Archivum Mathematicum

Věra Radochová

Einige Eigenschaften der Lösung der Wellengleichung mit der Korrektion von Rayleigh

Archivum Mathematicum, Vol. 8 (1972), No. 3, 125--129

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104767`

ARCH. MATH. 3, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS,
VIII: 125-129, 1972

EINIGE EIGENSCHAFTEN DER LÖSUNG DER WELLENGLEICHUNG MIT DER KORREKTION VON RAYLEIGH

VĚRA RADOCHOVÁ

(Eingegangen am 11. November 1971)

Wenn wir bei der Forschung der dynamischen Wellen, die in einem Stab durch den Stoss entstehen, die Korrektion der Frequenz von Längsschwingungen, die von Rayleigh stammt, in Erwägung ziehen, erhalten wir eine partielle Differentialgleichung vierter Ordnung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \tag{1}$$

wobei c^2, a^2 gegebene Konstanten sind [1].

In den folgenden Absätzen betrachten wir die Lösung dieser partiellen Differentialgleichung, die in dem abgeschlossenen Gebiete $D: 0 \leqq x \leqq L$, $0 \leqq t \leqq T$ definiert ist und eine der folgenden Varianten von Randbedingungen

$$\text{(2)} \quad \begin{array}{lll} \text{I.: } u(t, 0) = 0, & \text{II.: } u(t, 0) = 0, & \text{III.: } u_x(t, 0) = 0 \\ \phantom{\text{I.: }} u(t, L) = 0; & \phantom{\text{II.: }} u_x(t, L) = 0; & \phantom{\text{III.: }} u_x(t, L) = 0 \end{array}$$

für $t \in \langle 0, T \rangle$ erfüllt.

Ferner nehmen wir an, dass diese Lösung den Anfangsbedingungen

$$u(0, x) = \varphi_1(x), \quad u_t(0, x) = \varphi_2(x), \quad x \in \langle 0, L \rangle \tag{3}$$

genügt, wobei die Funktionen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ in dem abgeschlossenen Intervalle $\langle 0, L \rangle$ stetig sind, in einem Intervalle $\langle -\delta, L + \delta \rangle$, $\delta > 0$, eine endliche Variation besitzen und für einzelne Varianten von Randbedingungen folgende Beziehungen erfüllen:

$$\text{(4a)} \quad \text{I.} \quad \varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_1(L) = 0, \quad \varphi_2(L) = 0$$

$$\text{(4b)} \quad \text{II.} \quad \varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_1'(L) = 0, \quad \varphi_2'(L) = 0$$

$$\text{(4c)} \quad \text{III.} \quad \varphi_1'(0) = 0, \quad \varphi_2'(0) = 0, \quad \varphi_1'(L) = 0, \quad \varphi_2'(L) = 0$$

Wir betrachten die Fouriertransformation

$$u_n(t) = \int_0^L u(t, x)\, \omega(\lambda_n x)\, \mathrm{d}x \tag{5}$$

wobei die Funktion $\omega(\lambda_n x)$ folgende Bedeutung für die einzelnen Varianten annimmt:

(6a) $$\mathrm{I}: \omega(\lambda_n x) = \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(6b) $$\mathrm{II}: \omega(\lambda_n x) = \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(6c) $$\mathrm{III}: \omega(\lambda_n x) = \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ferner bezeichnen wir

(7) $$A_n = \int_0^L \varphi_1(x)\, \omega(\lambda_n x)\, \mathrm{d}x, \quad B_n = \int_0^L \varphi_2(x)\, \omega(\lambda_n x)\, \mathrm{d}x$$

und nehmen an, dass folgende Beziehungen

(8) $$(n+1)^2 \mid A_{n+1} \mid \leqq n^2 \mid A_n \mid, \quad (n+1)^2 \mid B_{n+1} \mid \leqq n^2 \mid B_n \mid, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(9) $$\int_1^\infty x^2 A(x)\, \mathrm{d}x < \infty, \qquad \int_1^\infty x^2 B(x)\, \mathrm{d}x < \infty$$
$$A(x) > 0,\ B(x) > 0,\ A(n) = \mid A_n \mid,\ B(n) = \mid B_n \mid,$$

gelten. Wir nehmen weiter an, dass für die Lösung $u(t, x)$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}$ gleichmässig stetige Funktionen in dem Intervalle $\langle 0, L\rangle$ mit Rücksicht auf t sind. Es sei

(10) $$E[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}.$$

Die Fouriertransformation

$$\int_0^L E[u]\, \omega(\lambda_n x)\, \mathrm{d}x$$

ergibt unter gegebenen Voraussetzungen über die Funktion $u(t, x)$ die gewöhnliche Differentialgleichung

(11) $$\frac{d^2 u_n(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{c^2 \lambda_n^2}{1 + a^2 \lambda_n^2}\, u_n(t) = 0$$

die die Fourier-Transformierte $u_n(t)$ zusammen mit den Anfangsbedingungen

(12) $$u_n(0) = \int_0^L \varphi_1(x)\, \omega(\lambda_n x)\, \mathrm{d}x = A_n$$
$$u_n'(0) = \int_0^L \varphi_2(x)\, \omega(\lambda_n x)\, \mathrm{d}x = B_n$$

erfüllen soll. Da die Funktionen $\omega(\lambda_n x)$ in dem Intervalle $\langle 0, L\rangle$ ein vollständiges System von Eigenfunktionen darstellen, besteht der folgende Satz:

Unter gegebenen Voraussetzungen über die Funktionen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ gibt es genau eine Lösung der Randwertaufgabe (1), (2), (3), die in der Form der Reihe

$$u(t, x) = \frac{2}{L}\left\{u_0(t)\,\omega(\lambda_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\,\omega(\lambda_n x)\right\} \tag{13}$$

geschrieben werden kann, wobei die Funktionen $u_n(t)$ die Form

$$u_n(t) = A_n \cos\frac{c\lambda_n t}{\sqrt{1 + a^2\lambda_n^2}} + B_n \frac{\sqrt{1 + a^2\lambda_n^2}}{c\lambda_n} \sin\frac{c\lambda_n t}{\sqrt{1 + a^2\lambda_n^2}} \tag{14}$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

annehmen und die Funktion $u_0(t)$ für die einzelnen Varianten von Randbedingungen folgende Formeln

$$\text{I.: } u_0(t) = 0 \tag{15a}$$

$$\text{II.: } u_0(t) = A_0 \cos\frac{c\pi t}{\sqrt{4L^2 + a^2\pi^2}} + B_0 \frac{\sqrt{4L^2 + a^2\pi^2}}{c\pi} \sin\frac{c\pi t}{\sqrt{4L^2 + a^2\pi^2}} \tag{15b}$$

$$\text{III.: } u_0(t) = A_0 + B_0 t$$

erfüllt.

Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir zuerst in dem agbeschlossenen Gebiete $D : 0 \leqq x \leqq L,\ 0 \leqq t \leqq T$ die gleichmässige Konvergenz von Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\,\omega(\lambda_n x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\beta_n t\omega(\lambda_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{1}{\beta_n} \sin\beta_n t\omega(\lambda_n x), \tag{16}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t)\,\omega(\lambda_n x) = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n\beta_n^2 \cos\beta_n t\omega(\lambda_n x) - \sum_{n=1}^{\infty} B_n\beta_n \sin\beta_n t\omega(\lambda_n x), \tag{17}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\,\omega''(\lambda_n x) = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n\lambda_n^2 \cos\beta_n t\omega(\lambda_n x) - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\lambda_n^2}{\beta_n} \sin\beta_n t\omega(\lambda_n x), \tag{18}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t)\,\omega''(\lambda_n x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\beta_n^2\lambda_n^2 \cos\beta_n t\omega(\lambda_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\lambda_n^2\beta_n \sin\beta_n t\omega(\lambda_n x), \tag{19}$$

wobei wir die Bezeichnung $\beta_n = \dfrac{c\lambda_n}{\sqrt{1 + a^2\lambda_n^2}}$ benützt haben und durch die Striche die Ableitungen nach der jeweiligen unabhängigen Veränderlichen gekennzeichnet haben.

Mit Rücksicht darauf, dass in dem Gebiete D die Beziehung

$$|\cos\beta_n t\omega(\lambda_n x)| \leqq 1 \tag{20}$$

gilt, genügt es, nur die Konvergenz von Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|,\quad \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|\,\lambda_n^2,\quad \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|\,\beta_n^2,\quad \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|\,\lambda_n^2\beta_n^2 \tag{21}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \frac{1}{|\beta_n|},\quad \sum_{n=1}^{\infty} |B_n\beta_n|,\quad \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \frac{\lambda_n^2}{|\beta_n|},\quad \sum_{n=1}^{\infty} |B_n\beta_n|\,\lambda_n^2 \tag{22}$$

zu betrachten, da diese Reihen absolut konvergente Majoranten zu den Reihen (16)—(19) darstellen. Aus den Voraussetzungen (8) und (5) folgt, dass die Reihen

$\sum_{n=1}^{\infty} | A_n | n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} | B_n | n^2$ konvergent sind, so dass auch die Reihen (21) und (22)

konvergieren und damit die Reihen (16)—(19) in dem abgeshlossenen Gebiete D gleichmässig konvergieren.

Ferner kann man leicht beweisen, dass die Funktion $u(t, x)$, die in der Form (13) gegeben ist, eine Lösung der Differentialgleichung (1) darstellt, die die Randbedingungen (2) erfüllt. Aus den Voraussetzungen über die Funktionen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ folgt, dass die Lösung die Anfangsbedingungen (3) erfüllt und dass es die einzige Lösung des Problems (1), (2), (3) ist, die in der Form der Reihe (13) geschrieben werden kann.

Wir schreiben nunmehr die Differentialgleichung (1) in der Form

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{c^2}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{23}$$

und nehmen an, dass die Funktionen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ in dem Intervalle $\langle 0, L\rangle$ der Klasse C_1 gehören. Dann können wir für die Lösung der Differentialgleichung (23) mit der Variante II. von Randbedingungen (2) und mit den Anfangsbedingungen (3) das Iterationsverfahren benützen, wie es in der Arbeit [2] gezeigt ist.

Die Randwertaufgabe (23), (2), (3) ist ein Sonderfall einer Aufgabe, die in der Arbeit [2] gelöst ist, und zwar wenn wir die dort betrachteten Funktionen $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $g(t, x)$ gleich Null setzen.

Die erste Annäherung hat die Form

$$u_0(t, x) = \varphi_1(x) + t\varphi_2(x). \tag{24}$$

Wenn wir die n-te Annäherung in der Form

$$u_0(t, x) + u_1(t, x) + \ldots + u_{n-1}(t, x)$$

schreiben, erhalten wir für die Funktion $u_n(t, x)$ die allgemeine Beziehung

$$u_n(t, x) = \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^x \int_L^{x_1} \left\{ \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_{n-1}(t_2, x_2)}{\partial t_2^2} - \frac{c^2}{a^2} \frac{\partial^2 u_{n-1}(t_2, x_2)}{\partial x_2^2} \right\} \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}t_2 \, \mathrm{d}t_1 ,$$

woraus wir für die einzelnen Annäherungen die Funktionen $u_1(t, x)$, $u_2(t, x)$, ... in der Form

$$u_1(t, x) = -\frac{c^2}{a^2} \left[\frac{t^2}{2!} \varphi_1(x) + \frac{t^3}{3!} \varphi_2(x) \right],$$

$$u_2(t, x) = \frac{c^4}{a^4} \left[\frac{t^4}{4!} \varphi_1(x) + \frac{t^5}{5!} \varphi_2(x) \right] - \frac{c^2}{a^4} \left[\frac{t^2}{2!} \int_0^x \int_L^{x_1} \varphi_1(x_2) \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{t^3}{3!} \int_0^x \int_L^{x_1} \varphi_2(x_2) \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1 \right], \tag{25}$$

$$u_3(t, x) = -\frac{c^6}{a^6}\left[\frac{t^6}{6!}\varphi_1(x) + \frac{t^7}{7!}\varphi_2(x)\right] + 2\frac{c^4}{a^6}\left[\frac{t^4}{4!}\int_0^x\int_L^{x_1}\varphi_1(x_2)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{t^5}{5!}\int_0^x\int_L^{x_1}\varphi_2(x_2)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1\right] - \frac{c^2}{a^6}\left[\frac{t^2}{2!}\int_0^x\int_L^{x_1}\int_0^{x_2}\int_L^{x_3}\varphi_1(x_4)\,\mathrm{d}x_4\ldots\mathrm{d}x_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{t^3}{3!}\int_0^x\int_L^{x_1}\int_0^{x_2}\int_L^{x_3}\varphi_2(x_4)\,\mathrm{d}x_4\ldots\mathrm{d}x_1\right],$$

usw. bekommen.

Führen wir jetzt die Funktionen (24), (25) in die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(t, x)$ ein, erhalten wir die Lösung der Randwertaufgabe (23), (2)-II, (3) in der Form:

$$u(t, x) = \varphi_1(x)\cos\frac{ct}{a} + \frac{a}{c}\varphi_2(x)\sin\frac{ct}{a} +$$

$$(26) \qquad + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{2n}}\left\{\int\limits_{2n}\varphi_1(x)\,\mathrm{d}x\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\binom{n+k-1}{n}\left(\frac{ct}{a}\right)^{2k}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{a}{c}\int\limits_{2n}\varphi_2(x)\,\mathrm{d}x\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\binom{n+k-1}{n}\left(\frac{ct}{a}\right)^{2k+1}\right]\right\},$$

wo wir die Bezeichnung

$$\int\limits_{2n}\varphi_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^x\int_L^{x_1}\ldots\int_0^{x_{2n-2}}\int_L^{x_{2n-1}}\varphi_1(x_{2n})\,\mathrm{d}x_{2n}\,\mathrm{d}x_{2n-1}\ldots\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1,$$

$$\int\limits_{2n}\varphi_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^x\int_L^{x_1}\ldots\int_0^{x_{2n-2}}\int_L^{x_{2n-1}}\varphi_2(x_{2n})\,\mathrm{d}x_{2n}\,\mathrm{d}x_{2n-1}\ldots\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1,$$

benützt haben. Die Beziehung (26) stellt eine andere Form der Lösung der Randwertaufgabe (23), (2)-II, (3) dar.

Wenn wir in der Differentialgleichung (1) die Konstante a gleich Null sezten, bekommen wir die gewöhnliche Wellengleichung und die Reihe (13) geht in die Lösung der Wellengleichung mit den Anfangsbedingungen (3) und mit den Randbedingungen (2) über.

LITERATUR

[1] Love A. E.: The Mathematical Theory of Elasticity, 1952.

[2] Radochová V.: Eigenschaften der Lösung einer partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung. Arch. Math. 2, VIII, 1972.

V. Radochová
Mathematisches Institut der ČSAV
Brno, Mendlovo nám. 1
Tschechoslowakei