Archivum Mathematicum

Jiří Klapka

Об инварианте Вэльша конгруэнции прямых трехмерного проективного пространства P_3 и об их преобразованиях Лапласа

Archivum Mathematicum, Vol. 8 (1972), No. 1, 57--62

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104759`

ARCH. MATH. 1, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS,
VIII: 57—62, 1972

ОБ ИНВАРИАНТЕ ВЭЛЬША КОНГРУЭНЦИИ ПРЯМЫХ ТРЕХМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА P_3 И ОБ ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ЛАПЛАСА

Иржи Клапка, Брно

(Поступило в редакцию 26-ого марта 1971 г.)

(Доклад прочитанный 28-ого мая 1969 г. в летней школе в городе Леднице, устраиваемой по случаю семидесятилетия со дня рождения академика Отакара Борувки)

1. ВВЕДЕНИЕ

Согласно известному произведению С. П. Финикова [1] геометрическое значение инварианта Вэльша следующее:

Если A_1 точка фокальной поверхности (A_1) конгруэнции L прямых в P_3 и если A_2 соответствующая точка второй фокальной поверхности (A_2) конгруэнции L, потом — если обозначить соединяющую прямую $[A_iA_k]$ точек A_i, A_k символом $[ik]$ — D сложное отношение следующей четверки касательных поверхности (A_1) в точке A_1:

1. [12]
2. касательная [13] сопряженная к [12]
3. любая из асимптотических касательных поверхности (A_1) в A_1
4. касательная в A_1 к линии соответствующей на поверхности (A_1) любой асимптотической линии поверхности (A_2) проходящая через точку A_2.

Определение 1,1. *При приведенном обозначении будет*

$$I = D^2. \tag{1,1}$$

Значит, инвариант Вэльша дан согласно определению (1,1) как квадрат сложного отношения четверки лучей плоскостного пучка.

В дальнейшем покажем другое геометрическое значение инварианта

Вэльша. Это тоже сложное отношение четверки прямых той же системы Q образующих поверхности 2-ого порядка, проходящих через четыре один за другим расположенными фокусами $A_3A_1A_2A_4$ конгруэнции L и их преобразований Лапласа L_{-1} и L_1. Геометрическое образование системы образующих простое.

2. К ИСТОРИИ ОТКРЫТИЯ ИНВАРИАНТА ВЭЛЬША

Инвариант I является по приведенной книге С. П. Финикова [1] единственным абсолютным дифференциальным инвариантом второго порядка конгруэнции L.

Впервые был определен в работе Эмиля Вэльша [2] в 1894 г., был обобщен для конгруэнций $2n+1$ — мерного проективного пространства P_{2n+1} А. Швецом в книге [3]. Наконец отметим, что Эмиль Вэльш родился в 1863 году в Праге, где и получил звание доцента и работал с 1895 г. до 1898 г. в качестве экстренного профессора, потом в качестве штатного профессора в городе Брно, где и в 1927 году умер.

3. КООРДИНАТНЫЙ РЕПЕР

В дальнейшем применим репер, введенный в работе Владимира Горака [4]. Здесь приведена система (4,8) на стр. 358 вида

$$dA_i = \sum_{j=1}^{4} \omega_{ij} A_j \tag{3,1}$$

для инфинитезимального преобразования вершин репера (A_1, A_2, A_3, A_4) с матрицей коэффициентов $(\omega_{ij}) = (A)$,

$$(A) = \begin{pmatrix} \omega_{11}, & \alpha_1\omega_2, & \omega_1, & 0 \\ \alpha_2\omega_1, & \omega_{22}, & 0, & \omega_2 \\ \omega_{31}, & \beta_2\gamma_2\omega_1, & \omega_{33}, & \beta_2\omega_1 \\ \beta_1\gamma_1\omega_2, & \omega_{42}, & \beta_1\omega_2, & \omega_{44} \end{pmatrix}, \tag{3,2}$$

где детерминант $[A_1, A_2, A_3, A_4] = 1$.

Притом — как приведено в 1 — A_1, A_2 фокусы на прямой [12] конгруэнции L, далее предполагается, что A_3 или A_4 являются фокусами прямой [13] или [24] преобразуемой конгруэнции Лапласа L_{-1} или L_1 конгруэнции L. Значит, что (A_1), (A_3) или (A_1), (A_2) или (A_2), (A_4) являются парой фокальных поверхностей конгруэнций L_{-1} или L или L_1. Допустим, что все эти конгруэнции гиперболические и их фокальные поверхности не дегенерируют в кривые. Потом

$$\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 \neq 0, \quad \gamma_1\gamma_2 \neq 0 \tag{3,3}$$

и уравнение

$$(3,4) \qquad \omega_1\omega_2 = 0$$

является дифференциальным уравнением обеих систем развёртывающихся линейчатых поверхностей конгруэнции L с ребрами возврата на (A_1) и (A_2). Уравнение асимптотических линий на этих поверхностях потом будут

$$(3,5) \qquad \beta_2\omega_1^2 + \alpha_1\omega_2^2 = 0$$

или

$$(3,6) \qquad \alpha_2\omega_1^2 + \beta_1\omega_2^2 = 0.$$

Из последних двух уравнений вытекает условие для того, чтобы L была конгруэнцией W:

$$(3,7) \qquad \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 = 0.$$

Относительно к (3,3) можно условие (3,7) написать в форме

$$(3,8) \qquad \frac{\alpha_1\,\alpha_2}{\beta_1\,\beta_2} = 1\,,$$

т. е. если положим

$$(3,9) \qquad I = \frac{\alpha_1\,\alpha_2}{\beta_1\,\beta_2}\,,$$

в форме $I = 1$.

Следовательно I является инвариантом Вэльша конгруэнции L.

4. О КВАЗИФЛЕКНОДАЛЬНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ И ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ПАРАМ СООТВЕТСТВУЮЩИХ ЛИНЕЙЧАТЫХ СЕМЕЙСТВ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛАПЛАСА L_{-1}, L_1 КОНГРУЭНЦИИ L

Прямой $[ij]$ образованная конгруэнция $([ij])$ заключает в себе линейчатые поверхности $R[ij]$. Обратим внимание главным образом на конгруэнции $([13]) = L_{-1}$ и $([24]) = L_1$, которые находятся в простом соответствии C так, что $CL_{-1} = L_1$. Линейчатой поверхности $R \subset L_{-1}$ в C соответствует линейчатая поверхность $CR \subset L_1$ так, что прямым первой поверхности соответствуют прямые второй поверхности.

Если прямая $[12] \in L$ образует линейчатую поверхность R [12] внутри L, потом прямые [13] и [24] образуют линейчатые поверхности R [13] и R [24] преобразований Лапласа L_{-1}, L_1. Понятно, что $R\ [24] = CR\ [13]$. Обе поверхности являются неразвертывающимися с неторзальными прямыми [13] и [24], которые образуют пару прямых в соответствии C. Существует поэтому в алгебраическом смысле пара квазифлекнодальных касательных этой пары в смысле Е. Т. Ивлева [5], смотри тоже О. Обурка [6] и И. Вала [7]. Изберем точку $\lambda_1A_1 + \lambda_3A_3$ на [13] и точку $\lambda_2A_2 + \lambda_4A_4$ на [24], так что прямая

$$(4{,}1) \qquad r = [\lambda_1 A_1 + \lambda_3 A_3,\ \lambda_2 A_2 + \lambda_4 A_4]$$

является поперечной пары скрещивающихся прямых [13], [24]. Чтобы r была квазифлекнодальной касательной, т. е., чтобы в приведенных точках касалась поверхности R [13] или R [24], необходимо и достаточно, если выполнены условия

$$(4{,}2) \qquad r \,.\, \mathrm{d}\,[13] = r \,.\, \mathrm{d}\,[24].$$

Расписской скалярных произведений Плюккера в (4,2) вытекают условия

$$(4{,}3) \qquad \omega_1\lambda_3[(\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2)\,\omega_2\lambda_1 - \beta_2(\alpha_2\gamma_2\omega_1 + \beta_1\gamma_1\omega_2)\,\lambda_3] = 0,$$

$$(4{,}4) \qquad \omega_2\lambda_4[(\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2)\,\omega_1\lambda_2 - \beta_1(\alpha_1\gamma_1\omega_2 + \beta_2\gamma_2\omega_1)\,\lambda_4] = 0.$$

Пару уравнений (4,3), (4,4) можно выполнить следующими способами:

1.	$\omega_1 = 0,\ \lambda_4 = 0,$	$\lambda_1 : \lambda_2$	любые,
	$\omega_2 = 0,\ \lambda_3 = 0,$	$\lambda_2 : \lambda_4$	любые,
2.	$\lambda_3 = \lambda_4 = 0,$	$\omega_3,\ \omega_4$	любые.

3. После сокращения уравнения (4,3) фактором $\omega_1\lambda_3$ и одновременно уравнения (4,4) фактором $\omega_2\lambda_4$ получаются условия

$$(4{,}5) \qquad (\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2)\,\omega_2\lambda_1 - \beta_2(\alpha_2\gamma_2\omega_1 + \beta_1\gamma_1\omega_2)\,\lambda_3 = 0,$$

$$(4{,}6) \qquad (\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2)\,\omega_1\lambda_2 - \beta_1(\alpha_1\gamma_1\omega_2 + \beta_2\gamma_2\omega_1)\,\lambda_4 = 0.$$

1. Обратим внимание сначала на случай 1. Каждая из обеих пар уравнений характеризует один из так называемых торзальных направлений движения прямой из положения [12] внутри конгруэнции L, которые будем называть направлениями торзальными. Согласно (4,3), (4,4) прямая r образует пучок в плоскотси $[A_1, A_2, A_3]$ с центром A_2 или в плоскости $[A_1, A_2, A_4]$ с центром A_1.

2. В этом случае при любом направлении $\omega_1 : \omega_2$ очевидно, что одна из обеих квазифлекнодальных касательных линейчатых поверхностей R [13] и R [24] отождествляется с прямой [12] конгруэнции L.

Следовательно можно высказать теорему 4,1: *Одна из обеих квазифлекнодальных касательных линейчатых поверхностей R [13] R [24] при каждом $\omega_1 : \omega_2$ отождествляется с прямой [12] конгруэнции L.*

Согласно теореме 4,1 задание квазифлекнодальных касательных любой пары соответствующих поверхностей, образованных прямыми [13] [24] преобразований Лапласа L_{-1}, L_1 редуцируется на разыскивание только одной прямой квазифлекнодальной, так как одна всегда тождественна с прямой $[12] \in L$.

3. В этом случае можно уравнения (4,5) и (4,6) применить для исчисления второй квазифлекнодальной касательной r, которая в общем случае не тождественна с [12] в смысле абзаца 2.

Исчислением отношений $\lambda_1 : \lambda_3$ и $\lambda_2 : \lambda_4$ из этих уравнений и с помощью подстановки в выражение (4,1) для r вытекает

$$
\begin{aligned}
r = [&\beta_2(\alpha_2\gamma_2\omega_1 + \beta_1\gamma_1\omega_2) A_1 + (\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2) \omega_2 A_3, \\
&\beta_1(\beta_2\gamma_2\omega_1 + \alpha_1\gamma_1\omega_2) A_2 + (\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2) \omega_1 A_4],
\end{aligned} \tag{4,7}
$$

или после расписки

$$
\begin{aligned}
r = &(\alpha_2\gamma_2\omega_1 + \beta_1\gamma_1\omega_2)(\beta_2\gamma_2\omega_1 + \alpha_1\gamma_1\omega_2)[12] + \\
&+ (I - 1)\{-\beta_2(\alpha_2\gamma_2\omega_1 + \beta_1\gamma_1\omega_2)\omega_1[14] + \\
&+ \beta_1(\beta_2\gamma_2\omega_1 + \alpha_1\gamma_1\omega_2)\omega_2[23] + \beta_1\beta_2(I - 1)\omega_1\omega_2[34]\}.
\end{aligned} \tag{4,8}
$$

Выражение (4,8) для r однородное квадратное в ω_1, ω_2. Прямая r поэтому при изменении отношения $\omega_1 : \omega_2$ образует систему Q образующих; это видно тоже из выражения (4,7), поэтому что прямые r соединяют соответствующие точки проективных рядов на [13] и [24]. Только если $I - 1 = 0$, то и прямая (4,8) при каждой величине отношения $\omega_1 : \omega_2$ тождественна с прямой [12] конгруэнции L которая типа W.

Значит, можно выразить теорему 4,2: *Как раз когда конгруэнция L является поп W, одна из обеих квазифлекнодальных касательных поверхностей R [13], R [24] отождествляется с [12] $\in L$. Обе квазифлекнодальные касательные отождествляются с [12] тогда, и только тогда, когда L типа W.*

В заключение приведем главный результат, объявленный в абзаце 1.

Теорема 4,3: *Будь L конгруэнция поп W или будь по крайней мере [12] прямая, в которой $I \neq 1$. Будь Q система образующих других квазифлекнодальных касательных пары R [13] R [24] соответствующих линейчатых поверхностей конгруэнций L_{-1}, L_1, тоже будьте A_1, A_2, A_3, A_4 фокусы прямых [13] $\in L_{-1}$, [24] $\in L_1$. Пусть r_i является той прямой системы Q образующих, которая проходит через точку A_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Потом о сложном отношении этих прямых действительно верно*

$$[r_1, r_2, r_3, r_4] = I.$$

Доказательство: Из выражения (4,7) для образующей прямой r системы Q образующих вытекает, что прямым r_i принадлежат следующие величины отношения $\omega_1 : \omega_2$:

$$
\begin{aligned}
&\text{для } r_1 \; \ldots\ldots \; 1 : 0, \\
&\text{для } r_2 \; \ldots\ldots \; 0 : 1, \\
&\text{для } r_3 \; \ldots\ldots \; \beta_1\gamma_1 : -\alpha_2\gamma_2, \\
&\text{для } r_4 \; \ldots\ldots \; \alpha_1\gamma_1 : -\beta_2\gamma_2.
\end{aligned}
$$

Значит двойное отношение $[r_1, r_2, r_3, r_4] = \dfrac{-\alpha_1\gamma_1}{\beta_2\gamma_2} : \dfrac{-\beta_1\gamma_1}{\alpha_2\gamma_2} = \dfrac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2} = I$, чего и требовалось доказать.

LITERATURA

[1] С. Н. Финуков, *Теория конгруэнций*, Москва 1950

[2] Wälsch Emil, *Sur le premier invariant différentiel projectif des congruences rectilignes*, C. R. 118, Paris 1894, str. 736—738

[3] Švec Alois, *Projective differential geometry of line congruences*, Praha 1965, str. 35

[4] Horák Vladimír, *Contribution á l'étude des transformations développables des congruences de droites et de leurs transformées de Laplace*, Czechoslovak Mathematical Journal 17 (92), Praha 1967, str. 347—371

[5] Е. Т. Ивлев, *О паре линейчатых поверхностей в трёхмерном проективном пространстве*, Геометрический сборник 2, Тпуды Томского гос. университета, серия мех.-матем, Томск 161 (1962), 3–12.

[6] Обурка О., *О парах линейчашых поверхностей*, Matematickofyzikálny časopis SAV 13,4, 1963, str. 275—302.

[7] Vala J., *Über die Regelflächenpaare mit einer nicht abwickelbaren Quasifleknodalfläche*, Czechoslovak Mathematical Journal 18 (93), Praha 1968, str. 527—559 a další práce.

Jiři Klapka

Ul. Jana Uhra 26

Brno, ČSSR