindeutiger Weise eine solche Permutation $\bar{P}$ auszeichnen. Die zu N_i gehörigen Komponenten eines n-Tupels $X = (x_j)$ erhalten wir dann in aufsteigender Reihenfolge der Indizes durch das n_i-Tupel $(x_{\bar{P}j})_i$.

Legt man ein Ringoid $\{R, +, \cdot\}$ zugrunde, so wird entsprechend für ein Element $X \in R^n$ das n-Tupel $(x_{\bar{P}j})$ gemäß Hilfssatz 7 beschrieben durch $\bar{P}X$, wobei $\bar{P} = (_{\bar{p}ij})$ die durch

$$\bigwedge_{i=1(1)n} \bar{p}_{i\bar{P}i} = e$$

zur Permutation $\bar{P}$ definierte $n \times n$-Permutationsmatrix darstellt. Zur besseren Übersicht schreiben wir statt $(x_{\bar{P}j})_i$ bzw. $(\bar{P}X)_i$ jedoch meist X_{N_i} und entsprechend F_{N_i} bei Abbildungen.

Sei nun $f_i(X)$ eine Komponentenfunktion von $F(X) : R^n \to R^n$ und $\bar{N}_1, \ldots, \bar{N}_k$ eine sequentielle Zerlegung von N. Falls $f_i(X)$ mit der Einschränkung $f_i(O, \ldots, O, X_j, O, \ldots, O)$ auf eine Teilmenge von R^n, welche man durch die Einbettung von R^{n_j} in R^n mittels der Zuordnung $X \to (O, \ldots, O, X_j, O, \ldots, O)$ erhält, übereinstimmt[1]), schreiben wir auch kurz $f_i(X_j)$ und interpretieren f_i gegebenenfalls auch als Abbildung von R^{n_j} in R. Entsprechend wollen wir unter $f_i(X_{N_j})$ diejenige Abbildung von R^{n_j} in R verstehen, die man durch die Einbettung von R^{n_j} in R^n, Permutation der Komponenten gemäß $\bar{P}^{-1}$ und Anwendung von f_i erhält.

Beispiel. Für $n = 6$ sei die Zerlegung $N_1 = \{3, 5\}$, $N_2 = \{1, 4, 6\}$, $N_3 = \{2\}$ von N gegeben. Die Permutation $\bar{P}$, welche die zugehörige sequentielle Zerlegung $\bar{N}_1 = \{1, 2\}$, $\bar{N}_2 = \{3, 4, 5\}$, $\bar{N}_3 = \{6\}$ in N_1, N_2, N_3 überführt, ist durch

$$\begin{aligned} &\bar{P}1 = 3 , \quad \bar{P}2 = 5 , \\ &\bar{P}3 = 1 , \quad \bar{P}4 = 4 , \quad \bar{P}5 = 6 , \\ &\bar{P}6 = 2 \end{aligned}$$

---

[1]) Genauer: falls in $f_i(X)$ nur die Komponenten von X_j auftreten.

gegeben. Damit ist

$$(\bar{P}X) = (x_{Pj}) = (x_3, x_5, x_1, x_4, x_6, x_2)^{\mathsf{T}}$$

und wir verstehen z. B. unter der Funktion $f_i(X_{N_2})$ eine Abbildung von R^3 in R gegeben durch

$$f_i(X_{N_2}) := f_i(\bar{P}^{\mathsf{T}}(o, o, x_1, x_2, x_3, o)^{\mathsf{T}}) = f_i(x_1, o, o, x_2, o, x_3)\,.$$

Die Definition der schwachen Zyklizität für $n \times n$-Matrizen läßt sich nun in natürlicher Weise auf Vektorfunktionen erweitern:

Definition 11. *Es sei $\{R, +, \cdot\}$ ein Ringoid und $F = (f_i) : B \subseteq R^n \to R^n$ eine Vektorfunktion, die B in R^n abbildet. F heißt „schwach zyklisch vom Index k", falls eine $n \times n$-Permutationsmatrix P existiert derart, daß gilt*

$$PF(P^{\mathsf{T}}X) = \begin{bmatrix} \hat{F}_1(X_k) \\ \hat{F}_2(X_1) \\ \vdots \\ \hat{F}_i(X_{i-1}) \\ \vdots \\ \hat{F}_k(X_{k-1}) \end{bmatrix},$$

wobei $\hat{F}_i$ und X_i, $i = 1, \ldots, k$, jeweils die selbe Anzahl von Komponenten besitzen. Ist P die Einheitsmatrix, so bezeichnen wir die schwach zyklische Vektorfunktion F vom Index k als in Normalform gegeben. □

Die vorliegende Definition ist nicht der erste Versuch zur Verallgemeinerung des Konzepts schwach zyklischer Matrizen auf Vektorfunktionen. In [3] finden wir diesen Begriff in einer Weise festgelegt, welche von Permutationsmatrizen keinen Gebrauch macht. Wir wollen nun die Äquivalenz der beiden Definitionen nachweisen:

Satz 12. *Es ist $F = (f_i) : B \subseteq R^n \to R^n$ eine schwach zyklische Vektorfunktion vom Index k genau dann, wenn eine disjunkte Zerlegung $N_1, N_2, \ldots, N_k$ von N existiert und für eine zyklische Permutation P der Menge $\{1, \ldots, k\}$ gilt*

$$F_{N_i} = F_{N_i}(X_{N_{Pi}})\,, \quad i = 1(1)\,k\,.$$

Beweis. 1. Sei zunächst F eine schwach zyklische Vektorfunktion vom Index k, die mittels der $n \times n$-Permutationsmatrix P auf Normalform transformiert wird. Da die Anwendung von P auf einen Vektor $X = (x_i)$ eine Permutation P der Komponenten von X und die Anwendung ihrer Transponierten P^{T} deren Umkehrung P^{-1}

$$PX = (x_{Pi}) =: (\bar{x}_i)\,, \quad P^{\mathsf{T}}X = (x_{P^{-1}i}) =: (\bar{\bar{x}}_i)$$

ergibt, erhalten wir

$$(*) \qquad PF(P^{\mathsf{T}}X) = (\bar{f}_i(\bar{\bar{x}}_1, \ldots, \bar{\bar{x}}_n) = (f_{Pi}(x_{P^{-1}1}, \ldots, x_{P^{-1}n}))\,.$$

Nach Voraussetzung existiert eine sequentielle Zerlegung $\bar{N}_1, \ldots, \bar{N}_k$ von N, so daß mit der zyklischen Permutation

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k \\ k & 1 & 2 & \ldots & k-1 \end{bmatrix}$$

der Indizes $1, 2, \ldots, k$ gilt

$$(PF(P^\mathsf{T} X))_{\bar{N}_i} = \bar{F}_{\bar{N}_i}(X_{\bar{N}_{Z(i)}}) \,, \quad i = 1(1)\,k \,.$$

Definieren wir nun $N_i := P\bar{N}_i = \{Pt \mid t \in \bar{N}_i\}$, $i = 1(1)\,k$, so stellt $N_1, \ldots, N_k$ wiederum eine disjunkte Zerlegung von N dar, denn P ist eine Permutation der Elemente von N. Für die Indexbereiche N_i ist also wegen $(*)$

$$PF(P^\mathsf{T} X)_{\bar{N}_i} = (f_{Pj}(P^\mathsf{T} X))_{\bar{N}_i} = (F(P^\mathsf{T} X))_{N_i} = F_{N_i}(X_{N_{Zi}}) \,, \quad i = 1(1)\,k \,,$$

mit $j \in \bar{N}_i \Rightarrow Pj \in P\bar{N}_i = N_i$.

Durch $X := PX$ eliminieren wir P^T auf der linken Seite und erhalten für alle $i = 1(1)\,k$

$$\begin{aligned}(F(X))_{N_i} = F_{N_i}(X) = F_{N_i}((PX)_{\bar{N}_{Zi}}) = F_{N_i}((x_{Pj})_{\bar{N}_{Zi}}) = \\ = F_{N_i}(X_{P\bar{N}_{Zi}}) = F_{N_i}(X_{N_{Zi}})\end{aligned}$$

wegen $j \in N_{Zi} \Leftrightarrow Pj \in P\bar{N}_{Zi} = N_{Zi}$.

2. Sei umgekehrt $N_1, \ldots, N_k$ eine disjunkte Zerlegung von N, so daß für eine zyklische Permutation P der Menge $\{1, \ldots, k\}$ gilt

$$\binom{*}{*} \qquad F_{N_i} = F_{N_i}(X_{N_{P(i)}}) \,, \quad i = 1(1)\,k \,.$$

Für die Indexmenge $N_1, \ldots, N_k$ wählen wir neue Bezeichnungen durch die Festlegung

$$N'_{k-i} := N_{P^i(k)} \,, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1 \,,$$

womit sich $\binom{*}{*}$ offenbar in der Form

$$F_{N_i'} = F_{N_i'}(X_{N'_{Z(i)}}) \,, \quad i = 1(1)\,k$$

mit der zyklischen Permutation $Z = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k \\ k & 1 & 2 & \ldots & (k-1) \end{bmatrix}$ ausdrücken läßt. Sei nun P' eine Permutation der Elemente $1, 2, \ldots, n$ derart, daß mit $r_i := \# N'_i$ und $\bar{r}_0 := 0$, $\bar{r}_i := \sum_{j=1}^{i} r_i$, $i = 1(1)\,n$ gilt

$$P'N'_i = \{\bar{r}_{i-1} + 1, \bar{r}_i + 2, \ldots, \bar{r}\} =: \bar{N} \,,$$

und $P^\mathsf{T} = (p^\mathsf{T}_{ij})$ die $n \times n$-Permutationsmatrix mit

$$\bigwedge_{i=1(1)n} p^\mathsf{T}_{iP'i} = e \,,$$

d. h. diejenige Permutationsmatrix, die bei Anwendung auf einen Vektor die der Permutation P' entsprechende Komponentenvertauschung bewirkt. Die Behauptung erhalten wir nun unmittelbar durch Nachrechnen wegen $j \in N'_{Z(i)} \Leftrightarrow P'j \in P'N'_{Z(i)} = \overline{N}_{Z(i)}$ aus

$$F_{N_i'}P^{\mathrm{T}}(X) = F_{N_i'}((P^{\mathrm{T}}(X))_{N'_{Z(i)}}) = F_{N_i'}((x_{P'j})_{N'_{Z(i)}}) = F_{N_i'}(X_{P'N'_{Z(i)}}) = F_{N_i'}(X_{\overline{N}_{Z(i)}})$$

durch Anwendung von P

$$\hat{F}_{\overline{N}_i} := (PF(P^{\mathrm{T}}(X)))_{\overline{N}_i} = (F(P^{\mathrm{T}}(X))_{P'^{-1}j})_{P'N_i'} = (F(P^{\mathrm{T}}(X)))_{N_i'} = F_{N_i'}(X_{\overline{N}_{Z(i)}}) = \\ = \hat{F}_{\overline{N}_i}(X_{\overline{N}_{Z(i)}}),$$

da die $P'^{-1}j$ mit $j \in P'N_i'$ sich unmittelbar als die Elemente von $P'^{-1}(P'N_i') = N_i'$ ergeben. □

Die schwach zyklischen Vektorfunktionen vom Index k bilden eine Teilmenge einer allgemeineren Klasse von Vektorfunktionen, die wir in der folgenden Weise beschreiben wollen:

Definition 13. *Es sei $\{R, +, \cdot\}$ ein Ringoid und $F = (f_i) : B \subseteq R^n \to R^n$ eine Vektorfunktion, die B in R^n abbildet. F heißt „$(k_1, \ldots, k_r)$-schwach zyklisch", falls eine $n \times n$-Permutationsmatrix P existiert derart, daß gilt*

$$PF(P^{\mathrm{T}}X) = \begin{pmatrix} \hat{F}_1(X_1) \\ \hat{F}_2(X_2) \\ \vdots \\ \hat{F}_r(X_r) \end{pmatrix},$$

wobei die $\hat{F}_i$ und X_i jeweils die selbe Anzahl von Komponenten besitzen und die $\hat{F}_i$, $i = 1, \ldots, r$, aufgefaßt als Abbildungen von R^{n_i} in R^{n_i}, in Normalform gegebene schwach zyklische Vektorfunktionen vom Index k_i darstellen. □

Wir weisen wiederum die Äquivalenz dieser Definition zu einer für den selben Begriff an anderer Stelle ([3]) gegebenen Festlegung nach.

Satz 14. *Es ist $F = (f_i) : B \subseteq R^n \to R^n$ eine $(k_1, \ldots, k_r)$-schwach zykl. Vektorfunktion genau dann, wenn eine disjunkte Zerlegung $N_1, \ldots, N_k$ mit $k = \sum_{i=1}^{r} k_i$ und eine Permutation der Elemente $1, \ldots, k$, welche in r zyklische Permutationen von jeweils k_i Elementen zerfällt, existieren, daß gilt*

$$F_{N_i} = F_{N_i}(X_{NP_i}), \quad i = 1(1)\,k.$$

Beweis. 1. Sei F eine $(k_1, \ldots, k_r)$-schw. zykl. Vektorfunktion. Nach Voraussetzung existiert mit $k = \sum_{i=1}^{r} k_i$ eine sequentielle Zerlegung $\overline{N}_1, \ldots, \overline{N}_k$ von N, so daß mit der Permutation

$$RZ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & \bar{k}_1 & \bar{k}_1 + 1 & \dots\dots\dots & \dots & \bar{k}_r \\ \bar{k}_1 & 1 & 2 & \dots & \bar{k}_1 - 1 & \bar{k}_2 & \bar{k}_1 + 1 & \dots & \bar{k}_r - 1 \end{bmatrix}$$

der Indizes $1, 2, \dots, k$ mit $\bar{k}_i = \sum_{l=1}^{i} k_l$, $i = 1, \dots, r$ gilt

$$PF(P^{\mathrm{T}}X)_{N_i} = \bar{F}_{\bar{N}_i}(X_{\bar{N}_{RZ(i)}}), \quad i = 1(1)\,k\,.$$

Analog dem Beweis für den Fall der schwach zyklischen Vektorfunktion vom Index k, erhält man

$$(F(X))_{N_i} = F_{N_i}(X_{N_{RZ(i)}})\,.$$

2. Sei umgekehrt $N_1, \dots, N_k$ eine disjunkte Zerlegung von N, so daß für eine Permutation P der Menge $\{1, \dots, k\}$, welche in r zyklische Permutationen von jeweils k_i, $i = 1, 2, \dots, r$ Elementen zerfällt, gilt

$$F_{N_i} = F_{N_i}(X_{N_{Pi}}), \quad i = 1(1)\,k\,.$$

Wir benennen die Indexmengen $N_1, \dots, N_k$ nun dadurch um, daß wir die k_i Elemente, die durch P zyklisch vertauscht werden, jeweils in der Menge K_i zusammenfassen und festlegen

$$N'_{\bar{k}_i - j} := N_{P^j(\max K_i)}, \quad j = 0, 1, \dots, k_i - 1, \ i = 1, 2, \dots, r\,,$$

mit $\bar{k}_i := \sum_{l=1}^{i} k_l$. Damit erhält man mittels der Permutation RZ die Abhängigkeiten

$$F_{N_i'} = F_{N_i'}(X_{N'_{RZ(i)}}), \quad i = 1(1)\,k\,.$$

Der Schluß des Beweises verläuft nun analog zum 2. Teil des Beweises im Fall schwach zyklischer Vektorfunktionen. □

5. MONOTONIEAUSSAGEN

Für schwach zyklische Vektorfunktionen ist es nun in gewissen Fällen möglich, die Isotonie einer bestimmten Potenz von F zu zeigen, obwohl diese Eigenschaft für F selbst nicht zutrifft. Wir erhalten den

Satz 15. *Es sei $\{R, +, \cdot\}$ ein Ringoid, $\{R, \leqq\}$ eine geordnete Menge und $F = (f_i) : B \subseteq R^n \to R^n$ eine schwach zyklische Vektorfunktion vom Index k der geordneten Menge $\{R^n, \leqq_I\}$. F werde durch die $n \times n$-Permutationsmatrix P auf die zur sequentiellen Zerlegung $N_1, \dots, N_k$ gehörige Normalform transformiert und für alle Indizes $i \in IS \subseteq K := \{1, 2, \dots, k\}$ $(i \in K \setminus IS)$ sei $\hat{F}_i$ eine isotone (bzw. antitone) Abbildung von $\{R^{n_{Z^i}}, \leqq_{P^{-1}I}\}$ in $\{R^{n_i}, \leqq_{P^{-1}I}\}$ mit der zyklischen Permutation* $Z := \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & & k \\ k & 1 & 2 & \dots & k-1 \end{bmatrix}$.

Dann ist F^k isoton, falls $\#(K \setminus IS)$ gerade, sonst antiton.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine $n \times n$-Permutationsmatrix P, die F auf die Normalform einer schwach zyklischen Vektorfunktion vom Index k transformiert. Für die k-fache Anwendung von F auf ein Element $X \in R^n$ erhalten wir also

$$\begin{aligned} F^k(X) &= P^{\mathrm{T}} \underbrace{PF(P^{\mathrm{T}}PF(\ldots(P^{\mathrm{T}}PF(P^{\mathrm{T}}}_{k\text{-mal}} PX)\ldots) \\ &= P^{\mathrm{T}}(P \cdot F \cdot P^{\mathrm{T}})^k (PX) = \\ &= P^{\mathrm{T}}(\hat{F}_i(\hat{F}_{Zi}(\ldots(\hat{F}_{Z^{k-1}i}((PX)_{Z^k i})\ldots) \\ &= P^{\mathrm{T}}(\prod_{j=0}^{k-1} \hat{F}_{Z^j i}((PX)_i)) . \end{aligned}$$

Die Monotonie von F^k ergibt sich nun unmittelbar durch

$$\begin{aligned} X \leqq_I Y \underset{\text{HS.9}}{\Rightarrow} (PX)_i \leqq_{P^{-1}I} (PY)_i , \quad i = 1, 2, \ldots, k \\ \Rightarrow \prod_{j=0}^{k-1} \hat{F}_{Z^j i}((PX)_i) \underset{(\text{bzw.} \geqq_{P^{-1}I})}{\leqq_{P^{-1}I}} \prod_{j=0}^{k-1} \hat{F}_{Z^j i}((PY)_i) , \quad i = 1, 2, \ldots, k , \end{aligned}$$

falls $\#(K \setminus IS)$ gerade (bzw. ungerade)

$$\Rightarrow F^k(X) \underset{(\text{bzw.} \geqq_I)}{\leqq_I} F^k(Y) \text{ mit } P(P^{-1}I) = I \text{ nach Hilfssatz 9} . \quad \square$$

In Satz 15 werden Monotonieeigenschaften für die Abschnittsfunktionen F_i der Normalform von F gefordert. Diese Voraussetzung läßt sich ohne weiteres in Monotonieforderungen an die Komponentenfunktionen von F umformen.

Satz 16. *Es sei $\{R, +, \cdot\}$ ein Ringoid, $\{R, \leqq\}$ eine geordnete Menge und $F = (f_i) : B \subseteq R^n \to R^n$ eine schwach zyklische Vektorfunktion vom Index k der geordneten Menge $\{R^n, \leqq_I\}$. F werde durch die $n \times n$-Permutationsmatrix auf die zur sequentiellen Zerlegung $N_1, \ldots, N_k$ gehörige Normalform $\hat{F}$ gebracht und IS sei eine Teilmenge von $K := \{1, \ldots, k\}$. Dann gilt*

$$\bigwedge_{\substack{i \in IS \\ (\text{bzw.} K \setminus IS)}} \Big(\bigwedge_{l \in PN_i \cap I} f_l(X) \text{ isoton (bzw. antiton)} \wedge \bigwedge_{l \in PN_i \cap (N \setminus I)} f_l(X) \text{ antiton (bzw. isoton)}$$

genau dann, wenn für alle $i \in IS$ (bzw. $i \in K \setminus IS$) $\hat{F}_i$ eine isotone (bzw. antitone) Abbildung von $\{R^{n_{Zi}}, \leqq_{P^{-1}I}\}$ in $\{R^{n_i}, \leqq_{P^{-1}I}\}$ mit der zyklischen Permutation $Z := \begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & & k \\ k & 1 & 2 & .. & k-1 \end{bmatrix}$ ist.

Beweis.

1. Für $X, Y \in R^n$ gilt

$$X \leqq_{P^{-1}I} Y \Rightarrow P^\mathsf{T}X \leqq_I P^\mathsf{T}Y$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{\substack{i\in IS \\ (\text{bzw. } K\setminus IS)}} \Big(\bigwedge_{l\in PN_i \cap I} f_l(P^\mathsf{T}X) \underset{(\text{bzw. } \geqq)}{\leqq} f_l(P^\mathsf{T}Y) \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{l\in PN_i\cap(N\setminus I)} f_l(P^\mathsf{T}X) \underset{(\text{bzw. } \leqq)}{\geqq} f_l(P^\mathsf{T}Y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{\substack{i\in IS \\ (\text{bzw. } K\setminus IS)}} \Big(\bigwedge_{l\in N_i \cap P^{-1}I} \hat{f}_l(X) = f_{Pl}(P^\mathsf{T}X) \underset{(\text{bzw. } \geqq)}{\leqq} \hat{f}_{Pl}(P^\mathsf{T}Y) = \hat{f}_l(Y) \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{l\in N_i\cap(N\setminus P^{-1}I)} \hat{f}_l(X) = f_{Pl}(P^\mathsf{T}X) \underset{(\text{bzw. } \leqq)}{\geqq} f_{Pl}(P^\mathsf{T}Y) = \hat{f}_l(Y)\Big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{\substack{i\in IS \\ (\text{bzw. } K\setminus IS)}} \hat{F}_i(X_{Zi}) \underset{(\text{bzw. } \geqq_{P^{-1}I})}{\leqq_{P^{-1}I}} \hat{F}_i(Y_{Zi}) .$$

2. Für den Nachweis der Umkehrung fassen wir $\hat{F}_i$ als isotone Abbildung von $\{R^n, \leqq_{P^{-1}I}\}$ in $\{R^{n_i}, \leqq_{P^{-1}I}\}$ auf. Wir erhalten dann

$$X \leqq_I Y \Rightarrow PX \leqq_{P^{-1}I} PY \Rightarrow \bigwedge_{\substack{i\in IS \\ (\text{bzw. } K\setminus IS)}} \hat{F}_i(PX) \underset{(\text{bzw. } \geqq_{P^{-1}I})}{\leqq_{P^{-1}I}} \hat{F}_i(PY) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{\substack{i\in IS \\ (\text{bzw. } K\setminus IS)}} \Big(\bigwedge_{l\in N_i\cap P^{-1}I} \hat{f}_l(PX) = f_{Pl}(P^\mathsf{T}PX) = f_{Pl}(X) \underset{(\text{bzw. } \geqq)}{\leqq} \hat{f}_l(PY) =$$

$$= f_{Pl}(P^\mathsf{T}PY) = f_{Pl}(Y) \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{l\in N_i\cap(N\setminus P^{-1}I)} \hat{f}_l(PX) = f_{Pl}(P^\mathsf{T}PX) = f_{Pl}(X) \underset{(\text{bzw. } \leqq)}{\geqq} \hat{f}_l(PY) =$$

$$= f_{Pl}(P^\mathsf{T}PY) = f_{Pl}(Y)$$

und mit $l \in N_i \cap P^{-1}I \Rightarrow Pl \in PN_i \cap I$ und $l \in N_i \cap (N \setminus P^{-1}I) \Rightarrow Pl \in PN_i \cap \cap (N \setminus I)$ die Behauptung. □

Aus Satz 15 und Satz 16 ergibt sich für $(k_1, \ldots, k_r)$-schw. zykl. Vektorfunktionen die folgende Monotonieaussage.

Satz 17. *Es sei $\{R, +, \cdot\}$ ein Ringoid, $\{R, \leqq\}$ eine geordnete Menge und $F = (f_i) : B \subseteq R^n \to B$ eine $(k_1, \ldots, k_r)$-schw. zykl. Vektorfunktion der geordneten Menge $\{R^n, \leqq_I\}$. F werde durch die $n \times n$-Permutationsmatrix P auf Normalform transformiert, wobei $N_1, \ldots, N_r$ die zur Diagonalform gehörige sequentielle Zerlegung von N darstellt. Weiter sei $N_{i1}, \ldots, N_{ik_i}$ die sequentielle Zerlegung von N_i, $i = 1, \ldots, r$, und es gelte für alle $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, k_i$*

$$\bigwedge_{l\in PN_{ij}\cap I} f_l(X) \text{ isoton (bzw. antiton)} \wedge$$

$$\bigwedge_{l\in PN_{ij}\cap(N\setminus I)} f_l(X) \text{ antiton (bzw. isoton)} .$$

Dann ist F^m isoton mit $m := 2 \cdot$ k. g. V. $(k_1, \ldots, k_r)$.

Beweis. Die m-fache Anwendung von F auf ein Element $X \in R^n$ ergibt

$$\begin{aligned} F^m(X) &= P^{\mathrm{T}}\underbrace{PF(P^{\mathrm{T}}PF(\dots(P^{\mathrm{T}}PF(P}_{m\text{-mal}}{}^{\mathrm{T}}PX)\dots) \\ &= P^{\mathrm{T}}(P \cdot F \cdot P^{\mathrm{T}})^m\,(PX) \\ &= P^{\mathrm{T}}(\hat{F}^m(PX)\,. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist wegen Satz 15 $\hat{F}_i^{2k_i}$ eine isotone Abbildung von $\{R^{n_i}, \leqq_{P^{-1}I}\}$ in sich. Damit gilt

$$\begin{aligned} X \leqq_I Y &\Rightarrow (PX)_i \leqq_{P^{-1}I} (PY)_i\,, \quad i = 1, 2, \dots, r \\ &\Rightarrow \hat{F}_i^{2k_i}((PX)_i) \leqq_{P^{-1}I} \hat{F}_i^{2k_i}((PY)_i)\,, \quad i = 1, 2, \dots, r \\ &\Rightarrow \hat{F}^m(PX) \leqq_{P^{-1}I} \hat{F}^m(PY) \\ &\Rightarrow F^m(X) = P^{\mathrm{T}}\hat{F}^m(PX) \leqq_I P^{\mathrm{T}}\hat{F}^m(PY) = F^m(Y)\,. \quad \square \end{aligned}$$

Mit den in den Sätzen 15, 16 und 17 gegebenen Aussagen lassen sich z. B. unmittelbar über eine zyklische Vektorfunktion F definierte Iterationsverfahren der Form

$$X^{(0)} \in R^n\,, \quad X^{(n+1)} := F(X^{(n)})\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ (Gesamtschrittverfahren)}$$

untersuchen und, wie in [3] für den Spezialfall der schwach zyklischen Matrizen geschehen, möglicherweise auftretende Zyklen der erzeugten Iterationsfolgen erfassen. Für das Einzelschrittverfahren findet man dort jedoch nur Aussagen für den Fall einer in Normalform vorgegebenen schwach zyklischen Matrix. Zur Gewinnung allgemeiner Aussagen führen wir die Schreibweise eines verallgemeinerten Iterationsverfahrens ein, welche gleichzeitig sowohl das Gesamtschritt-, als auch Einzelschrittverfahren sowie eine Klasse chaotischer Relaxationsverfahren beinhaltet. Da das Einzelschrittverfahren wie auch die chaotischen Relaxationsverfahren nur bei in Blockform vorliegender Vektorfunktion sinnvoll sind, gehen wir hier grundsätzlich von einer sequentiellen Zerlegung der Indexmenge aus.

Definition 18. *Es sei $F = (f_i) : B \subseteq R^n \to B$ eine schwach zyklische (bzw. $(k_1, \dots, k_r)$-schw. zykl.) Vektorfunktion vom Index k (bzw. $k = \sum_{i=1}^{r} k_i$) derart, daß zu einer sequentiellen Zerlegung $\mathcal{N} = \{N_1, \dots, N_k\}$ von N die Abhängigkeiten*

$$F_{N_i} = F_{N_i}(X_{NP_i})\,, \quad i = 1(1)\,k\,,$$

erfüllt sind, sowie Z_a eine Teilmenge der Indexmenge $K := \{1, 2, \dots, k\}$. Dann definieren wir ein „Blockiterationsverfahren“ (BIV) von $X^{(0)} \in B$ ausgehend in der folgenden Weise

$$\text{(BIV)} \qquad X_{N_i}^{(n+1)} := \begin{cases} F_{N_i}(X_{NP_i}^{(r)}), & \textit{falls } i \in Z_a\,, \\ F_{N_i}(X_{NP_i}^{(n+1)}), & \textit{sonst} \end{cases} \quad i = 1(1)\,k,\ n = 0, 1, 2, \dots\,. \quad \square$$

Bemerkungen. 1. Damit das Verfahren (BIV) durchführbar ist, müssen wir notwendigerweise $i \in Z_a$ voraussetzen für alle Indizes i mit $Pi > i$, insbesondere also $1 \in Z_a$.

2. Das Blockiterationsverfahren (BIV) stellt offensichtlich für $Z_a = \{1, \ldots, k\}$ das Gesamtschrittverfahren und für $Z_a = \{i \in K \mid Pi > i\}$ das der Zerlegung $\mathcal{N}$ zugeordnete Blockeinzelschrittverfahren dar.

3. Definition 18 erlaubt jedoch neben den beiden eben angeführten Verfahren auch die Berücksichtigung chaotischer Iterationsverfahren. Die ausführliche Beschreibung solcher Verfahren für nichtlineare Gleichungen findet man etwa in [7]. Zur Erläuterung mag hier das folgende Beispiel einer linearen Gleichung genügen:

Es sei $F(X) \equiv AX + B$ für $n = 6$ gegeben durch eine 6×6-Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & a_6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und einen Vektor $B = (b_i) \in R^6$. F ist schwach zyklisch vom Index 6, wobei die zugehärige zyklische Permutation P durch

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

gegeben ist. Dann ist zunächst das Gesamtschrittverfahren durch

$$Z_a := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

und das Einzelschrittverfahren durch

$$Z_a := \{1, 3, 5\}$$

festgelegt. Dagegen entspricht der Durchführung des Iterationsverfahrens mit zwei Parallelprozessoren die Indexmenge

$$Z_a := \{1, 2, 3, 5\},$$

während sich für drei Parallelprozessoren

$$Z_a := \{1, 2, 3, 5, 6\}$$

ergibt. Solche Iterationsverfahren werden in [1] beschrieben durch „periodische Schemata“. Die übrigen Möglichkeiten für die Indexmenge Z_a fügen sich unter das Konzept der reihenparallelen chaotischen Iterationsverfahren (vgl. [7]). So entspricht z. B. das Blockiterationsverfahren (BIV) zur Indexmenge

$$Z_a := \{1, 3, 4, 5\}$$

dem reihenparallelen chaotischen Iterationsverfahren mit der Folge

$$(1, 3, 4, 5)\,, \quad (2, 6)\,, \quad (1, 3, 4, 5)\,, \quad (2, 6)\,, \ldots .$$

Für Monotonieüberlegungen bei solchen Blockiterationsverfahren ist nun interessant, daß alle Komponentenfunktionen nach einer gewissen Anzahl von Iterationsschritten grundsätzlich die gleiche Zusammensetzung aufweisen. Es gilt der

Satz 19. *Gegeben sei eine schwach zyklische Vektorfunktion* $F = (f_i) : B \subseteq \subseteq R^n \to B$ *vom Index* k *mit den in Definition* 18 *vorausgesetzten Eigenschaften, sowie eine Teilmenge* $Z_a \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ *mit* $m := \# Z_a$.

$\{X^{(n)}\}$ *sei die ausgehend von einem Element* $X^{(0)} \in B$ *durch das zu* Z_a *gehörige Blockiterationsverfahren erzeugte Iterationsfolge. Dann gilt*

$$X^{(n+m)} = \Big(\prod_{j=0}^{k-1} F_{N_{P^j i}}(X^{(n)}_{N_i})\Big) = F^k(X^{(n)})\,, \quad n > 0\,.$$

Für die Abschnittsvektoren $X^{(n+m)}_{N_{i'}}$ *mit* $i' = Pi$, $i \in Z_a$ *ist die Aussage auch für* $n = 0$ *richtig.*

Beweis. Zu jedem Element $i \in Z_a$ definieren wir eine Teilmenge $Z_i := \{P^j i \mid j = = 1, 2, \ldots, l,\ P^j i \notin Z_a$ für $j = 1, 2, \ldots, l-1$ und $P^l i \in Z_a\}$ von Z_a. Aufgrund der Zyklizität von P ist $Z_i \neq \emptyset$ für alle $i \in Z_a$ und $Z_i \cap Z_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Damit ist $\# Z_a = \# \{Z_i \mid i \in Z_a\}$ und $\bigcup_{i \in Z_a} Z_i = \{1, 2, \ldots, k\}$. Ein beliebiger Index $j_0 \in \{1, 2, \ldots, k\}$ ist also Element genau einer Menge Z_{i_0}, $i_0 \in Z_a$ und die Potenzen $P^j j_0$, $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, k-1$ durchlaufen die m Mengen Z_i, $i \in Z_a$, in der Reihenfolge

$$Z_{i_0}\,, \quad Z_{P^{z_0} i_0} =: Z_{i_1}\,, Z_{P^{z_0} i_0} =: Z_{i_2}\,, \ldots, Z_{P^{z_{k-1}} i_{k-1}} =: Z_{i_0}$$

mit $z_j := \# Z_{i_j}$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$.

Sei nun $i \in Z_a$. Für den Pi-ten Abschnittsvektor der $(n+m)$-ten Iterierten des Blockiterationsverfahrens erhalten wir dann

$$\begin{aligned} X^{(n+m)}_{N_{Pi}} &= F_{N_{Pi}}(X^{(n+m)}_{N_{P^2 i}}) = F_{N_{Pi}} \circ F_{N_{P^2 i}}(X^{(n+m)}_{N_{P^3 i}}) = \\ &= \ldots = F_{N_{P_i}} \circ F_{N_{P^2 i}} \circ \ldots \circ F_{N_{P^{l-1} i}}(X^{(n+m)}_{N_{P^l i}}) \end{aligned}$$

mit $Pi, P^2 i, \ldots, P^{l-1} i \in Z_i$ und

$$= F_{N_{P_i}} \circ F_{N_{P^2 i}} \circ \ldots \circ F_{N_{P^l i}}(X^{(n+m-1)}_{N_{P^{l+1} i}}) = \prod_{j=1}^{l} F_{N_{P^j i}}(X^{(n+m-1)}_{N_{P^{l+1} i}})\,,$$

da $P^l_i \in Z_a$. Nach den Vorbemerkungen erhält man also nach insgesamt m Schritten mit $Pi = P^{k+1} i$

$$X^{(n+m)}_{N_{Pi}} = \prod_{j=1}^{k} F_{N_{P^j i}}(X^{(n)}_{N_{Pi}})\,.$$

Dies ergibt mit $i' = Pi$ unmittelbar die zweite Aussage des Satzes. Für die Abschnittsvektoren der $(n+1)$-ten Iterierten erhält man allgemein

$$\begin{aligned} X_{N_i}^{(n+1)} &= F_{N_i}(X_{N_{Pi}}^{(n+1)}) = F_{N_i} \circ F_{N_{Pi}}(X_{N_{P^2 i}}^{(n+1)}) = \\ &\vdots \\ &= F_{N_i} \circ \ldots \circ F_{N_{P^l i}}(X_{N_{P^{l+1} i}}^{(n)}) = \prod_{j=0}^{l} F_{N_{P^j i}}(X_{N_{P^{l+1} i}}^{(n)}) \end{aligned}$$

mit $i, Pi, \ldots, P^{l-1} i \notin Z_a$, $P^l i \in Z_a$.

Durch Anwendung der zuerst bewiesenen Aussage des Satzes für den Index $P^l i$ erhält man nun für $n > 0$

$$\begin{aligned} X_{N_i}^{(n+m)} &= \prod_{j=0}^{l} F_{N_{P^j i}}(X_{N_{P^{l+1} i}}^{(n+m-1)}) = \prod_{j=0}^{l} F_{N_{P^j i}} \circ \prod_{j=1}^{k} F_{N_{P^j(P^l i)}}(X_{N_{P(P^l i)}}^{(n-1)}) = \\ &= \prod_{j=0}^{k-1} F_{N_{P^j i}} \circ F_{N_{P^k i}} \circ \prod_{j=1}^{l} F_{N_{P^j i}}(X_{N_{P^{l+1} i}}^{(n-1)}) = \prod_{j=0}^{k-1} F_{N_{P^j i}}(X_{N_i}^{(n)}) . \quad \square \end{aligned}$$

Da nach Definition für das Blockiterationsverfahren F grundsätzlich in Blockform (jedoch nicht in Normalform) vorliegt, erhalten wir den im Vergleich zu Satz 15 übersichtlichen

Satz 20. *Es sei $F = (f_i) : B \subseteq R^n \to B$ eine schwach zyklische Vektorfunktion vom Index k mit den in Definition 18 angegebenen Eigenschaften, $m := \# Z_a$ und $\{X^{(n)}\}$ die ausgehend von einem Element $X^{(0)} \in B$ durch das zu Z_a gehörige Blockiterationsverfahren erzeugte Folge. Weiter sei $\{R, \leqq\}$ eine geordnete Menge und für alle Indizes $i \in IS \subseteq K := \{1, 2, \ldots, k\}$ (bzw. $i \in K \setminus IS$) sei F_i eine isotone (bzw. antitone) Abbildung von $\{R^{n_{Pi}}, \leqq_I\}$ in $\{R^{n_i}, \leqq_I\}$ $(I \subseteq N)$. Dann gilt*

$$X^{(s)} \leqq_I X^{(t)} \Rightarrow X^{(s+m)} \underset{(\text{bzw.} \geqq_I)}{\leqq_I} X^{(t+m)}$$

für alle $s, t > 0$, falls $\#(K \setminus IS)$ gerade (bzw. ungerade).

Beweis. Nach Satz 19 folgt

$$\begin{aligned} X^{(s)} \leqq_I X^{(t)} &\Rightarrow \bigwedge_{i=1(1)k} X_i^{(s)} \leqq_I X_i^{(t)} \Rightarrow X^{(s+m)} = F^k(X^{(s)}) = \\ &= \Big(\prod_{j=0}^{k-1} F_{N_{P^j i}}(X_{N_i}^{(s)})\Big) \underset{(\text{bzw.} \geqq_I)}{\leqq_I} \Big(\prod_{j=0}^{k-1} F_{N_{P^j i}}(X_{N_i}^{(t)})\Big) = F^k(X^{(t)}) = X^{(t+m)} . \quad \square \end{aligned}$$

Ein entsprechendes Resultat erzielt man für $(k_1, \ldots, k_r)$-zyklische Vektorfunktionen. Es gilt der

Satz 21. *Es sei $F = (f_i) : B \subseteq R^n \to B$ eine $(k_1, \ldots, k_r)$-schwach zykl. Vektorfunktion derart, daß die zugehörige Zerlegung $N_1, \ldots, N_k$ von N mit $k = \sum_{i=1}^{r} k_i$*

sequentiell ist und mit einer Permutation P der Menge $K := \{1, 2, \ldots, k\}$ die Abhängigkeiten

$$F_{N_i} = F_{N_i}(X_{N_{Pi}}), \quad i = 1(1)\,k\,,$$

bestehen. Weiter sei $\{R, \leqq\}$ eine geordnete Menge und für alle $i \in K$ sei F_i eine isotone oder antitone Abbildung von $\{R^{n_{Pi}}, \leqq_I\}$ in $\{R^{n_i}, \leqq_I\}$ $(I \subseteq N)$. K_i, $i = 1(1)\,r$ seien die Teilmengen von K, welche P zyklisch permutiert.

Dann gilt für die ausgehend von $X^{(0)} \in B$ durch das zu einer Menge $Z_a \subseteq K$ gehörige Blockiterationsverfahren erzeugte Folge $\{X^{(n)}\}$

$$X^{(s)} \leqq_I X^{(t)} \Rightarrow X^{(s+m)} \leqq_I X^{(t+m)}\,, \quad s, t > 0\,,$$

mit $m := 2 \cdot k.g.V(m_1, \ldots, m_r)$ und $m_i := \#(Z_a \cap K_i)$, $i = 1(1)\,r$.

Beweis. Nach Definition 13 ist für alle $i = 1, 2, \ldots, r$ die Funktion F_{K_i} eine schwach zyklische Vektorfunktion vom Index k_i. Nach Satz 20 gilt also für $s, t > 0$

$$X^{(s)} \leqq_I X^{(t)} \Rightarrow \bigwedge_{i=1(1)r} X_{K_i}^{(s)} \leqq_I X_{K_i}^{(t)} \Rightarrow \bigwedge_{i=1(1)r} X^{(s+2m_i)} \leqq_I X^{(t+2m_i)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X^{(s+m)} \leqq_I X^{(t+m)}\,. \quad \square$$

Im Falle der Matrixoperatoren sind die Voraussetzungen von Satz 21 besonders einfach zu realisieren. Es genügt hier, diejenigen Abschnittsfunktionen, die aus mehr als einer Komponentenfunktion bestehen, gemäß der in Abschnitt 2 gegebenen Eigenschaften auf ihre Isotonie bzw. Antitonie zu überprüfen. Falls sämtliche Abschnittsfunktionen nur eine Komponente besitzen, so gilt:

Korollar 22. *Es sei $\{R, +, \cdot, \leqq\}$ ein linear geordnetes Ringoid und $F(X) = A \cdot X + B$, $A \in M_nR$, $B \in V_nR$ eine $(k_1, \ldots, k_r)$-schw. zykl. Abbildung mit $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$. Ferner sei $\{X^{(n)}\}$ die durch das zu einer Menge Z_a gehörige Blockiterationsverfahren erzeugte Iterationsfolge und m wie in Satz 21 definiert. Dann ist jedes Element $X^{(t)}$, $t > 0$, der Folge $\{X^{(n)}\}$ Ausgangselement einer monoton wachsenden Folge $X^{(t)}, X^{(t+m)}, X^{(t+2m)}, \ldots$ bezüglich der Ordnungsrelation $\leqq_{I_t}$ in V_nR mit $I_t := \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid x_i^{(t)} \leqq x_i^{(t+m)}\}$.*

Beweis. Im vorliegenden Fall sind die Abschnittsfunktionen F_i gegeben durch die Komponentenfunktionen

$$f_i(x_{Pi}) = a_{i,Pi} \cdot x_{Pi} + b_i\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Unabhängig davon, welche der Relationen $\leqq$ und $\geqq$ man als Ordnung in Urbildraum und Bildraum verwendet, bildet f_i also grundsätzlich einen isotonen oder antitonen Operator. Somit kann die in Satz 21 betrachtete Ordnungsrelation $\leqq_I$ hier beliebig z. B. durch I_t festgelegt werden. Aus Satz 21 folgt nun die Behauptung. $\square$

Alle vorangehenden Betrachtungen wurden möglichst allgemein gehalten, um vielseitige Anwendbarkeit zu erreichen. So wurde nicht wie bei der Untersuchung nichtlinearer Gleichungen üblich ein linearer Raum vorausgesetzt, sondern lediglich der Raum R^n der n-Tupel über einem Ringoid $\{R, +, \cdot\}$ zugrunde gelegt.

Bei der Angabe von Beispielen wollen wir nun die hierdurch gegebenen Möglichkeiten nutzen und grundsätzlich von den Verhältnissen, wie sie beim numerischen Rechnen tatsächlich vorliegen, ausgehen.

Wir legen daher die Menge $\mathbb{R}_{m,b,e_1,e_2}$ der normalisierten Gleitpunktzahlen zur Basis b, Mantissenlänge m und minimalem (bzw. maximalem) Exponenten e_1 (bzw. e_2) zugrunde:

$$\mathbb{R}_{m,b,e_1,e_2} := \{x \in \mathbb{R} \mid x = *0 \,.\, d_1 d_2 \ldots d_m \,.\, b^e,\ * \in \{+, -\},$$
$$d_i \in \{0, 1, \ldots, b-1\} \quad \text{für} \quad i = 1(1)\,m,\ d_1 \neq 0,\ e_1 \leqq e \leqq e_2,\ e \in K\} \cup \{0\}\,,$$

$m, b \in \mathbb{N},\ b \geqq 2.$

Als Teilmenge des vollständig linear geordneten Ringoides

$$\{\mathbb{R}_{m,b,e_2}, +, \cdot, \leqq\}$$

mit

$$\mathbb{R}_{m,b,e_2} := \{x \in R \mid |x| \leqq p\,, \quad p := 0 \,.\, d_1 d_2 \ldots d_m \,.\, b^{e_2}\,, \quad d_i = b - 1$$
$$\text{für } i = 1(1)\,m\}$$

und einer bezüglich der Grenzelemente $p, -p$ abgeschlossenen reellen Arithmetik $\tilde{+}, \tilde{\cdot}$, bildet $\{\mathbb{R}_{m,b,e_1,e_2}, \leqq\}$ ein symmetrisches Raster von $\{\mathbb{R}_{m,b,e_2}, +, \cdot, \leqq\}$. Führen wir in $\mathbb{R}_{m,b,e_1,e_2}$ wiederum Verknüpfungen $\oplus$, $\odot$ mittels der Definition

$$\bigwedge_{a,b \in \mathbb{R}_{m,b,e_1,e_2}} \quad a \oplus b := \bigcirc(a \mathbin{\tilde{+}} b) \wedge a \odot b := \bigcirc(a \mathbin{\tilde{\cdot}} b)$$

ein, wobei $\bigcirc$ eine monotone antisymmetrische Rundung von $\mathbb{R}_{m,b,e_2}$ auf $\mathbb{R}_{m,b,e_1,e_2}$ bedeutet, so bildet $\{\mathbb{R}_{m,b,e_1,e_2}, \oplus, \odot, \leqq\}$ ebenfalls ein vollständig linear geordnetes Ringoid.

Die Verknüpfungen in dem Vektoid $\{V_n\mathbb{R}_{m,b,e_1,e_2}, \mathbb{R}_{m,b,e_1,e_2}\}$ der n-Tupel über dem Ringoid $\mathbb{R}_{m,b,e_1,e_2}$ ergeben sich dann wie üblich aus der komponentenweisen Definition, während eine Ordnungsrelation $\leqq_I$ gemäß Abschnitt 2 einzuführen ist. (Zum Begriff des Vektoides siehe [8], [5].)

1. Wie betrachten zunächst den Operator

$$TX = \begin{bmatrix} -0.87 \odot x_5 \oplus 1 \\ -0.53 \odot x_1 \oplus 1 \\ 0.68 \odot x_6 \oplus 1 \\ -0.79 \odot x_3 \oplus 1 \\ -0.48 \odot x_2 \oplus 1 \\ 0.94 \odot x_4 \oplus 1 \end{bmatrix}$$

in $V_6\mathbb{R}_{2,10,e_1,e_2}$. T stellt eine (3, 3)-zyklische Vektorfunktion dar mit der zugehörigen Permutationsmatrix

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Infolge der einfachen Form der Komponentenfunktionen von T läßt sich der betrachtete Operator auch schreiben in der Form

$$TX \equiv AX + B$$

mit der 6×6-Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -0.87 & 0 \\ -0.53 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.68 \\ 0 & 0 & -0.79 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.48 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.94 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_6\mathbb{R}_{2,10,e_1,e_2}$$

und dem Vektor $B = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}} \in V_6\mathbb{R}^2_{10}$.

Damit erfüllt T die Voraussetzungen des Korollars 22 mit

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 6 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

und $K_1 = \{1, 2, 5\}$, $K_2 = \{3, 4, 6\}$. Im Fall des Gesamtschrittverfahrens, d. h. für $Z_a = \{1, 2, \ldots, 6\}$, benötigt man also höchstens 6 Iterationsschritte, um jeweils wieder vergleichbare Iterierte zu erzeugen, während beim Einzelschrittverfahren wegen $Z_a = \{1, 3\}$ höchstens 2 Schritte benötigt werden. Aufgrund weiterführender Überlegungen (siehe etwa [3]) endet eine durch das entsprechende Iterationsverfahren erzeugte Folge somit auf jeden Fall in einem Zyklus, dessen Länge 6 bzw. 2 teilt. Die Durchführung der Verfahren bestätigt diesen Sachverhalt durch die Folgen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.76 \\ 1.5 \\ -0.2 \\ 0.64 \\ 0.72 \end{bmatrix},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0.44 \\ 0.76 \\ 1.5 \\ -0.2 \\ 0.64 \\ 0.81 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.44 \\ 0.77 \\ 1.6 \\ -0.2 \\ 0.64 \\ 0.81 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.44 \\ 0.77 \\ 1.6 \\ -0.3 \\ 0.63 \\ 0.81 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.77 \\ 1.6 \\ -0.3 \\ 0.63 \\ 0.72 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.76 \\ 1.5 \\ -0.3 \\ 0.63 \\ 0.72 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.76 \\ 1.5 \\ -0.2 \\ 0.64 \\ 0.72 \end{bmatrix}}, $$

... und

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.13 \\ 0.93 \\ 1.7 \\ -0.3 \\ 0.55 \\ 0.72 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.52 \\ 0.72 \\ 1.5 \\ -0.2 \\ 0.65 \\ 0.81 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.43 \\ 0.77 \\ 1.6 \\ -0.3 \\ 0.63 \\ 0.72 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.76 \\ 1.5 \\ -0.2 \\ 0.64 \\ 0.81 \end{bmatrix},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0.44 \\ 0.77 \\ 1.6 \\ -0.3 \\ 0.63 \\ 0.72 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.76 \\ 1.5 \\ -0.2 \\ 0.64 \\ 0.81 \end{bmatrix}}, \ldots .$$

Für $Z_a = \{1, 2, 3, 4\}$ beispielsweise erzeugt die Iteration ausgehend von demselben Startelement den maximal möglichen 4-Zyklus

$$\ldots, \begin{bmatrix} 0.44 \\ 0.77 \\ 1.6 \\ -0.3 \\ 0.63 \\ 0.72 \end{bmatrix}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.77 \\ 1.5 \\ -0.3 \\ 0.63 \\ 0.72 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.76 \\ 1.5 \\ -0.2 \\ 0.64 \\ 0.81 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.44 \\ 0.76 \\ 1.6 \\ -0.2 \\ 0.64 \\ 0.81 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.44 \\ 0.77 \\ 1.6 \\ -0.3 \\ 0.63 \\ 0.72 \end{bmatrix}}, \ldots .$$

2. Als Beispiel einer nichtlinearen Abbildung wählen wir die Funktion $F : R^3 \to R^3$ mit

$$F(X) = \begin{pmatrix} 1 - x_3 \\ 2\sqrt{|x_3|} \,.\, \operatorname{sign}(x_3) \\ (x_1^3 - x_2)/25 \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung ist eine in Normalform gegebene zyklische Vektorfunktion vom Index 2. Die zugehörige sequentielle Zerlegung der Indexmenge $N = \{1, 2, 3\}$ ist $N_1 = \{1, 2\}, N_2 = \{3\}$. Die Frage nach Monotonieeigenschaften für die Abschnittsfunktionen F_i, $i = 1, 2$ bei numerischer Auswertung von F läßt sich positiv beantworten: Die Auswertung der Komponentenfunktionen wird i.a. im Raum $\{\mathbb{R}_{m,b,e_1,e_2}, \oplus, \odot, \leqq\}$ vorgenommen und wir schreiben daher F in der Form

$$F(X) = \begin{pmatrix} 1 \ominus x_3 \\ 2 \odot (\bigcirc\!\!\!\!\sqrt{|x_3|}) \odot \operatorname{sign}(x_3) \\ (x_1 \odot x_1 \odot x_1 \ominus x_2) \odot 0.04 \end{pmatrix}$$

Mit den Rechenregeln (0D1), (0D2) und (0D3) eines geordneten Ringoids ist dann unmittelbar klar, daß

$$F_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \ominus x \\ 2 \odot (\bigcirc\!\!\!\!\sqrt{|x|}) \odot \operatorname{sign}(x) \end{pmatrix}$$

eine isotone Abbildung von $\{\mathbb{R}_{m,b,e_1,e_2}, \leqq\}$ in $\{\mathbb{R}^2_{m,b,e_1,e_2}, \binom{\geqq}{\leqq}\}$ ist, während wir für

$$F_2(X) = x_1 \odot x_1 \odot x_1 \ominus x_2$$

nachweisen, daß eine antitone Abbildung von $\{\mathbb{R}^2_{m,b,e_1,e_2}, \binom{\geqq}{\leqq}\}$ in $\{\mathbb{R}, \leqq\}$ vorliegt: Seien $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \{\mathbb{R}^2_{m,b,e_1,e_2}$ mit $x_1 \geqq y_1$ und $x_2 \leqq y_2$. Da ein linear geordnetes Ringoid zugrunde liegt, können wir die folgenden drei Fälle unterscheiden:

1. Es ist

$$\begin{aligned} 0 \leqq y_1 \leqq x_1 \Rightarrow 0 \leqq y_1 \odot y_1 \leqq x_1 \odot y_1 \leqq x_1 \odot x_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 \leqq (y_1 \odot y_1) \odot y_1 \leqq (x_1 \odot x_1) \odot y_1 \leqq \\ \leqq (x_1 \odot x_1) \odot x_1 \end{aligned}$$

nach (0D3). (0D1) und (0D2) ergeben weiter

$$x_2 \leqq y_2 \Rightarrow \ominus y_2 \leqq \ominus x_2$$

und

$$(y_1 \odot y_1 \odot y_1 \ominus y_2) \odot 0.04 \leqq (x_1 \odot x_1 \odot x_1 \ominus x_2) \odot 0.04\,,$$
$$\text{d. h.} \quad F_2(Y) \leqq F_2(X)\,.$$

2. Für $y_1 \leqq x_1 \leqq 0$ gilt

$$0 \leqq x_1 \odot x_1 \leqq x_1 \odot y_1 \leqq y_1 \odot y_1$$

und damit

$$(y_1 \odot y_1) \odot y_1 \leqq (x_1 \odot x_1) \odot x_1 \leqq 0\,.$$

Wie im Falle 1 folgt wieder $F_2(Y) \leqq F_2(X)$.

3. Fall $y_1 \leqq 0 \leqq x_1$ ist, erhält man $x_1 \odot x_1 \odot x_1 \geqq 0$ und $y_1 \odot y_1 \odot y_1 \leqq 0$ und daraus wieder wie im Fall 1 $F_2(Y) \leqq F_2(X)$. Damit erfüllt F die Voraussetzungen von Satz 15 für die Ordnungsrelation $\leqq_I$, $I := \{2, 3\}$ und $IS = \{1\} \subseteq K = \{1, 2\}$

(die Permutationsmatrix P ist hier durch die Einheitsmatrix gegeben), d. h. F^2 ist ein antitoner Operator von $\{\mathbb{R}^3_{m,b,e_1,e_2}, \leqq\}$ in sich. Für die Durchführung des Gesamtschrittverfahrens bzw. des Blockeinzelschrittverfahrens besagt dann Satz 20, daß nach jeweils 4 bzw. 2 Iterationsschritten aus vergleichbaren Iterierten wiederum in derselben Weise vergleichbare Iterierte entstehen. Gemäß [3] kann man daher für die berechneten Iterationsfolgen höchstens einen 4-Zyklus bzw. 2-Zyklus erwarten, falls solche vergleichbare Iterierte auftreten. Die Rechnung im Raum $(\mathbb{R}_{2,10,e_1,e_2}, \oplus, \odot\}$ bestätigt dies tatsächlich:

$$Z_a = \{1, 2\} : \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0.04\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.96\\0.4\\0.04\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.96\\0.4\\0.18\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.98\\0.26\\0.18\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.98\\0.26\\0.027\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0.97\\0.32\\0.027\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.97\\0.32\\0.024\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}0.98\\0.3\\0.024\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.98\\0.3\\0.026\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.97\\0.32\\0.026\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.97\\0.32\\0.024\end{pmatrix}}, \ldots .$$

$$Z_a = \{1\} : \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0.04\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.96\\0.4\\0.018\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.98\\0.26\\0.027\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.97\\0.32\\0.024\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}0.98\\0.3\\0.026\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.97\\0.32\\0.024\end{pmatrix}}, \ldots .$$

Diese Arbeit wurde von der Fakultät für Mathematik an der Universität Karlsruhe als Habilitationsschrift genehmigt.

Literaturverzeichnis

[1] *Chazan, D., Miranker, W.:* Chaotic Relaxation. Linear Algebra and its Applications 2 (1969), 199—222.

[2] *Klatte, R.:* Zyklisches Enden bei Iterationsverfahren. Dissertation, Universität Karlsruhe (1975).

[3] *Klatte, R., Ullrich, Ch.:* Consequences of a properly implemented computer arithmetic for periodicities of iterative methods. Report on the 3rd IEEE Symposium on Computer Arithmetic, Nr. 75CH 1017-3C, Dallas, Texas, (1975), 24—32.

[4] *Kulisch, U.:* Rounding invariant structures. MRC, University of Wisconsin, Technical Summary Report 1103, September 1970, 1—47.

[5] *Kulisch, U.:* Grundlagen des numerischen Rechnens. Bibliographisches Institut, Mannheim (1976).

[6] *Ortega, J. M., Rheinboldt, W. C.:* Iterative Solution of Nonlinear Equations of Several Variables. Academic Press, New York and London (1970).

[7] *Robert, F., Charnay, M., Musy, F.:* Itérations chaotiques série-paralléles pour des équations non-linéaires de point fixé. Aplikace Matematiky, 20 (1975), 1—38.

[8] *Ullrich, Ch.:* Rundungsinvariante Strukturen mit äußeren Verknüpfungen. Dissertation, Universität Karlsruhe (1972).

[9] *Varga, R.:* Matrix Iterative Analysis. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1962).

Souhrn

O SLABĚ CYKLICKÝCH ZOBRAZENÍCH V NELINEÁRNÍCH SOUČINOVÝCH PROSTORECH A NĚKTERÉ VÝROKY O MONOTONII

CHRISTIAN ULLRICH

Práce se zabývá některými vlastnostmi tzv. slabě cyklických vektorových funkcí. Obecná definice slabě cyklické funkce zahrnuje speciální případ funkce Ax, kde A je slabě cyklická matice. V práci se zkoumá hlavně monotonie zmíněných vektorových funkcí, přičemž monotonie je chápána ve zobecněném smyslu.

Adresse des Autors: Privatdocent Dr. *Christian Ullrich*, Institut für Angewandte Mathematik Universität Karlsruhe, Postfach 6380, 7500 Karlsruhe, BRD.