ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM
1990 MATHEMATICA XXIX VOL. 97

Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty
Univerzity Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: Doc.RNDr. Jiří Rachůnek, CSc.

MULTIABBILDUNGEN UND ANORDNUNGEN DER MENGEN

FRANTIŠEK MACHALA

(Vorgelegt am 30.April 1989)

In der vorliegenden Arbeit werden Multiabbildungen einer Menge A in ihre Potenzmenge $\mathcal{A}$ studiert. (Ferner wird kürzer nur von den Abbildungen in $\mathcal{A}$ geschrieben.) Die Menge aller Abbildungen $\xi : A \longrightarrow \mathcal{A}$ mit $\xi(x) \neq \emptyset \ \ \forall x \in A$ bezeichnet man mit $\mathcal{M}_A$. $\mathcal{M}_A^*$ ist eine Untermenge von $\mathcal{M}_A$, die alle Abbildungen ξ enthält, welche eine Bedingung (*) erfüllen. Für jede Abbildung $\xi \in \mathcal{M}_A$ und jede Menge $B \in \mathcal{A}$ wird ein Kegel $U_\xi(B) \in \mathcal{A}$ definiert. Durch eine Abbildung $\xi \in \mathcal{M}_A$ läßt sich stets eine Quasianordnung $\leqq_\xi$ in der Menge A bestimmen und jede Quasianordnung läßt sich nach dieser Weise definieren. Dabei alle sog. konjugierten Abbildungen aus $\mathcal{M}_A$ bestimmen genau eine Quasianordnung. Eine Relation $\leqq_\xi$ ist genau dann eine Anordnung, wenn ξ injektiv ist. Alle Kegel von $\leqq_\xi$ gehen in die Kegel von ξ genau dann über, wenn $\xi \in \mathcal{M}_A^*$.

Die Unter- und Oberkegel bilden ein wichtiges Mittel beim Studium der angeordneten Mengen [2]. Sie werden auch zur Definition der modularen und distributiven angeordneten Mengen verwendet, die eine Verallgemeinerung der modularen und distributiven Verbände darstellen [1]. Unter anderem zeigen wir, daß die Unter- und Oberkegel einen selbständigen, auf der Anordnung unabhängigen Apparat bilden.

Sei A eine nichtleere Menge und $\mathcal{A} = 2^A$ die zu A gehörige Potenzmenge. Mit $\mathfrak{M}_A$ bezeichnen wir die Menge aller Abbildungen $\xi : A \to \mathcal{A}$ mit $\xi(x) \neq \emptyset$ $\forall x \in A$ und mit $\mathfrak{M}_A^*$ die Menge solcher Abbildungen von $\mathfrak{M}_A$, welche die folgende Äquivalenz erfüllen:

(*) $a \in \xi(b) \Longleftrightarrow \xi(a) \subseteq \xi(b)$.

Wegen $\xi(a) \subseteq \xi(a)$ für $a \in A$, $\xi \in \mathfrak{M}_A$, folgt aus (*) $a \in \xi(a)$.

<u>Definition 1</u>. Abbildungen $\xi, \xi' \in \mathfrak{M}_A$ heißen <u>dual</u>, wenn für $a, b \in A$ gilt $\xi'(a) \subseteq \xi'(b) \Longleftrightarrow \xi(b) \subseteq \xi(a)$.

<u>Definition 2</u>. Abbildungen $\xi, \xi' \in \mathfrak{M}_A$ sind <u>konjugiert</u>, wenn für $a, b \in A$ gilt $\xi(a) \subseteq \xi(b) \Longleftrightarrow \xi'(a) \subseteq \xi'(b)$.
Wenn die Abbildungen ξ, ξ' konjugiert sind, so schreiben wir $\xi \sim \xi'$.

<u>Satz 1</u>. Ist ξ eine Abbildung aus $\mathfrak{M}_A$, dann gibt es in $\mathfrak{M}_A^*$ genau eine Abbildung, die zu ξ dual ist.

Beweis. Es sei $\xi \in \mathfrak{M}_A$. Für ein beliebiges Element $a \in A$ setzen wir $\xi'(a) = \{x \in A \mid \xi(a) \subseteq \xi(x)\}$. Wegen $\xi(a) \subseteq \xi(a)$ gilt $a \in \xi'(a)$, also $\xi'(a) \neq \emptyset$. Deshalb ist $\xi' \in \mathfrak{M}_A$.

Die Abbildung ξ' ist dual zu ξ: Nehmen wir $\xi'(a) \subseteq \xi'(b)$ an. Dann ist $\xi(a) \subseteq \xi(x) \Rightarrow \xi(b) \subseteq \xi(x)$ und wegen $\xi(a) \subseteq \xi(a)$ erhält man $\xi(b) \subseteq \xi(a)$. Gilt umgekehrt $\xi(b) \subseteq \xi(a)$, dann $\xi(a) \subseteq \xi(x) \Rightarrow \xi(b) \subseteq \xi(x)$ und daraus $\xi'(a) \subseteq \xi'(b)$.

$\xi' \in \mathfrak{M}_A^*$: Ist $a \in \xi'(b)$, dann $\xi(b) \subseteq \xi(a)$ und $\xi'(a) \subseteq \xi'(b)$. Aus $\xi'(a) \subseteq \xi'(b)$ folgt $\xi(a) \subseteq \xi(b) \Rightarrow \xi(b) \subseteq \xi(x)$. Wegen $\xi(a) \subseteq \xi(a)$ gilt $\xi(b) \subseteq \xi(a)$, was $a \in \xi'(b)$ bedeutet.

Es sei $\xi'' \in \mathfrak{M}_A^*$ eine andere zu ξ duale Abbildung. Dann

$x \in \xi''(a) \Longleftrightarrow \xi''(x) \subseteq \xi''(a) \Longleftrightarrow \xi(a) \subseteq \xi(x)$. Dies aber bedeutet $\xi''(a) = \{x \in A \mid \xi(a) \subseteq \xi(x)\} = \xi'(a)$, also $\xi'' = \xi'$.

<u>Satz 2</u>. Die Beziehung $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation und die Restklassen-Menge $\mathfrak{M}_A/\sim$ ist zu $\mathfrak{M}_A^*$ äquivalent.

Beweis. Es ist offensichtlich, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation bildet. Ist $\xi \in \mathfrak{M}_A$, dann gibt es nach Satz 1 genau eine Abbildung $\xi' \in \mathfrak{M}_A^*$, die dual zu ξ ist. Durch eine weitere Anwendung diesen Satzes ergibt sich, daß es auch genau eine zu ξ' duale Abbildung $\xi'' \in \mathfrak{M}_A^*$ gibt. Nach Definition 1 gilt dann $\xi(a) \subseteq \xi(b) \Longleftrightarrow \xi'(b) \subseteq \xi'(a) \Longleftrightarrow \xi''(a) \subseteq \xi''(b)$, woraus $\xi \sim \xi''$ folgt. Damit ist eine Abbildung $\varphi : \mathfrak{M}_A \longrightarrow \mathfrak{M}_A^*$ mit $\xi \sim \varphi(\xi)$ beschrieben. Es seien ξ, $\bar{\xi} \in \mathfrak{M}_A$ konjugierte Abbildungen. Dann $\xi \sim \bar{\xi}$, $\xi \sim \varphi(\xi)$ impliziert $\bar{\xi} \sim \varphi(\xi)$ und nach Satz 1 folgt daraus $\varphi(\bar{\xi}) = \varphi(\xi)$. Deswegen induziert φ eine Abbildung $\bar{\varphi}$ der Menge $\mathfrak{M}_A/\sim$ auf die Menge $\mathfrak{M}_A^*$. Aus der Gleichheit $\varphi(\bar{\xi}) = \varphi(\xi)$ folgt auch umgekehrt $\xi \sim \bar{\xi}$ und $\bar{\varphi}$ ist eine injektive Abbildung.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{M}_A^{\xi}$ eine solche Äquivalenzklasse, die $\xi \in \mathfrak{M}_A$ enthält, dann ergibt sich in Folge des Beweises des Satzes 2 $\mathfrak{M}_A^{\xi} \cap \mathfrak{M}_A^* = \{\varphi(\xi)\}$. Den Begriff der dualen Abbildungen kann man auch auf die Äquivalenzklassen von $\sim$ erweitern: Sind ξ_1, $\xi_2 \in \mathfrak{M}_A$ dual, so gilt $\xi_1(a) \subseteq \xi_1(b) \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow \xi_2(b) \subseteq \xi_2(a)$. Aus $\xi_1' \sim \xi_1$, $\xi_2' \sim \xi_2$ folgt dann $\xi_1(a) \subseteq \xi_1(b) \Longleftrightarrow \xi_1'(a) \subseteq \xi_1'(b)$ und $\xi_2(a) \subseteq \xi_2(b) \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow \xi_2'(a) \subseteq \xi_2'(b)$. Dies aber bedeutet $\xi_1'(a) \subseteq \xi_1'(b) \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow \xi_1(a) \subseteq \xi_1(b) \Longleftrightarrow \xi_2(b) \subseteq \xi_2(a) \Longleftrightarrow \xi_2'(b) \subseteq \xi_2'(a)$ und die Abbildungen ξ_1', ξ_2' sind dual. Man kann also eine folgende Definition ausdrücken: Zwei Äquivalenzklassen $\mathfrak{M}_A^{\xi}$, $\bar{\mathfrak{M}}_A^{\xi}$ von $\sim$ sind dual, wenn es duale Abbildungen $\xi_1 \in \mathfrak{M}_A^{\xi}$, $\xi_2 \in \mathfrak{M}_A^{\xi}$ gibt.

<u>Satz 3</u>. Ist die Abbildung $\xi \in \mathfrak{M}_A$ injektiv, so ist injektiv auch jede zu ξ konjugierte und duale Abbildung.

Beweis. Es seien konjugierte Abbildung ξ, $\xi' \in \mathfrak{M}_A$ gegeben, wo ξ injektiv ist. Dabei nehmen wir an, daß ξ' nicht injektiv ist. Es gibt also $a, b \in A$, $a \neq b$ mit $\xi'(a) = \xi'(b)$.

Aus dieser Gleichheit folgt $\xi(a) \subseteq \xi(b)$ und zugleich $\xi(b) \subseteq \xi(a)$. Da $\xi' \sim \xi$ gilt, ergibt sich daraus $\xi(a) \subseteq \xi(b)$ und $\xi(b) \subseteq \xi(a)$, also $\xi(a) = \xi(b)$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Injektivität von ξ. Ähnlicherweise lä3t sich auch im Falle einer dualen Abbildung von ξ vorgehen.

<u>Bemerkung</u>. Es sei $\xi \in \mathfrak{M}_A$ mit $\xi(a) \subseteq \xi(b) \Longleftrightarrow a = b$. Dann gilt $\xi(a) \subseteq \xi(b) \Longleftrightarrow a = b \Longleftrightarrow \xi(b) \subseteq \xi(a)$ und ξ ist selbstdual. Au3erdem ist ξ injektiv und für $\xi' \in \mathfrak{M}_A^{\xi} \cap \mathfrak{M}_A^{*}$ ist $\xi'(a) = \{a\}\ \forall\, a \in A$.

In den folgenden Beispielen bedeutet Z die Menge der ganzen Zahlen und $\leq$ die natürliche Anordnung von Z.

1. Wir definieren Abbildungen $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathfrak{M}_Z$ durch folgende Vorschriften:

$$\xi_1(a) = \{x \in Z \mid x \leq a\} \quad \forall\, a \in Z,$$

$$\xi_2(a) = \{x \in Z \mid x \text{ ist gerade, } x < a\} \quad \forall\, a \in Z,$$

$$\xi_3(a) = \{x \in Z \mid x \leq a - 5\} \quad \forall\, a \in Z.$$

Alle Abbildungen ξ_1, ξ_2, ξ_3 sind konjugiert und ξ_1 ist genau eine in $\mathfrak{M}_A^{*}$ enthaltene Abbildung aus $\mathfrak{M}_A^{\xi_1}$. Die Abbildung $\xi'(a) = \{x \in Z \mid a \leq x\}\ \forall\, a \in Z$ ist dual zu ξ_1, ξ_2, ξ_3. Alle angeführten Abbildungen sind injektiv.

2. Wir definieren Abbildungen $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{M}_Z$ durch:

$$\xi_1(a) = \{x \in Z \mid |x| \leq |a| \quad \forall\, a \in Z,$$

$$\xi_2(a) = \{x \in Z \mid |x| \leq |a + 1|\} \quad \forall\, a \in Z.$$

Die Abbildungen ξ_1, ξ_2 sind konjugiert und $\xi_1 \in \mathfrak{M}_Z^{*}$. Eine Abbildung ξ' mit $\xi'(a) = \{x \in Z \mid |a| \leq |x|\}$ ist dual zu ξ_1, ξ_2. Beide Abbildungen ξ_1, ξ_2 sind nicht injektiv.

3. Wir definieren $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathfrak{M}_Z$:

(i) Ist a gerade, dann $\xi_1(a) = \{x \in Z \mid x \leq a + 1\}$.
Ist a ungerade, dann $\xi_1(a) = \{x \in Z \mid x \leq a\}$.

(ii) Ist a gerade, dann $\xi_2(a) = \{x \in Z \mid x \leq a\}$.
Ist a ungerade, dann $\xi_2(a) = \{x \in Z \mid x \leq a - 1\}$.

(iii) $\xi_3(a) = \{x \in Z \mid x \text{ ist gerade, } x \leq a\}$.

Alle drei Abbildungen sind konjugiert und keine ist injektiv.

4. Wir definieren $\xi_1,\ \xi_2 \in \mathfrak{M}_Z$:

$$\xi_1(a) = \{x \in Z \mid x = ka \quad \forall\, k \in Z\},$$

$$\xi_2(a) = \{x \in Z \mid x = 2ka \quad \forall\, k \in Z\}.$$

Die Bilder der Elemente von Z in ξ_1 sind Hauptideale des Ringes Z. Die Abbildungen ξ_1, ξ_2 sind konjugiert und injektiv. Die Abbildung $\xi'(a) = \{x \in Z \mid \exists\, k \in Z, a = kx\}$ ist dual zu ξ_1, ξ_2.

5. Wir definieren

$$\xi_1(a) = \{a\} \quad \forall\, a \in Z,$$
$$\xi_2(a) = \{x \in Z \mid a - 3 \leq x \leq a + 3\} \quad \forall\, a \in Z.$$

Die Abbildungen ξ_1, ξ_2 gehören zur Äquivalenzklasse, die in der Bemerkung beschrieben ist.

<u>Definition 3</u>. Zu $\xi \in \mathfrak{M}_A$ definieren wir eine weitere Abbildung $U_\xi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$ durch $U_\xi(B) = \bigcap_{b\in B} \xi(b)$ für $B \in \mathfrak{A}$, $B \neq \emptyset$ und $U_\xi(\emptyset) = A$. Die Menge $U_\xi(B)$ nennt man ein durch die Abbildung ξ bestimmter <u>Kegel der Menge B</u>. Speziell für $B = \{a\}$ ist $U_\xi(\{a\}) = \xi(a)$, in diesem Fall schreiben wir kurz $\xi(a) = U_\xi(a)$.

<u>Satz 4</u>. Eine Abbildung $U: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$ ist durch eine Abbildung $\xi \in \mathfrak{M}_A$ bestimmt, d.h. $U = U_\xi$, genau dann, wenn $U(\bigcup_{\nu\in J} B_\nu) = \bigcap_{\nu\in J} U(B_\nu)$ mit $B_\nu \in \mathfrak{A}$ für alle $\nu \in J$ gilt.

Beweis. 1.Wir nehmen an, daß $U = U_\xi$ für eine Abbildung $\xi \in \mathfrak{M}_A$ gilt. Dann ist $U(B) = \bigcap_{b\in B} \xi(b)$ für jede nichtleere Menge $B \in \mathfrak{A}$ und $U(\emptyset) = A$. Es sei $B = \bigcup_{\nu\in J} B_\nu$ mit $B_\nu \neq \emptyset\ \forall \nu \in J$. Für $\nu \in J$ läßt sich $B_\nu = \bigcup_{b^{\nu} \in B_\nu} \{b^{\nu}\}$ schreiben und folglich $B = \bigcup_{b\in B}\{b\} = \bigcup_{\nu\in J}(\bigcup_{b^{\nu}\in B_\nu}\{b^{\nu}\})$. Nach Vorangehendem ergibt sich dann $U(B) = \bigcap_{b\in B}\xi(b) = \bigcap_{\nu\in J}(\bigcap_{b^{\nu}\in B_\nu}\xi(b^{\nu})) = \bigcap_{\nu\in J} U(B_\nu)$. Jetzt setzen wir voraus, daß von $B = \bigcup_{\nu\in J} B_\nu$ die Mengen B_α leer für $\alpha \in J' \subset J$ sind. In diesem Falle ist $B' = \bigcup_{\nu'\in J-J'} B_{\nu'} = \bigcup_{\nu\in J} B_\nu = B$, wegen $U(\emptyset) = A$ erhält man $\bigcap_{\nu\in J} U(B_\nu) = \bigcap_{\nu'\in J-J'} B_{\nu'}$ und daraus folgt unsere Gleichheit.

2. Es sei $U: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ eine Abbildung mit $U(\bigcup_{\nu \in J} B_\nu) = \bigcap_{\nu \in J} U(B_\nu)$. Für $x \in A$ setzen wir $\xi(x) = U(x)$. Ist B eine nichtleere Menge, dann $B = \bigcup_{b \in B}\{b\}$ und nach unserer Voraussetzung gilt $U(B) = U(\bigcup_{b \in B}\{b\}) = \bigcap_{b \in B} U(b) = \bigcap_{b \in B} \xi(b)$. Für eine beliebige Menge $B \in \mathfrak{A}$ ist $B \cup \emptyset = B$, woraus $U(B \cup \emptyset) = U(B) = U(B) \cap U(\emptyset)$ folgt. Dies aber bedeutet $U(\emptyset) = A$. Damit ist $U = U_\xi$ bewiesen.

<u>Bemerkung</u>. Es sei $U_\xi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ eine durch $\xi \in \mathfrak{M}_A$ bestimmte Abbildung. Sind $B, C \in \mathfrak{A}$ mit $B \subseteq C$ gegeben, dann durch Anwendung des Satzes 4 ergibt sich $U_\xi(B \cup C) = U_\xi(C) = U_\xi(B) \cap U_\xi(C)$ und folglich $U_\xi(C) \subseteq U_\xi(B)$.

<u>Definition 4</u>. Sind die Abbildungen $\xi, \xi' \in \mathfrak{M}_A$ dual, dann heißen die zugehörigen Kegel $U_\xi(B)$ und $U_{\xi'}(B)$ der Menge $B \in \mathfrak{A}$ auch dual.

<u>Satz 5</u>. Sind die Abbildungen $\xi, \xi' \in \mathfrak{M}_A^*$ dual, dann gilt $B \subseteq U_\xi(C) \Longleftrightarrow C \subseteq U_{\xi'}(B)$ und $U_\xi[U_{\xi'}(U_\xi(B))] = U_\xi(B)$ für $B, C \in \mathfrak{A}$. Ist ξ injektiv, dann $U_\xi(a) \cap U_{\xi'}(a) = \{a\}$ $\forall\, a \in A$.

Beweis. Nach Definition von U_ξ gilt $U_\xi(C) = \bigcap_{c \in C} U_\xi(c) = \bigcap_{c \in C} \xi(c)$ für $C \in \mathfrak{A}$. Daraus und durch Anwendung von $(*)$ erhält man schrittweise $B \subseteq U_\xi(c) \Longleftrightarrow b \in \xi(c)$ $\forall b \in B$ $\forall c \in C \Longleftrightarrow \xi(b) \subseteq \xi(c)$ $\forall b \in B$ $\forall c \in C \Longleftrightarrow \xi'(c) \subseteq \xi'(b)$ $\forall b \in B$ $\forall c \in C \Longleftrightarrow c \in \xi'(b)$ $\forall b \in B$ $\forall c \in C \Longleftrightarrow c \in \bigcap_{b \in B} \xi'(b)$ $\forall c \in C \Longleftrightarrow C \subseteq U_{\xi'}(B)$.

Jetzt beweisen wir, daß $B \subseteq U_{\xi'} U_\xi(B)$ für beliebige $B \in \mathfrak{A}$ gilt. Ähnlich wie im Teil 1 bekommen wir eine Reihe von Äquivalenzen: $x \in U_\xi(B) \Longleftrightarrow x \in \xi(b)$ $\forall b \in B \Longleftrightarrow \xi(x) \subseteq \xi(b)$ $\forall b \in B \Longleftrightarrow \xi'(b) \subseteq \xi'(x)$ $\forall b \in B \Longleftrightarrow b \in U_{\xi'}(x)$ $\forall b \in B$. Zugleich gilt $y \in U_{\xi'} U_\xi(B) \Longleftrightarrow y \in U_{\xi'}(x)$ $\forall x \in U_\xi(B)$. Durch Vergleichung beider Ergebnisse ergibt sich $B \subseteq U_{\xi'} U_\xi(B)$. Für $U_\xi(B)$ gilt speziell $U_\xi(B) \subseteq U_\xi U_{\xi'}(U_\xi(B))$. Nach der Bemerkung ist außerdem $U_\xi(U_{\xi'} U_\xi(B)) \subseteq U_\xi(B)$ und daraus folgt unsere Gleichheit $U_\xi(B) = U_\xi[U_{\xi'}(U_\xi(B))]$.

Es sei ξ injektiv. Nach Folgerung von $(*)$ ist $a \in U_\xi(a)$ und $a \in U_{\xi'}(a)$, also $a \in U_\xi(a) \cap U_{\xi'}(a)$. Ist ein x in $U_\xi(a) \cap U_{\xi'}(a)$ enthalten, dann $x \in U_{\xi'}(a) \Longrightarrow U_{\xi'}(x) \subseteq U_{\xi'}(a) \Longrightarrow U_\xi(a) \subseteq U_\xi(x)$. Zugleich ist aber $x \in U_\xi(a)$ und $U_\xi(x) \subseteq U_\xi(a)$. Es gilt daher $U_\xi(a) = U_\xi(x)$, also $\xi(a) = \xi(x)$ und aus der Injektivität von ξ folgt $a = x$.

<u>Definition 5</u>. Es sei $\leq$ eine Relation in einer Menge A. Durch die Vorschrift $a \leq b \Longleftrightarrow b \leq' a$ ist eine inverse Relation $\leq'$ zu $\leq$ definiert. Die Menge $U_{\leq}(B) = \{x \in A \mid b \leq x \ \ \forall b \in B\}$ bzw. $L_{\leq}(B) = \{x \in A \mid x \leq b \ \ \forall b \in B\}$ heißt ein <u>Ober</u>- bzw. <u>Unterkegel</u> der Menge $B \subseteq A$ im Hinblick auf $\leq$. Eine reflexive und transitive Relation nennt man eine <u>Quasianordnung</u>. Die Menge aller Quasianordnungen in A bezeichnen wir mit Q_A. Jede antisymetrische Quasianordnung ist eine <u>Anordnung</u>.

<u>Satz 6</u>. Durch die Vorschrift $a \leq_{\xi} b \Longleftrightarrow \xi(a) \subseteq \xi(b)$ läßt sich zu jeder Abbildung $\xi \in \mathcal{M}_A$ eine Quasianordnung $\leq_{\xi}$ bestimmen und auch umgekehrt zu jeder Quasianordnung $\leq$ existiert eine Abbildung ξ aus $\mathcal{M}_A$ mit $\leq \, = \, \leq_{\xi}$. Die Relationen $\leq_{\xi}$, $\leq_{\xi'}$ sind inverse Quasianordnungen genau dann, wenn ξ, ξ' dual sind. Die Mengen $\mathcal{M}_A/\sim$, Q_A sind äquivalent. Die Relation $\leq_{\xi}$ ist eine Anordnung genau dann, wenn ξ injektiv ist.

Beweis. Wir betrachten eine zu $\xi \in \mathcal{M}_A$ gehörige Relation $\leq_{\xi}$. Für $a,b \in A$ gilt $\xi(a) \subseteq \xi(a) \Longrightarrow a \leq_{\xi} a$, $a \leq_{\xi} b \wedge$ $\wedge\, b \leq_{\xi} c \Longrightarrow \xi(a) \subseteq \xi(b) \wedge \xi(b) \subseteq \xi(c) \Longrightarrow \xi(a) \subseteq \xi(c) \Longrightarrow$ $\Longrightarrow a \leq_{\xi} c$ und $\leq_{\xi}$ ist eine Quasianordnung. Dadurch ist eine Abbildung $\varphi: \mathcal{M}_A \longrightarrow Q_A$ mit $\varphi(\xi) = \leq_{\xi}$ festgelegt. Sind ξ, $\xi' \in \mathcal{M}_A$ konjugiert, dann $a \leq_{\xi} b \Longleftrightarrow \xi(a) \subseteq \xi(b) \Longleftrightarrow \xi'(a) \subseteq$ $\subseteq \xi'(b) \Longleftrightarrow a \leq_{\xi'} b$ und $\varphi(\xi) = \varphi(\xi')$. Umgekehrt gilt auch $\varphi(\xi) = \varphi(\xi') \Longrightarrow \xi \sim \xi'$ und φ induziert eine injektive Abbildung $\bar{\varphi}: \mathcal{M}_A/\sim \,\longrightarrow Q_A$.

Es sei $\leq$ eine Quasianordnung. Für $a \in A$ setzen wir $\xi(a) =$ $= \{x \in A \mid x \leq a\}$. Wegen $a \in \xi(a)$ ist $\xi(a) \neq \emptyset$ und darum $\xi \in \mathcal{M}_A$. Gilt $\xi(a) \subseteq \xi(b)$, dann $a \in \xi(a) \Longrightarrow a \in \xi(b) \Longrightarrow a \leq b$. Umgekehrt sei $a \leq b$. Für $x \in A$ mit $x \leq a$ ist $x \leq b$ und $\xi(a) \subseteq \xi(b)$. Daraus ergibt sich $\varphi(\xi) = \leq$, φ ist eine Abbildung auf die Menge Q_A und auch $\bar{\varphi}$ ist eine Abbildung auf Q_A. Die Mengen $\mathcal{M}_A/\sim$, Q_A sind äquivalent.

Sind ξ, $\xi' \in \mathcal{M}_A$ dual, dann gilt $a \leq_{\xi} b \Longleftrightarrow \xi(a) \subseteq \xi(b) \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow \xi'(b) \subseteq \xi'(a) \Longleftrightarrow b \leq_{\xi'} a$ und $\leq_{\xi}$, $\leq_{\xi'}$ sind inverse Quasianordnungen. Sind $\leq_{\xi}$, $\leq_{\xi'}$ inverse Quasianordnungen, dann läßt sich auf ähnlichem Wege beweisen, daß ξ, ξ' dual sind.

Es sei $\xi \in \mathfrak{M}_A$ injektiv. Dabei nehmen wir an, daß $a \leqq_\xi b \wedge b \leqq_\xi a$. Nach Definition von $\leqq_\xi$ ist $\xi(a) \subseteq \xi(b) \wedge \xi(b) \subseteq \xi(a)$, also $\xi(a) = \xi(b)$. Dies bedeutet $a = b$, weil ξ injektiv sind. Die Relation $\leqq_\xi$ ist Anordnung. Ist umgekehrt $\leqq_\xi$ eine Anordnung, so gilt $\xi(a) \subseteq \xi(b) \wedge \xi(b) \subseteq \xi(a) \Longrightarrow a = b$, weil $\leqq_\xi$ antisymetrisch ist. Daraus ergibt sich $\xi(a) = \xi(b) \Longrightarrow a = b$ und ξ ist injektiv.

Satz 7. Es sei $\xi \in \mathfrak{M}_A$ und $\varphi(\xi) = \leqq \in Q_A$. Dann gilt $U_\xi(B) = L_{\leqq}(B)$ für jede Menge $B \in \mathfrak{A}$ genau dann, wenn $\xi \in \mathfrak{M}_A^*$.

Beweis. Vor allem beweisen wir, daß unsere Behauptung für die Mengen $B = \{a\}$, $a \in A$ gilt. Nach Definitionen 3 und 5 ist $U_\xi(a) = \xi(a)$ und $L_{\leqq}(a) = \{x \in A \mid x \leqq a\}$. Ist $\xi \in \mathfrak{M}_A^*$, dann $x \in \xi(a) \Longleftrightarrow \xi(x) \subseteq \xi(a) \Longleftrightarrow x \leqq a \Longleftrightarrow x \in L_{\leqq}(a)$, was $U_\xi(a) = L_{\leqq}(a)$ bedeutet. Es sei umgekehrt $U_\xi(a) = L_{\leqq}(a)$, also $\xi(a) = L_{\leqq}(a) = \{x \in A \mid x \leqq a\}$. Dann gilt $x \in \xi(a) \Longleftrightarrow x \leqq a \Longleftrightarrow \xi(x) \subseteq \xi(a)$ und folglich $\xi \in \mathfrak{M}_A^*$. Für eine beliebige nichtleere Menge erhält man $U_\xi(B) = \bigcap_{b \in B} U_\xi(b) = \bigcap_{b \in B} L_{\leqq}(b) = L_{\leqq}(B)$. Aus $B = \emptyset$ folgt $U_\xi(B) = L_{\leqq}(B) = A$.

Bemerkung. Sind die Abbildungen ξ, $\xi' \in \mathfrak{M}_A$ dual, dann sind $\leqq_\xi$, $\leqq_{\xi'}$ inverse Quasianordnungen und für die zugehörigen Kegel gilt $U_\xi(B) = L_{\leqq_\xi}(B) = U_{\leqq_{\xi'}}(B)$ bzw. $U_{\xi'}(B) = L_{\leqq_{\xi'}}(B) = U_{\leqq_\xi}(B)$.

Bemerkung. Durch jede von den Abbildungen ξ_1, ξ_2, ξ_3 im Beispiel 1 ist eine (natürliche) Anordnung $\leqq$ der Menge der ganzen Zahlen bestimmt. Alle Kegel von ξ_1 gehen in die Kegel von $\leqq$ über. Den Abbildungen ξ_1, ξ_2 im Beispiel 4 entspricht eine Anordnung, die durch das Dividieren in Z definiert ist. Die Abbildungen in 5 bestimmen die Gleichheit auf Z und die Abbildungen in 2 und 3 Quasianordnungen in Z. Für ξ_1 fließen stets die zugehörigen Kegel zusammen.

SOUHRN

MULTIZOBRAZENÍ A USPOŘÁDÁNÍ MNOŽIN

FRANTIŠEK MACHALA

V práci se studují (multi)zobrazení ξ množiny A do množiny $\mathcal{A} = 2^A$. Každému zobrazení ξ je možné přiřadit jediné kvaziuspořádání $\leqq_\xi$, přičemž tzv. konjugovaná zobrazení určují totéž kvaziuspořádání. Relace $\leqq_\xi$ je uspořádání, právě když je ξ injektivní. Pro každé zobrazení ξ a každou množinu $B \in \mathcal{A}$ se definuje kužel $U_\xi(B) \in \mathcal{A}$. Všechny kužele příslušné ke ξ jsou současně kužele kvaziuspořádání $\leqq_\xi$, právě když ξ splňuje podmínku ($*$).

РЕЗЮМЕ

МУЛЬТИОТОБРАЖЕНИЯ И УПОРЯДОЧЕНИЯ МНОЖЕСТВ

Ф. МАХАЛА

В работе изучаются /мульти/отображения ξ множества A в множество $\mathcal{A} = 2^A$. Каждому отображению ξ можно присоединить некоторое квазиупорядочение $\leqq_\xi$ и т.наз. конюгированные отображения определяют то же самое квазиупорядочение. Соотношение $\leqq_\xi$ является упорядочением тогда и только тогда, когда ξ инъективно. Для каждого отображения ξ и каждого множества $B \in \mathcal{A}$ определяется конус $U_\xi(B) \in \mathcal{A}$. Все конусы соответствующие отображению ξ являются одновременно конусами квазиупорядочения $\leqq_\xi$ тогда и только тогда, когда ξ исполняет условие /*/.

LITERATUR

[1] L a r m e r o v á, J. - R a ch ů n e k, J.: Translations of distributive and modular orderet set. Acta Univ.Olom. (im Druck).

[2] **Скорняков,Л.А.: Элементы теории структур. Ив. Неука 1970.**

RNDr.František Machala, CSc.
Katedra algebry a geometrie PřF UP
771 46 Olomouc
Tschechoslowakei

Acta UPO, Fac.rer.nat.<u>97</u>, Mathematica <u>XXIX</u> (1990), 23 - 33.