Osvald Demuth; V. Kmínek

О свойствах неопределённых конструктивннх интегралов Лебега-Стилтьеса

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 21 (1980), No. 4, 629--644

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/106030`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

21,4 (1980)

О СВОЙСТВАХ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОНСТРУКТИВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ЛЕБЕГА-СТИЛТЬЕСА

О. ДЕМУТ (O. DEMUTH), В. КМИНЕК (V. KMÍNEK)

Содержание: В заметке приведены необходимые и достаточные условия абсолютной непрерывности конструктивных функций относительно функций ограниченной вариации. В ней также исследуется (эффективная) дифференцируемость конструктивных функций ограниченной вариации по функциям того же типа.

Ключевые слова: Конструктивная функция, интеграл Лебега-Стилтьеса, абсолютная непрерывность относительно функций, производная функции по функции.

Classification: Primary 03F65, 26A42
Secondary 26A46, 26A24

В дальнейшем мы пользуемся определениями и обозначениями из [3] и [12]. Буквы k, l, m, n, p, q, s и t служат переменными для натуральных чисел (НЧ), i и j – переменными для целых чисел (ЦЧ), a и b – переменными для рациональных чисел (РЧ) и буквы v, w, x, y и z – переменными для конструктивных действительных чисел (КДЧ).

Мы напомним, что a) ступенчатыми остовами мы называем слова вида $a_0 \gamma a_1 \ldots \gamma a_m \delta y_1 \gamma y_2 \ldots \gamma y_m$, где m НЧ (т.е. положительное целое число), $\{a_i\}_{i=0}^{m}$ возрастающая система РЧ, $a_0 = 0$ & $a_m = 1$, $\{y_j\}_{j=1}^{m}$ система КДЧ;

б) для любых последовательности ступенчатых остовов $\{G_n\}_n$, где $\forall n\,(G_n \rightleftharpoons a_0^n \gamma a_1^n \dots \gamma a_{m_n}^n \delta y_1^n \gamma y_2^n \dots \gamma y_{m_n}^n)$, и КДЧ x и v мы посредством $P(v, \{G_n\}_n, x)$ обозначаем: существует последовательность НЧ $\{p_n\}_n$ такая, что

$$\forall n\,(p_n \le m_n \,\&\, a_{p_n-1}^n < x < a_{p_n}^n) \,\&\, (y_{p_n}^n \xrightarrow[n\to\infty]{} v);$$

в) операции для ступенчатых остовов и для их последовательностей введены в [3], где также находятся определения и результаты, связанные с измеримостью и интегрируемостью по Лебегу, в частности определения S_6-множества и классов S и L_1;

г) функциями мы называем всюду определенные конструктивные функции действительной переменной, которые постоянны на $\wedge x\,(x \le 0)$ и на $\wedge x\,(1 \le x)$.

<u>Определения</u>. Пусть $\mathcal{F}$ и φ функции, ψ равномерно непрерывная функция, H сегмент, z КДЧ и p и q НЧ. Тогда

1) $BVS(z, \mathcal{F}, H)$ обозначает: z является верхней границей вариационных сумм функции $\mathcal{F}$ на сегменте H;

$$Var(z, \mathcal{F}, H) \rightleftharpoons (BVS(z, \mathcal{F}, H) \,\&\, \neg \exists m\, BVS(z-2^{-m}, \mathcal{F}, H));$$

2) мы скажем, что $\mathcal{F}$ функция ограниченной вариации на $0 \Delta 1$, и будем писать $VB(\mathcal{F})$, если $\exists y\, Var(y, \mathcal{F}, 0\Delta 1)$;

3) $\mathcal{F} * \varphi$ функция такая, что $\forall x\,(\mathcal{F} * \varphi(x) = \mathcal{F}(\varphi(x)))$; h_z функция такая, что $\forall x\,(h_z(x) = z \cdot max(min(x,1), 0))$; $\alpha(\mathcal{F}, \varphi) \rightleftharpoons \forall a\, VB(\mathcal{F} - a \cdot \varphi)$ и $\Delta(\mathcal{F}, H) \rightleftharpoons (\mathcal{F}(\partial_n(H)) - \mathcal{F}(\partial_\lambda(H)))$;

4) если $VB(\varphi)$, то $V[\varphi]$, $V^+[\varphi]$ и $V^-[\varphi]$ неубывающие функции такие, что $V[\varphi](0) = V^+[\varphi](0) = V^-[\varphi](0) = 0$ и для всякого сегмента K КДЧ $\Delta(V[\varphi], K)$ (соотв. $\Delta(V^+[\varphi], K)$, соотв. $\Delta(V^-[\varphi], K)$) является вариацией (соотв. положительной вариацией, соотв. негативной

вариацией) функции φ на K;

5) $\langle \omega, \psi \rangle \llcorner H \lrcorner$ КДЧ, являющееся колебанием функции ψ на H;

6) $\mathfrak{a}(\mathcal{F}, \psi, p, q)$ обозначает: для любой системы неперекрывающихся рациональных сегментов $\{Q_j\}_{j=1}^{s}$ верно

$$\sum_{j=1}^{s} \langle \omega, \psi \rangle \llcorner Q_j \lrcorner < 2^{-q} \supset \sum_{j=1}^{s} |\Delta(\mathcal{F}, Q_j)| < 2^{-p};$$

7) $\mathfrak{a}(\mathcal{F}, \psi) \rightleftharpoons \forall m \exists n\, \mathfrak{a}(\mathcal{F}, \psi, m, n)$ и
$\mathfrak{a}_{\text{кл}}(\mathcal{F}, \psi) \rightleftharpoons \forall m \neg\neg \exists n\, \mathfrak{a}(\mathcal{F}, \psi, m, n)$;

8) $D(z, \mathcal{F}, \varphi, x)$ (соотв. $D_{\text{кл}}(z, \mathcal{F}, \varphi, x)$) значит: для всякого НЧ k существует (соотв. не может не существовать) НЧ ℓ такое, что $k \leq \ell \,\&\, \exists a b (x - 2^{-\ell} < a < x < b < x + 2^{-\ell} \,\&\, \neg(\varphi(a) = \varphi(x) \vee \varphi(b) = \varphi(x))) \,\&$
$\& \forall y (|y - x| \leq 2^{-\ell} \supset |\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x) - z \cdot (\varphi(y) - \varphi(x))| \leq$
$\leq 2^{-k} \cdot |\varphi(y) - \varphi(x)|)$;
если $x \in 0 \triangledown 1$, то $D(z, \mathcal{F}, x) \rightleftharpoons D(z, \mathcal{F}, h_1, x)$ и
$D_{\text{кл}}(z, \mathcal{F}, x) \rightleftharpoons D_{\text{кл}}(z, \mathcal{F}, h_1, x)$;

9) в случае, что $VB(\varphi)$ и $\mathcal{C}$ свойство КДЧ, мы скажем, что $\mathcal{C}$ выполнено для $V[\varphi]$ -почти всех КДЧ из H, если для всякого НЧ k существует S_6 -множество $\mathcal{G}$ меры меньшей чем 2^{-k} такое, что $\forall x (x \in H \,\&\, \neg(V[\varphi](x) \in \mathcal{G}) \supset \mathcal{C}(x))$.

<u>Замечание 1</u>. 1) Согласно теореме 6.10 из [2] любая функция ограниченной вариации на $0 \triangle 1$ является равномерно непрерывной.

2) Пусть $\{\mathcal{F}_n\}_n$ последовательность функций и $\{z_n\}_n$ последовательность КДЧ такие, что

$$\forall n\, Var(z_n, \mathcal{F}_n, 0 \triangle 1) \,\&\, \forall n p\, BVS(2^{-n}, \mathcal{F}_n - \mathcal{F}_{n+p}, 0 \triangle 1).$$

Тогда существуют функция $\mathcal{F}$ и КДЧ x, для которых выполнено $\forall m\,(BVS(2^{-m}, \mathcal{F}_m - \mathcal{F}, 0\Delta 1)\ \&\ |x_m - x| \leq 2^{-m})\ \&$
$\&\ Var(x, \mathcal{F}, 0\Delta 1)\ \&\ \mathcal{F}(0) = 0$.

<u>Определения</u>. Пусть φ и ψ функции, $VB(\psi)$, F ступенчатый остов, $\{F_n\}_m$ последовательность ступенчатых остовов и v КДЧ. Тогда мы

1) определим $F \mathbin{\tau} v \rightleftharpoons (F \mathbin{\tau} 0 \gamma 1 \delta v)$ и $\{F_m\}_m - v \rightleftharpoons \{F_m \mathbin{\tau} v\}_m$;

2) посредством ${}^{\varphi}\mathscr{C}$ обозначим алгорифм такой, что для любых ступенчатого остова G, $G \equiv a_0 \gamma a_1 \ldots \gamma a_m \delta y_1 \gamma y_2 \ldots \gamma y_m$, и КДЧ x выполнено
$$\widetilde{{}^{\varphi}\mathscr{C}_G}(x) \simeq \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot (\varphi(min(x, a_j)) - \varphi(min(x, a_{j-1})));$$

3) для любых КДЧ x и y, $0 \leq x \leq y \leq 1$, определим ${}^{o}\!\int_x^y F d\varphi \rightleftharpoons (\widetilde{{}^{\varphi}\mathscr{C}_F}(y) - \widetilde{{}^{\varphi}\mathscr{C}_F}(x))$;

4) обозначим $\{F_m\}_m \in {}^{\psi}LS \rightleftharpoons \forall m\,({}^{o}\!\int_0^1 |F_m \mathbin{\tau} F_{m+1}|_o\, d\,V[\psi] < 2^{-m})$.

<u>Замечание 2</u>. Для любых функций φ и ψ, $VB(\psi)$, ступенчатых остовов F и G, КДЧ v и последовательностей ступенчатых остовов $\{F_m\}_m$ и $\{G_m\}_m$ выполнено

1) а) $\widetilde{{}^{\varphi}\mathscr{C}_{(F \tau v)}} = \widetilde{{}^{\varphi}\mathscr{C}_F} - v \cdot \varphi$, $\widetilde{{}^{\varphi}\mathscr{C}_{(v \dot{\circ} F)}} = v \cdot \widetilde{{}^{\varphi}\mathscr{C}_F}$,
$\widetilde{{}^{\varphi}\mathscr{C}_{(F \dot{+} G)}} = \widetilde{{}^{\varphi}\mathscr{C}_F} + \widetilde{{}^{\varphi}\mathscr{C}_G}$, $\widetilde{{}^{h_1}\mathscr{C}_F} = \mathscr{C}_F$ (см. [3]), $\widetilde{{}^{\varphi}\mathscr{C}_F}(0) = 0$,
$VB(\widetilde{{}^{\psi}\mathscr{C}_F})\ \&\ \forall x\,(0 \leq x \leq 1 \supset V[\widetilde{{}^{\psi}\mathscr{C}_F}](x) = {}^{o}\!\int_0^x |F|_o\, d\,V[\psi])$;

б) $\{F_m\}_m \in {}^{h_1}LS \equiv \{F_m\}_m \in L_1$;

2) если $\{F_m\}_m \in {}^{\psi}LS$ и $\{G_m\}_m \in {}^{\psi}LS$, то

а) $|\{F_m\}_m| \in {}^{\psi}LS$, $(\{F_m\}_m - v) \in {}^{\psi}LS$, $v \cdot \{F_m\}_m \in {}^{\psi}LS$ и $(\{F_m\}_m + \{G_m\}_m) \in {}^{\psi}LS$; $\forall m\, BVS(2^{-m}, \widetilde{{}^{\psi}\mathscr{C}_{F_m}} - \widetilde{{}^{\psi}\mathscr{C}_{F_{m+1}}}, 0\Delta 1)$
и, следовательно, последовательность равномерно непрерывных функций $\{\widetilde{{}^{\psi}\mathscr{C}_{F_m}}\}_m$ равномерно сходится;

б) для всяких КДЧ x и y, $0 \leq x \leq y \leq 1$, мы посредством $\int_x^y \{F_n\}_n \, d\psi$ обозначим КДЧ, являющееся пределом последовательности КДЧ $\{\widetilde{{}^{\psi}\mathscr{E}_{F_n}}(y) - \widetilde{{}^{\psi}\mathscr{E}_{F_n}}(x)\}_n$.

<u>Определения</u>. Пусть $\mathcal{F}$, φ и ψ функции, $VB(\psi)$, и $\{F_n\}_n \in {}^{\psi}LS$. Тогда мы скажем, что

а) $\mathcal{F}$ на $0 \vartriangle 1$ абсолютно непрерывна относительно φ, и будем писать $AC(\mathcal{F}, \varphi)$, если существует последовательность ступенчатых остовов $\{G_n\}_n$ такая, что
$\forall n \, BVS(2^{-n}, \mathcal{F} - \widetilde{{}^{\varphi}\mathscr{E}_{G_n}}, 0 \vartriangle 1)$;

б) $\mathcal{F}$ является на $0 \vartriangle 1$ неопределенным интегралом Лебега-Стилтьеса от $\{F_n\}_n$ по ψ, и будем писать $LS(\mathcal{F}, \{F_n\}_n, \psi)$, если $\forall x \, (0 \leq x \leq 1 \supset \mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(0) = \int_0^x \{F_n\}_n \, d\psi)$.

<u>Замечание 3</u>. Мы ввиду замечаний 1 и 2 получаем:

I) бинарное отношение AC является рефлексивным и транзитивным, в классе равномерно непрерывных функций теми же свойствами обладают бинарные отношения $\mathcal{a}$ и $\mathcal{a}_{KL}$;

II) для любых функций $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ и φ, равномерно непрерывной функции ψ и КДЧ v выполнено

1) если $AC(\mathcal{F}_1, \varphi) \,\&\, AC(\mathcal{F}_2, \varphi)$, то $AC(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2, \varphi) \,\&$
$\& \, AC(v \cdot \mathcal{F}_1, \varphi) \,\&\, (\neg(v = 0) \supset AC(\mathcal{F}_1, v \cdot \varphi))$;

2) $AC(\mathcal{F}_1, \psi) \supset \mathcal{a}(\mathcal{F}_1, \psi)$;

3) если $VB(\varphi)$, то

а) выполнено $AC(\mathcal{F}_1, \varphi)$ тогда и только тогда, когда существует $\{F_n\}_n \in {}^{\varphi}LS$, для которого верно
$LS(\mathcal{F}_1, \{F_n\}_n, \varphi)$;

б) если для $\{F_n\}_n \in {}^{\varphi}LS$ имеет место $LS(\mathcal{F}_1, \{F_n\}_n, \varphi)$, то $VB(\mathcal{F}_1) \,\&\, LS(V[\mathcal{F}_1], |\{F_n\}_n|, V[\varphi]) \,\&$ $\& \,\forall x y\, (V[\varphi](x) = V[\varphi](y) \supset \mathcal{F}_1(x) = \mathcal{F}_1(y)) \,\&$ $\forall y\, LS(\mathcal{F}_1 - y\cdot\varphi, \{F_n\}_n - y, \varphi)$ и, следовательно, $\alpha(\mathcal{F}_1, \varphi)$;

4) $(\alpha(\mathcal{F}_1, \varphi) \supset VB(\varphi) \,\&\, \alpha(\varphi, \mathcal{F}_1) \,\&\, (AC(\mathcal{F}_2, \varphi) \supset$ $\supset \alpha(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)))$.

<u>Определения</u>. Пусть $\mathcal{F}$ и φ функции, $VB(\varphi)$, и $\{F_n\}_n \in S$.

1) Мы скажем, что $\mathcal{F}$ на $0 \Delta 1$ $V[\varphi]$-почти равномерно дифференцируема по φ, и будем писать ${}^{\varphi}Д(\mathcal{F})$, если для всякого НЧ m существуют S_6-множество $\mathcal{G}$ меры меньшей чем 2^{-m}, равномерно непрерывная функция g и последовательность НЧ $\{p_k\}_k$ такие, что $\forall x y k\, (x \in 0 \Delta 1 \,\&\, \neg(V[\varphi](x) \in$ $\in \mathcal{G}) \,\&\, |y - x| \leq 2^{-p_k} \supset |\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x) - g(x)\cdot(\varphi(y) - \varphi(x))| \leq$ $2^{-k}\cdot|\varphi(y) - \varphi(x)|)$.

2) Если $V[\varphi](1) \leq 1$, то мы посредством ${}^{\varphi}Д(\mathcal{F}, \{F_n\}_n)$ обозначим: верно ${}^{\varphi}Д(\mathcal{F})$, для $V[\varphi]$-почти всех КДЧ x из $0 \Delta 1$ выполнено $\exists z (P(z, \{F_n\}_n, V[\varphi](x)) \,\&\, D(z, \mathcal{F}, \varphi, x))$ и для почти всех КДЧ y из $0 \Delta 1$ имеет место $(V[\varphi](1) \leq y \supset$ $\supset P(0, \{F_n\}_n, y))$.

Мы заметим, что для любой функции $\mathcal{F}$ выполнено $(AC(\mathcal{F}, h_1) \equiv AC(\mathcal{F})) \,\&\, (\alpha(\mathcal{F}, h_1) \equiv \alpha(\mathcal{F})) \,\&\, (a(\mathcal{F}, h_1) \equiv a(\mathcal{F})) \,\&$ $(a_{кл}(\mathcal{F}, h_1) \equiv a_{кл}(\mathcal{F})) \,\&\, ({}^{h_1}Д(\mathcal{F}) \equiv Д(\mathcal{F}))$ (см. [6], [8], [11] и [12]). Ввиду этого обстоятельства следующие результаты являются обобщениями результатов из [3],[6],[7] и [8]. Контрпримеры можно найти в [5] и [7].

Соответствующие классические определения и результаты содержатся в книге А. Лебега [1].

Лемма 1. Пусть φ функция, $VB(\varphi)$. Тогда $AC(\varphi, V[\varphi]) \,\&\, AC(V[\varphi], \varphi)$.

Доказательство. Пусть n НЧ. Тогда можно построить возрастающую систему РЧ $\{a_i^n\}_{i=0}^{m_n}$ такую, что $a_0^n = 0 \,\&\, a_{m_n}^n = 1 \,\&\, V[\varphi](1) - 2^{-n-3} < \sum_{j=1}^{m_n} |\Delta(\varphi, a_{j-1}^n \vartriangle a_j^n)| \le V[\varphi](1)$.

Ввиду теоремы 1.3 из [2] существуют дизъюнктные системы НЧ $\mathcal{I}_0$, $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$, для которых верно $\forall j((1 \le j \le m_n \equiv \exists i(0 \le i \le 2 \,\&\, j \in \mathcal{I}_i)) \,\&\, (j \in \mathcal{I}_0 \supset |\Delta(\varphi, a_{j-1}^n \vartriangle a_j^n)| < \frac{1}{m_n}\cdot 2^{-n-3}) \,\&\, (j \in \mathcal{I}_1 \supset \Delta(\varphi, a_{j-1}^n \vartriangle a_j^n) < -\frac{1}{m_n}\cdot 2^{-n-4}) \,\&\, (j \in \mathcal{I}_2 \supset \Delta(\varphi, a_{j-1}^n \vartriangle a_j^n) > \frac{1}{m_n}\cdot 2^{-n-4}))$.
Тогда $0 \le \sum_{j \in \mathcal{I}_0} \Delta(V[\varphi], a_{j-1}^n \vartriangle a_j^n) + \sum_{j \in \mathcal{I}_1} \Delta(V^+[\varphi], a_{j-1}^n \vartriangle a_j^n) + \sum_{j \in \mathcal{I}_2} \Delta(V^-[\varphi], a_{j-1}^n \vartriangle a_j^n) < 2^{-n-2}$.

Мы для любых ЦЧ i и j, $0 \le i \le 2 \,\&\, j \in \mathcal{I}_i$, определим $b_j^n \rightleftharpoons (-1)^i$ и $F_n \rightleftharpoons a_0^n \gamma a_1^n \ldots \gamma a_{m_n}^n \delta b_1^n \gamma b_2^n \ldots \gamma b_{m_n}^n$. Тогда, очевидно, выполнено $BVS(2^{-n-1}, \widetilde{{}^{V[\varphi]}\mathcal{E}}_{F_n} - \varphi, 0 \vartriangle 1) \,\&\, BVS(2^{-n-1}, \widetilde{{}^{\varphi}\mathcal{E}}_{F_n} - V[\varphi], 0 \vartriangle 1)$.

Можно доказать следующие утверждения (ср. лемму 2 из [10]).

Лемма 2. Пусть ψ неубывающая функция. Тогда $\forall y(\psi(0) \le y \le \psi(1) \,\&\, \neg\exists a(\psi(a) = y) \supset \exists x(x \in 0 \triangledown 1 \,\&\, \psi(x) = y \,\&\, \forall p \exists q \forall v(|\psi(v) - y| \le 2^{-q} \supset |v - x| \le 2^{-p})))$.

Лемма 3. Пусть ψ неубывающая функция и $\mathcal{F}$ равномерно непрерывная функция, пусть $\psi(0) = 0 \,\&\, \psi(1) \le 1 \,\&\, \forall x y(\psi(x) = \psi(y) \supset \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(y))$. Тогда существует равномерно непрерывная функция $\overline{\mathcal{F}}$ такая, что

(1) $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}} * \psi \,\&\, \forall y(\psi(1) \le y \supset \overline{\mathcal{F}}(y) = \overline{\mathcal{F}}(\psi(1)))$.

Замечание 4. Пусть φ функция, $VB(\varphi)$.

1) С помощью теоремы 1.3 из [2] легко доказать ${}^{\varphi}Д(\varphi)$.

2) Пусть $V[\varphi](1) \leq 1$ и $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ функции, для которых верно ${}^{\varphi}Д(\mathcal{F}_1) \& {}^{\varphi}Д(\mathcal{F}_2) \& VB(\mathcal{F}_2) \& \forall xy(|V[\mathcal{F}_2](x) - V[\mathcal{F}_2](y)| \leq |V[\varphi](x) - V[\varphi](y)|)$.

Пусть m НЧ.

а) Согласно определению и ввиду замечания 1 из [4], замечания 2 из [9], теоремы 1.3 из [2], лемм 1 и 2 и замечания 3 существуют НЧ t и τ, S_σ-множество $\mathcal{G}$ меры меньшей чем 2^{-m-3}, равномерно непрерывные функции g_1 и g_2, возрастающая последовательность НЧ $\{p_k\}_k$ и последовательность дизъюнктных сегментов $\{K_q\}_q$ такие, что

$$\begin{aligned}&|g_1| \leq t \,\&\, \mathfrak{a}(V[\mathcal{F}_2], \mathcal{F}_2, m+1, t) \,\&\, \forall xy(|x-y| \leq 2^{-p_1} \supset \\ &\supset |g_2(x) - g_2(y)| < 2^{-t-4}) \,\&\, \forall ixyk(1 \leq i \leq 2 \,\&\, x \in 0 \triangle 1 \,\&\\ &\&\, \neg(V[\varphi](x) \in \mathcal{G}) \,\&\, |y-x| \leq 2^{-p_k} \supset |\mathcal{F}_i(y) - \mathcal{F}_i(x) - g_i(x) \cdot \\ &\cdot(\varphi(y) - \varphi(x))| \leq 2^{-k-2t-10} \cdot |\varphi(y) - \varphi(x)|) \,\&\, (\tau = 1 \supset V[\varphi](1) < \\ &< 2^{-m-2} \,\&\, K_1 \equiv 0 \triangle 1) \,\&\, (1 < \tau \supset 2^{-m-3} < V[\varphi](1)) \,\&\, \forall x(x \in \\ &\in 0 \triangledown 1 \,\&\, (V[\varphi](x) \in \mathcal{G} \vee \exists a(x = a)) \supset \exists q(x \in (K_q)^0)),\end{aligned} \tag{2}$$

ряд $\sum\limits_q \Delta(V[\varphi], K_q)$ сходится к КДЧ меньшему чем 2^{-m-2}, верно $\overline{\mathcal{H}}(\{K_q\}_q)$ (см. [11]), если $1 < \tau$, то $\partial_\lambda(K_1) = 0 \,\&$ $\partial_m(K_2) = 1$ и $[V[\varphi], \{K_q\}_q]$ (см. [11]) возрастающая на $0 \triangle 1$ функция. Следовательно, существует S_σ-множество $\mathcal{G}$ меры меньшей чем 2^{-m-2}, равномерно непрерывные функции f_1 и f_2 и последовательность НЧ $\{s_k\}_k$, для которых выполнено

$$\begin{aligned}&\forall qx(x \in K_q \supset V[\varphi](x) \in \mathcal{G}) \,\&\, \forall ky(|y - V[\varphi](1)| \leq 2^{-s_k} \supset y \in \\ &\in \mathcal{G}) \,\&\, \forall xyk(\neg(V[\varphi](x) \in \mathcal{G}) \,\&\, |V[\varphi](y) - V[\varphi](x)| \leq 2^{-s_k} \supset \\ &\supset |y - x| \leq 2^{-p_k}) \,\&\, \forall i\, (1 \leq i \leq 2 \supset (\tau = 1 \supset f_i = 0) \,\&\\ &\&\, (1 < \tau \supset g_i = f_i * [V[\varphi], \{K_q\}_q] \,\&\, \forall y(V[\varphi](1) \leq y \leq\end{aligned}$$

$\leq 1 \& \neg (y \in \mathcal{G}) \supset f_i(y) = 0)))$.

б) Согласно теореме 1.3 из [2] можно построить систему рациональных сегментов $\{Q_j\}_{j=1}^{2^{r_1}}$ и систему НЧ $\{i_j\}_{j=1}^{2^{r_1}}$ такие, что $\forall j (1 \leq j \leq 2^{r_1} \supset (Q_j \equiv (j-1)\cdot 2^{r_1} \Delta j \cdot 2^{r_1}) \& (i_j = 1 \supset$ $\supset |g_2(j\cdot 2^{-r_1})| < 2^{-t-2} \& \neg \exists q (Q_j \subseteq K_q)) \& (1 < i_j \supset (2^{-t-3} <$ $< |g_2(j\cdot 2^{-r_1})| \vee \exists q (Q_j \subseteq K_q))))$.

Тогда ввиду (2) $\sum_{1 \leq j \leq 2^{r_1} \& i_j = 1} \langle \omega, \mathcal{F}_2 \rangle_{\llcorner} Q_j < 2^{-t}$ и, следовательно,

$\sum_{1 \leq j \leq 2^{r_1} \& i_j = 1} |\Lambda (V[\mathcal{F}_2] . Q_j)| < 2^{-m-1}$ и существует S_σ-множество $\mathcal{L}$ меры меньшей чем 2^{-m}, для которого верно $\forall x (x \in 0 \Delta 1 \&$ $(\exists q (x \in K_q) \vee \exists j (1 \leq j \leq 2^{r_1} \& i_j = 1 \& x \in Q_j)) \supset V[\mathcal{F}_2](x) \in \mathcal{L})$

и, следовательно, можно построить равномерно непрерывную функцию g такую, что

$$\forall x (\neg (V[\mathcal{F}_2](x) \in \mathcal{L}) \supset g(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)}).$$

Пусть s НЧ и x и y КДЧ такие, что $\neg (V[\mathcal{F}_2](x) \in \mathcal{L}) \&$ $|y - x| \leq 2^{-r_s}$. Тогда ввиду свойств $\mathcal{L}$ и (2) $x \in 0 \nabla 1 \& |g_2(x)| >$ $> 2^{-t-4} \& |\mathcal{F}_2(y) - \mathcal{F}_2(x)| \geq 2^{-t-5} . |\varphi(y) - \varphi(x)| \& |\varphi(y) - \varphi(x) -$ $- \frac{1}{g_2(x)} \cdot (\mathcal{F}_2(y) - \mathcal{F}_2(x))| \leq 2^{-s-1} . |\mathcal{F}_2(y) - \mathcal{F}_2(x)|$
и, следовательно, $|\mathcal{F}_1(y) - \mathcal{F}_1(x) - g(x) \cdot (\mathcal{F}_2(y) - \mathcal{F}_2(x))| \leq$ $2^{-s} \cdot |\mathcal{F}_2(y) - \mathcal{F}_2(x)|$.

Итак, мы доказали ${}^{\mathcal{F}_2}Д(\varphi) \& {}^{\mathcal{F}_2}Д(\mathcal{F}_1)$.

<u>Лемма 4</u>. Пусть ψ неубывающая функция, $\mathcal{F}$ и $\bar{\mathcal{F}}$ функции и $\{F_n\}_n \in S$ такие, что $\psi(0) = 0 \& \psi(1) \leq 1$ и (1).
Тогда

1) $AC(\mathcal{F},\psi) \equiv AC(\bar{\mathcal{F}}), VB(\mathcal{F}) \equiv VB(\bar{\mathcal{F}}), \alpha(\mathcal{F},\psi) \equiv \alpha(\bar{\mathcal{F}})$, $a(\mathcal{F},\psi) \equiv a(\bar{\mathcal{F}})$, $a_{k\ell}(\mathcal{F},\psi) \equiv a_{k\ell}(\bar{\mathcal{F}})$;

2) ${}^{\psi}Д(\mathcal{F}) \equiv Д(\bar{\mathcal{F}}), \forall x z (\neg \exists a (\psi(x) = \psi(a)) \supset (D(z,\mathcal{F},\psi,x) \equiv$

$\equiv \mathcal{D}(x,\overline{\mathcal{F}},\psi(x)))\ \&\ (\mathcal{D}_{кл}(x,\mathcal{F},\psi,x) \equiv \mathcal{D}_{кл}(x,\overline{\mathcal{F}},\psi(x))))$

и, следовательно, ${}^{\psi}Д(\mathcal{F},\{F_n\}_n) \equiv Д(\overline{\mathcal{F}},\{F_n\}_n)$;

3) $AC(\mathcal{F},\psi) \equiv (\alpha(\mathcal{F},\psi)\ \&\ \mathcal{a}(\mathcal{F},\psi)) \equiv (\alpha(\mathcal{F},\psi)\ \&\ \mathcal{a}_{кл}(\mathcal{F},\psi)) \equiv$ $({}^{\psi}Д(\mathcal{F})\ \&\ \mathcal{a}(\mathcal{F},\psi))$.

Доказательство. Ввиду замечания 3, части 2а) замечания 4, леммы 2, замечания 1 из [8] и замечания 1 из [12] нам достаточно доказать $AC(\overline{\mathcal{F}}) \supset AC(\mathcal{F},\psi)$. Но это легко следует из определений и леммы 2 из [7].

Лемма 5. Пусть φ функция, $VB(\varphi)\ \&\ V[\varphi](1) \leq 1$. Тогда существуют функция $\overline{\varphi}$ и $\{\Phi_n\}_n \in L_1$ такие, что

(3) $AC(\overline{\varphi})\ \&\ \varphi = \overline{\varphi} * V[\varphi]\ \&\ \forall y (V[\varphi](1) \leq y \supset \overline{\varphi}(y) = \overline{\varphi}(V[\varphi](1)))$,

(4) $\forall y (0 \leq y \leq 1 \supset \overline{\varphi}(y) - \overline{\varphi}(0) = \int_0^y \{\Phi_n\}_n)\ \&\ \forall n (\sigma(\Phi_n) \leq 1)$

(см. [3]) и, следовательно,

а) $Д(\overline{\varphi},\{\Phi_n\}_n)$ и для почти всех КДЧ y из $0 \triangle 1$ выполнено $\exists x (P(x,\{\Phi_n\}_n, y)\ \&\ \mathcal{D}(x,\overline{\varphi},y)\ \&\ (0 \leq y \leq$ $\leq V[\varphi](1) \supset |x| = 1)\ \&\ (V[\varphi](1) \leq y \supset x = 0))$,

б) ${}^{V[\varphi]}Д(\varphi,\{\Phi_n\}_n)\ \&\ {}^{\varphi}Д(V[\varphi],\{\Phi_n\}_n)$.

Доказательство. Ввиду лемм 1, 3 и 4 и замечания 3 можно построить функцию $\overline{\varphi}$ такую, что (3) и, следовательно,

$$VB(\overline{\varphi})\ \&\ \forall y ((0 \leq y \leq V[\varphi](1) \supset V[\overline{\varphi}](y) = y)\ \&\ (V[\varphi](1) \leq y \supset V[\overline{\varphi}](y) = V[\overline{\varphi}](V[\varphi](1)))) . \tag{5}$$

Согласно следствию теоремы 2 и замечанию 3 из [8] существует $\{G_n\}_n \in L_1$ такое, что

$\forall y (0 \leq y \leq 1 \supset \overline{\varphi}(y) - \overline{\varphi}(0) = \int_0^y \{G_n\}_n\ \&\ V[\overline{\varphi}](y) = \int_0^y |\{G_n\}_n|)\ \&$

$\& Д(\overline{\varphi}, \{G_n\}_n) \& Д(V[\overline{\varphi}], |\{G_n\}_n|)$. Мы для всякого НЧ n определим $\Phi_n \rightleftharpoons \lambda_0(G_n, 1)$. Тогда ввиду леммы 1 из [3], замечания 1 из [8] и теоремы 6 из [3] $\{\Phi_n\}_n \in L_1$ и мы на основании (5) получаем $\{\Phi_n\}_n = \{G_n\}_n$, (4) и часть а) утверждения леммы. Для завершения доказательства достаточно использовать лемму 4 и замечание 4.

<u>Замечание 5</u>. Пусть $\{F_n\}_n \in L_1, \{G_n\}_n \in S$, а $\{\Phi_n\}_n \in L_1$ такое, что $\forall n\,(\sigma(\Phi_n) \leq 1)$. Тогда легко доказать, что $(\{F_n\}_n \cdot \{\Phi_n\}_n) \in L_1$ и $(\{G_n\}_n \cdot \{\Phi_n\}_n) \in S$ (лемма 1 из [3]).

<u>Теорема 1</u>. Пусть φ и $\mathcal{F}$ функции, $VB(\varphi) \& V[\varphi](1) \leq 1$. Тогда существуют функция $\overline{\varphi}$ и $\{\Phi_n\}_n \in L_1$, для которых верно (3), (4) и ${}^{V[\varphi]}Д(\varphi, \{\Phi_n\}_n)$ и выполнено:

1) для любого $\{F_n\}_n \in {}^{\varphi}LS$ существует $\{\overline{F}_n\}_n \in L_1$ такое, что а) $(\{\overline{F}_n\}_n \cdot \{\Phi_n\}_n) \in L_1$,

$$(6)\quad \begin{aligned} &\forall x\,(0 \leq x \leq 1 \supset \int_0^x \{F_n\}_n\, d\varphi = \int_0^{V[\varphi](x)} (\{\overline{F}_n\}_n \cdot \{\Phi_n\}_n)\ \& \\ &\& \int_0^x \{F_n\}_n\, dV[\varphi] = \int_0^{V[\varphi](x)} \{\overline{F}_n\}_n) \end{aligned}$$

и для почти всех КДЧ y из $0 \triangle 1$ верно $V[\varphi](1) \leq y \supset P(0, \{\overline{F}_n\}_n, y)$;

б) если имеет место $LS(\mathcal{F}, \{F_n\}_n, \varphi)$, то выполнено ${}^{\varphi}Д(\mathcal{F})$, для $V[\varphi]$-почти всех КДЧ x из $0 \triangle 1$ верно $\exists z\,(P(z, \{F_n\}_n, x) \& P(z, \{\overline{F}_n\}_n, V[\varphi](x)) \& D(z, \mathcal{F}, \varphi, x))$ и, следовательно, ${}^{\varphi}Д(\mathcal{F}, \{\overline{F}_n\}_n)$;

2) для любого $\{\overline{F}_n\}_n \in L_1$ существует $\{F_n\}_n \in {}^{\varphi}LS$ такое, что (6);

3) верно $AC(\mathcal{F}, \varphi)$ в том и только том случае, если существует функция $\overline{\mathcal{F}}$ такая, что $AC(\overline{\mathcal{F}}) \& \mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}} * V[\varphi]$.

Доказательство. Пусть $\overline{\varphi}$ функция и $\{\Phi_n\}_n \in L_1$, обладающие свойствами, описанными в лемме 5.

1) Легко построить нормальный алгорифм $\mathcal{R}$ такой, что для всяких ступенчатого остова F, $F \mp a_0 \gamma a_1 \dots \gamma a_m \delta y_1 \gamma y_2 \dots \gamma y_m$, и НЧ $\not b$ выполнено $!\mathcal{R}_{\llcorner} F \square \not b_{\lrcorner}$, $\mathcal{R}_{\llcorner} F \square \not b_{\lrcorner}$ ступенчатый остов, $\{\mathcal{R}_{\llcorner} F \square m_{\lrcorner}\}_m \in L_1$ и для почти всех КДЧ y из $0 \triangle 1$ верно $\exists z (P(z, \{\mathcal{R}_{\llcorner} F \square m_{\lrcorner}\}_m, y) \& (\exists i (1 \leq i \leq m \& V[\varphi](a_{i-1}) < < y < V[\varphi](a_i) \& z = y_i) \vee V[\varphi](1) < y \& z = 0))$.

Тогда ясно, что выполнено $\forall x (0 \leq x \leq 1 \supset {}^{\varphi}\widetilde{\mathscr{E}}_F(x) = = \int_0^{V[\varphi](x)} (\{\mathcal{R}_{\llcorner} F \square m_{\lrcorner}\}_m \cdot \{\Phi_n\}_m) \& {}^{\widetilde{V[\varphi]}}\mathscr{E}_F(x) = \int_0^{V[\varphi](x)} \{\mathcal{R}_{\llcorner} F \square m_{\lrcorner}\}_m)$.

2) Пусть $\{F_p\}_p \in {}^{\varphi}LS$. Тогда для всякого НЧ p имеет место $\int_0^1 |\{\mathcal{R}_{\llcorner} F_p \square m_{\lrcorner}\}_m - \{\mathcal{R}_{\llcorner} F_{p+1} \square m_{\lrcorner}\}_m| = {}^{\circ}\!\!\int_0^1 |F_p \mp F_{p+1}|_0 \, d V[\varphi] < 2^{-p}$.

Согласно лемме 2 из [3] и теореме 2 из [4] можно построить $\{\bar{F}_n\}_m \in L_1$ такое, что

(7) $\forall p (\int_0^1 |\{\bar{F}_n\}_m - \{\mathcal{R}_{\llcorner} F_p \square m_{\lrcorner}\}_m| < 2^{-p+1})$

и для почти всех КДЧ y из $0 \triangle 1$ существуют последовательность КДЧ $\{x_p\}_p$ и КДЧ z, для которых верно $\forall p P(z_p, \{\mathcal{R}_{\llcorner} F_p \square m_{\lrcorner}\}_m, y) \& (z_p \xrightarrow[p \to \infty]{} z) \& P(z, \{\bar{F}_n\}_m, y) \& (0 \leq y \leq V[\varphi](1) \supset \forall x (V[\varphi](x) = y \supset P(z, \{F_p\}_p, x))) \& (V[\varphi](1) \leq y \supset z = 0)$.

Но тогда ввиду замечаний 2 и 5, 1), леммы 1 из [3] и (7) выполнена часть 1а) утверждения теоремы и для $V[\varphi]$-почти всех КДЧ x из $0 \triangle 1$ верно $\exists v (P(v, \{\bar{F}_m\}_m, V[\varphi](x)) \& P(v, \{F_p\}_p, x))$.

3) Пусть выполнено $LS(\mathcal{F}, \{F_p\}_p, \varphi)$. Согласно теореме 1 из [3] и следствию теоремы 2 из [8] существует функция $\mathcal{G}$ такая, что $\forall x (0 \leq x \leq 1 \supset \mathcal{G}(x) - \mathcal{G}(0) = \int_0^x (\{\bar{F}_n\}_n \cdot \{\Phi_n\}_m)) \& AC(\mathcal{G}) \& Д(\mathcal{G}, \{\bar{F}_n\}_m \cdot \{\Phi_m\}_m) \& \mathcal{G}(0) = \mathcal{F}(0)$ и, следовательно, $\mathcal{F} = \mathcal{G} * V[\varphi]$ и ввиду лемм 4 и 5 и замечания 4 выполнено

$${}^{V[\varphi]}Д(\mathcal{F}, \{\bar{F}_m\}_m \cdot \{\Phi_m\}_m) \& {}^{V[\varphi]}Д(\varphi, \{\Phi_m\}_m)$$

и ${}^{\varphi}$Д $(\mathcal{F}, \{\overline{F}_m\}_n)$. Итак, мы доказали часть 1б) утверждения.

4) Части 2) и 3) утверждения теоремы следуют из выше доказанного, замечания 5, теорем 1 и 2 из [3], лемм 1 и 4 и замечания 3.

<u>Лемма 6</u>. Пусть $\mathcal{F}$ и φ функции, $VB(\varphi) \& V[\varphi](1) \leq 1$. Тогда существует $\{\Phi_n\}_n \in L_1$, обладающее свойствами, описанными в лемме 5, и выполнено

1) ${}^{\varphi}$Д $(\mathcal{F}) \equiv {}^{V[\varphi]}$Д $(\mathcal{F})$,

2) если ${}^{\varphi}$Д $(\mathcal{F})$, то существует $\{\overline{F}_n\}_n \in S$ такое, что ${}^{\varphi}$Д $(\mathcal{F}, \{\overline{F}_n\}_n) \& {}^{V[\varphi]}$Д $(\mathcal{F}, \{\overline{F}_n\}_n \cdot \{\Phi_n\}_n)$,

и верно $VB(\mathcal{F}) \supset \alpha(\mathcal{F}, \varphi)$.

Доказательство. Ввиду леммы 5, замечания 4, теоремы 4 из [3] и того, что $\forall a ({}^{\varphi}Д(\mathcal{F}) \supset {}^{\varphi}Д(a \cdot \mathcal{F}))$ и $\alpha(\mathcal{F}, \varphi) \equiv$ $\equiv \forall a\, VB(a \cdot \mathcal{F} - V[\varphi])$ (лемма 1 и замечание 3), мы можем ограничиться следующим.

Пусть $\mathcal{G}$ функция, ψ неубывающая функция и x КДЧ такие, что $\psi(0) = 0 \& \psi(1) \leq 1 \& {}^{\psi}Д(\mathcal{G}) \& Var(x, \mathcal{G}, 0 \triangle 1)$. Тогда, как мы покажем, $VB(\mathcal{G} - \psi)$.

Пусть m НЧ. Тогда существует НЧ t_0, для которого выполнено $(t_0 = 1 \supset \psi(1) < 2^{-m-1}) \& (1 < t_0 \supset 2^{-m-2} < \psi(1))$.

Если $t_0 = 1$, мы определим $x_m \rightleftharpoons x$. Тогда

(8) $BVS(x_m + 2^{-m}, \mathcal{G} - \psi, 0 \triangle 1) \& \neg BVS(x_m - 2^{-m}, \mathcal{G} - \psi, 0 \triangle 1)$.

Пусть $1 < t_0$. На основании части 2а) замечания 4 легко доказать, что существует последовательность дизъюнктных сегментов $\{K_q\}_q$ такая, что $\mathcal{H}(\{K_q\}_q)$, ряд $\sum_q \Delta(\psi, K_q)$ сходится к КДЧ меньшему чем 2^{-m-2}, $[\psi, \{K_q\}_q]$ возрастающая на $0 \Delta 1$ функция и ${}^{[\psi,\{K_q\}_q]}Д([G,\{K_q\}_q])$. Ввиду $Var(x, G, 0\Delta 1)$ и замечания 1 из [11] выполнено $VB([G,\{K_q\}_q])$ и существуют НЧ s, последовательность неперекрывающихся сегментов $\{Q_k\}_k$, возрастающая система ЦЧ $\{i_j\}_{j=0}^{s}$ и КДЧ v такие, что $i_0 = 0 \& \forall q((1 \leq q \leq s \supset K_q = = \bigcup_{k=i_{q-1}+1}^{i_q} Q_k) \& (s < q \supset K_q \equiv Q_{i_s+q-s})) \& Var(v,[G,\{Q_k\}_k],0\Delta 1) \& x-2^{-m-2} < v$. Согласно леммам 3 и 4 существует функция $\overline{G}$ такая, что $[G,\{K_q\}_q] = \overline{G} * [\psi,\{K_q\}_q] \& Д(\overline{G}) \& VB(\overline{G})$ и, следовательно, $\alpha(\overline{G})$ (теорема 1 из [8]) и $\alpha([G,\{K_q\}_q],$ $[\psi,\{K_q\}_q])$ (лемма 4). Но тогда существует КДЧ x_m, для которого выполнено

$$Var(x_m, [G,\{Q_k\}_k] - [\psi,\{Q_k\}_k], 0\Delta 1).$$

Ввиду отмеченных выше свойств последовательности $\{Q_k\}_k$ мы получаем (8).

На основании лемм 1, 3, 4 и 6, теоремы 1 и замечания 3 и того, что $VB(\varphi) \& a_{кл}(\mathcal{F},\varphi) \supset \forall xy(V[\varphi](x) = V[\varphi](y) \supset \mathcal{F}(x) = = \mathcal{F}(y))$, верно следующее утверждение.

<u>Теорема 2</u>. Пусть $\mathcal{F}$ и φ функции, $VB(\varphi)$. Тогда
$AC(\mathcal{F},\varphi) \equiv AC(\mathcal{F},V[\varphi]) \equiv (\alpha(\mathcal{F},\varphi) \& a(\mathcal{F},\varphi)) \equiv$
$(\alpha(\mathcal{F},\varphi) \& a_{кл}(\mathcal{F},\varphi)) \equiv ({}^{\varphi}Д(\mathcal{F}) \& a(\mathcal{F},\varphi))$.

<u>Теорема 3</u>. Пусть $\mathcal{F}$ и φ функции. Тогда
$\alpha(\mathcal{F},\varphi) \equiv (VB(\mathcal{F}) \& VB(\varphi) \& {}^{\varphi}Д(\mathcal{F}))$.

Доказательство. Ввиду леммы 6 мы можем ограничиться следующим.

Пусть $\alpha(\mathcal{F},\varphi)$. Тогда, как мы знаем, верно $VB(\mathcal{F}) \& \& VB(\varphi)$. Не теряя общности, мы можем предположить, что $V[\mathcal{F}](1) + V[\varphi](1) \leq 1$. Мы обозначим $\psi \rightleftharpoons (V[\mathcal{F}] + V[\varphi])$.

Согласно замечанию 3 и лемме 1 выполнено $\alpha(\mathcal{F}, V[\varphi]) \& \alpha(\varphi, V[\mathcal{F}]) \& \forall a\,(AC(\mathcal{F}-a\cdot V[\mathcal{F}],\mathcal{F}) \& AC(\varphi - a\cdot V[\varphi],\varphi))$ и, следовательно, $\alpha(\mathcal{F},\psi) \& \alpha(\varphi,\psi)$. Ясно, что имеет место $\mathcal{a}(\mathcal{F},\psi) \& \mathcal{a}(\varphi,\psi) \& \forall x y(|V[\varphi](x) - V[\varphi](y)| \leq |\psi(x) - \psi(y)|)$, и тогда мы ввиду теоремы 2 получаем ${}^{\psi}Д(\mathcal{F}) \& {}^{\psi}Д(\varphi)$ и, таким образом, ${}^{\varphi}Д(\mathcal{F})$ (замечание 4).

На основании выше приведенных результатов и [5] можно доказать следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть $\mathcal{F}$ и φ функции и $\{F_n\}_n \in \mathcal{S}$ такие, что $VB(\varphi) \& V[\varphi](1) \leq 1 \& \mathcal{a}(\mathcal{F},\varphi)$ и для $V[\varphi]$-почти всех КДЧ x из $0 \triangle 1$ выполнено $\exists z\,(P(z,\{F_n\}_n, V[\varphi](x)) \& D_{кл}(z,\mathcal{F},\varphi,x))$. Тогда $AC(\mathcal{F},\varphi)$.

Литература

[1] LEBESGUE H.: Leçons sur l'intégration, Paris 1928.

[2] ЗАСЛАВСКИЙ И.Д.: Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций, Труды Мат. инст. им. В.А. Стеклова, том 67(1962), 385-457.

[3] ДЕМУТ О.: Пространства L_p и $\mathcal{S}$ в конструктивной математике, Comment.Math.Univ.Carolinae 10(1969), 261-284.

[4] ДЕМУТ О.: Об измеримости множеств по Лебегу в конструктивной математике, Comment.Math. Univ. Carolinae 10(1969), 463-492.

[5] ДЕМУТ О.: Об интегрируемости производных от конструктивных функций, Comment.Math.Univ.Carolinae 11(1970), 667-691.

[6] ДЕМУТ О.: Необходимое и достаточное условие абсолютной непрерывности конструктивных функций, Comment. Math.Univ.Carolinae 11(1970), 705-726.

[7] ДЕМУТ О.: О суперпозициях абсолютно непрерывных конструктивных функций, Comment.Math.Univ.Carolinae 12(1971), 423-451.

[8] ДЕМУТ О.: Об одном условии дифференцируемости конструктивных функций ограниченной вариации, Comment. Math.Univ.Carolinae 12(1971), 687-711.

[9] ДЕМУТ О.: О представимости равномерно непрерывных конструктивных функций, Comment.Math.Univ.Carolinae 14(1973), 7-25.

[10] ДЕМУТ О., НЕМЕЧКОВА Л.: О конструктивном аналоге свойства (T_1), Comment.Math.Univ.Carolinae 14(1973), 421-439.

[11] ДЕМУТ О.: Об одном обобщении конструктивного интеграла Лебега, Comment.Math.Univ.Carolinae 18(1977),499-514.

[12] ДЕМУТ О.: О конструктивных аналогах обобщенно абсолютно непрерывных функций и функций обобщенной ограниченной вариации, Comment.Math.Univ.Carolinae 19 (1978), 471-487.

Matematicko-fyzikální fakulta
Universita Karlova
Malostranské nám.25, Praha 1
Československo

(Oblatum 17.6. 1980)