Matematický časopis

Ladislav Satko

Тензорное произведение полугрупп и максимальные полуструктурные образы

Matematický časopis, Vol. 24 (1974), No. 3, 239--246

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126964

Mat. čas. 24, 1974, No 3, 239—245

ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ПОЛУГРУПП И МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОЛУСТРУКТУРНЫЕ ОБРАЗЫ

ЛАДИСЛАВ САТКО (LADISLAV SATKO)

Пусть $\mathscr{K}$ — такой класс полугрупп, что: а) если $S \in \mathscr{K}$ и S изоморфно S', то $S' \in \mathscr{K}$, б) любая одноэлементная полугруппа принадлежит $\mathscr{K}$. В этом случае класс полугрупп $\mathscr{K}$ называется типом.

Пусть S — произвольная полугруппа и $\mathscr{K}$ — произвольный тип полугрупп. Полугруппа S^* называется максимальным гомоморфным образом типа $\mathscr{K}$ полугруппы S, если: а) $S^* \in \mathscr{K}$, б) существует такой гомоморфизм $\eta : S \to S^*$ полугруппы S на S^*, что для любого гомоморфизма $\varphi : S \to T$ полугруппы S на произвольную полугруппу $T \in \mathscr{K}$ существует такой гомоморфизм $\vartheta : S^* \to T$ полугруппы S^* на полугруппу T, что $\vartheta \circ \eta = \varphi$ (рис. 1).

В этой работе мы будем пользоваться тем фактом, что существуют максимальные гомоморфные образы в следующих двух случаях:

1. Когда $\mathscr{K}$ — класс всех полуструктур (коммутативных полугрупп идемпотентов). Тогда максимальный гомоморфный образ типа $\mathscr{K}$ полугруппы S мы будем называть максимальным полуструктурным образом полугруппы S и будем его обозначать $M(S)$.

2. Когда $\mathscr{K}$ — класс всех коммутативных полугрупп. В этом случае максимальный гомоморфный образ типа $\mathscr{K}$ полугруппы S мы будем называть максимальным коммутативным образом полугруппы S и будем его обозначать $C(S)$.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & S^* \arrow[dl, dashed, "\vartheta"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

Рис. 1

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "\omega"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & A \overset{c}{\otimes} B \arrow[dl, dashed, "\gamma"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Рис. 2

В этой работе мы будем заниматься максимальными полуструктурными образами тензорного произвения двух полугрупп. Чтобы облегчить чтение, мы приведем основные понятия и определения тензорного произведения полугрупп.

Тензорное произведение полугрупп было определено: а) в классе всех коммутативных полугрупп, б) в классе всех полугрупп. В первом случае мы получим коммутативное тензорное произведение коммутативных полугрупп, во втором случае тензорное произведение полугрупп.

Под коммутативным тензорным произведением $A \otimes^c B$ коммутативных полугрупп A, B мы понимаем факторполугруппу $\mathscr{F}(A \times B)/\tau$, где $\mathscr{F}(A \times B)$ — свободная коммутативная полугруппа на декартовом произведении $A \times B$, и τ такая наименьшая конгруэнция на $\mathscr{F}(A \times B)$, что для всех $a, a_1, a_2 \in A$, $b, b_1, b_2 \in B$ справедливо:

$$(a_1a_2, b)\ \tau\ (a_1, b)\,(a_2, b), \quad (a, b_1b_2)\ \tau\ (a, b_1)\,(a, b_2).$$

Пусть A, B, C — произвольные полугруппы. Отображение $\alpha : A \times B \to C$ называется билинейным отображением (тоже бигомоморфизмом), если для каждого $b \in B$, соответственно $a \in A$, отображение $a \mapsto \alpha(a, b)$, соответственно $b \mapsto \alpha(a, b)$ является гомоморфизмом полугруппы A, соответственно B, в полугруппу C.

В случае коммутативного тензорного произведения $A \otimes^c B$ мы будем обозначать $a \otimes^c b$ тот класс факторполугруппы $\mathscr{F}(A \times B)/\tau$, в котором находится элемент $(a, b) \in A \times B$. В этом случае отображение $\omega : A \times B \to A \otimes^c B$ определено так, что $\omega(a, b) = a \otimes^c b$ для всех $(a, b) \in A \times B$, является билинейным отображением декартова произведения $A \times B$ в $A \otimes^c B$. Это отображение обладает следующим свойством: Для любого билинейного отображения $\alpha : A \times B \to C$ декартова произведения $A \times B$ в любую коммутативную полугруппу C существует такой единственный гомоморфизм $\gamma : A \otimes^c B \to C$ что $\alpha = \gamma \circ \omega$ (рис. 2). Доказательство этого утверждения смотри, например [1].

Пусть A, A', B, B' — коммутативные полугруппы и $\xi : A \to A'$, соответственно $\eta : B \to B'$, гомоморфизм полугруппы A в A', соответственно B в B'. Определим отображение $\alpha : A \times B \to A' \otimes^c B'$, полагая $\alpha(a, b) = \xi(a) \otimes^c \eta(b)$ для всех $(a, b) \in A \times B$. Так как α билинейно, то существует единственный гомоморфизм $\gamma : A \otimes^c B \to A' \otimes^c B'$ такой, что $\alpha = \gamma \circ \omega$. Гомоморфизм γ называем коммутативным тензорным произведением гомоморфизмов ξ, η и будем его обозначать $\xi \otimes^c \eta$ (рис. 3).

Определение и свойства тензорного произведения $A \otimes B$ (некоммутативного) полугрупп A, B получим аналогично, когда пропустим слово «коммутативный». В этом случае тензорное произведение гомоморфизмов ξ, η мы будем обозначать $\xi \otimes \eta$. Отметим, что тензорному произведению (некоммутативному) не нужно быть коммутативным даже в случае коммутативных полугрупп (смотри пример 2).

Р. Фулп в [1] показал, что максимальный полуструктурный образ $M(A \otimes^c B)$ коммутативного тензорного произведения $A \otimes^c B$ коммутативных полугрупп A, B равен коммутативному тензорному произведению $M(A) \otimes^c M(B)$ максимальных полуструктурных образов $M(A)$, соответственно $M(B)$, коммутативных полугрупп A, соответственно B. Это значит, что $M(A \otimes^c B) = M(A) \otimes^c M(B)$.

В случае тензорного произведения (некоммутативного) аналогичное утверждение мы не можем получить только при пропускании слова «коммутативный», так как в этом случае тензорному произведению двух полуструктур не нужно быть полуструктурой.

Пример 1. Пусть даны две полуструктуры E, F при помощи их мультипликативных таблиц.

E:

	e	f
e	e	e
f	e	f

F:

	g	h
g	g	g
h	g	h

Коммутативное тензорное произведение $E \otimes^c F$ — полугруппа $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_2a_3\}$, где для сокращения мы обозначаем: $e \otimes^c g = a_1$, $e \otimes^c h = a_2$, $f \otimes^c g = a_3$, $f \otimes^c h = a_4$. Полугруппа $E \otimes^c F$ обладает следующей мультипликативной таблицей:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_2a_3
a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1
a_2	a_1	a_2	a_2a_3	a_2	a_2a_3
a_3	a_1	a_2a_3	a_3	a_3	a_2a_3
a_4	a_1	a_2	a_3	a_4	a_2a_3
a_2a_3	a_1	a_2a_3	a_2a_3	a_2a_3	a_2a_3

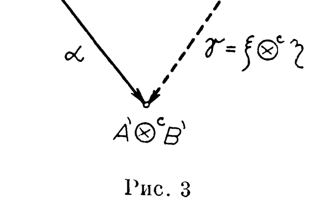

Рис. 3

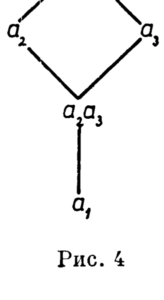

Рис. 4

$E \otimes^c F$ — полуструктура, частичное упорядочение которой показывает следующая диаграмма (рис. 4).

Пример 2. Пусть E, F — полуструктуры, как в примере 1. Тензорное произведение $E \otimes F$ (некоммутативное) есть бесконечная полугруппа, для которой мультипликативную таблицу получим следующим образом: Обозначим $e \otimes g = b_1$, $e \otimes h = b_2$, $f \otimes g = b_3$, $f \otimes h = b_4$. Полугруппа

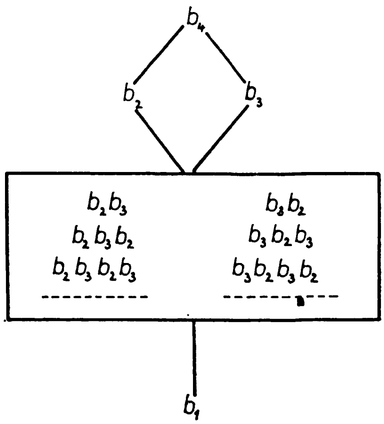

Рис. 5

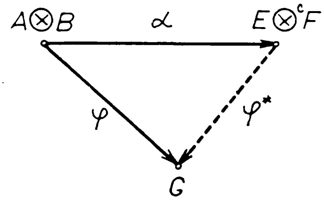

Рис. 6

$E \otimes F$ образована элементами b_1, b_2, b_3, b_4, и образующие соотношения даны следующей таблицей:

	b_1	b_2	b_3	b_4
b_1	b_1	b_1	b_1	b_1
b_2	b_1	b_2	b_2b_3	b_2
b_3	b_1	b_3b_2	b_3	b_3
b_4	b_1	b_2	b_3	b_4

Очевидно, что b_1 — нуль и b_4 — единица полугруппы $E \otimes F$. Полугруппе $E \otimes F$ кроме элементов b_1, b_2, b_3, b_4 будут еще принадлежать элементы этой формы: b_2b_3, $b_2b_3b_2$, $b_2b_3b_2b_3$, ..., b_3b_2, $b_3b_2b_3$, $b_3b_2b_3b_2$, ... Максимальный полуструктурный образ $M(E \otimes F)$ полугруппы $E \otimes F$ схематически изображен на следующей диаграмме (рис. 5).

Очевидно, что коммутативное тензорное произведение $E \otimes^c F$ изоморфно максимальному полуструктурному образу $M(E \otimes F)$ тензорного произведения $E \otimes F$.

Если будем пользоваться обозначением введеным прежде, так имеет место лемма 1, доказательство которой привел П. А. Грилле в [3].

Лемма 1. *Пусть A, B — коммутативные полугруппы. В этом случае $C(A \otimes B) \cong A \otimes^c B$.*

Пусть $\pi : A \otimes B \to C(A \otimes B)$ — естественный гомоморфизм полугруппы $A \otimes B$ на ее максимальный коммутативный образ $C(A \otimes B)$. Потом в изоморфизме из леммы 1 элементу $\pi(a \otimes b) \in C(A \otimes B)$ соответствует элемент $a \otimes^c b \in A \otimes^c B$.

Дальнейшее понятие, которым будем пользоваться, было введено Т. Тамуром (смотри, например [4]). Пусть S — произвольная полугруппа. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — нами избранные элементы полугруппы S. Мы будем обозначать через $U_S \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ множество всех элементов полугруппы S, которые можно написать, как произведение всех элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, при этом можно повторять эти элементы в произведении. Т. Тамура называет множество $U_S \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ содержанием (content) элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Каждый элемент $a \in U_S \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ можно написать в форме $a = a_1^{k_{11}} a_2^{k_{12}} \ldots a_n^{k_{1n}} a_1^{k_{21}} a_2^{k_{22}} \ldots a_n^{k_{2n}} \ldots a_1^{k_{s1}} a_2^{k_{s2}} \ldots a_n^{k_{sn}}$ где $k_{ij} \geqslant 0$, $k_{1i} + k_{2i} + \ldots + k_{si} \geqslant 1$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Множество $U_S \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ — полугруппа. Построим на S отношение ϱ_1, определенное так, что $a \varrho_1 b$ тогда и только тогда, когда $a, b \in U_S \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ для каких-нибудь $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$. Если ϱ — транзитивное замыкание отношения ϱ_1, то справедлива следующая лемма.

Лемма 2. (Тамура, Шейфер [4]). *Максимальным полуструктурным образом полугруппы S является факторполугруппа S/ϱ.*

Если используем введенное обозначение, то имеет место следующая теорема, доказательство которой является главной целью этой работы.

Теорема. *Если A, B — произвольные полугруппы, то $M(A \otimes B) \cong M(A) \otimes^c M(B)$.*

Это значит, что максимальный полуструктурный образ тензорного произведения $A \otimes B$ (некоммутативного) изоморфен коммутативному тензорному произведению $M(A) \otimes^c M(B)$ коммутативных полугрупп $M(A)$, $M(B)$.

Доказательство. 1. Обозначим $M(A) = E$, $M(B) = F$. Теорема будет доказана, если мы покажем, что существует такой гомоморфизм $\alpha : A \otimes B \to E \otimes^c F$ тензорного произведения $A \otimes B$ на коммутативное тензорное произведение $E \otimes^c F$, что для произвольного гомоморфизма $\varphi : A \otimes B \to G$ тензорного произведения $A \otimes B$ на произвольную полуструктуру G существует гомоморфизм $\varphi^* : E \otimes^c F \to G$ так, что $\varphi = \varphi^* \circ \alpha$ (рис. 6).

2. Пусть $\xi : A \to M(A) = E$, соответственно $\eta : B \to M(B) = F$ — естественный гомоморфизм полугруппы A, соответственно B, на ее мак-

симальный полуструктурный образ $M(A)$, соответственно $M(B)$. Пусть $\pi : E \otimes F \to C(E \otimes F)$ — естественный гомоморфизм полугруппы $E \otimes F$ на ее максимальный коммутативный образ $C(E \otimes F)$ и $\gamma : C(E \otimes F) \to E \otimes^c F$ изоморфизм, существование которого гарантирует лемма 1. В этом случае $\gamma[\pi(e \otimes f)] = e \otimes^c f$ для всех $e \in E$, $f \in F$.

3. Теперь определим отображение $\alpha : A \otimes B \to E \otimes^c F$ следующим

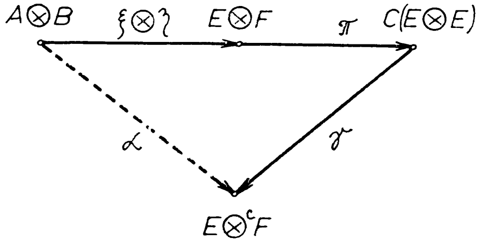

Рис. 7

образом: $\alpha = \gamma \circ \pi \circ (\xi \otimes \eta)$ (Рис. 7). Очевидно, что α — гомоморфизм полугруппы $A \otimes B$ на полугруппу $E \otimes^c F$. Для всех $a \in A$, $b \in B$, $\xi(a) = e \in E$, $\eta(b) = f \in F$ получаем: $\alpha(a \otimes b) = \gamma \circ \pi \circ (\xi \otimes \eta)(a \otimes b) = \gamma \circ \pi[\xi(a) \otimes \eta(b)] = \gamma \circ \pi(e \otimes f) = \gamma[\pi(e \otimes f)] = e \otimes^c f$.

4. Пусть G — произвольная полуструктура и $\varphi : A \otimes B \to G$ — гомоморфизм $A \otimes B$ на G. Определим отображение $\beta : E \times F \to G$ декартова произведения $E \times F$ в полуструктуру G следующим образом: $\beta(e, f) = \varphi(a \otimes b)$ для всех $(e, f) \in E \times F$, где $a \in A$, $b \in B$ таковы, что $\xi(a) = e$, $\eta(b) = f$.

5. Нам необходимо показать, что β однозначно определено. Значит, нам надо показать, что $\beta(e, f)$ независимо от выбора a, соответственно b, в классах конгруэнции $\xi^{-1} \circ \xi$, соответственно $\eta^{-1} \circ \eta$.

Пусть $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ таковы, что $\xi(a) = \xi(a') = e$, $\eta(b) = \eta(b') = f$. Из леммы 2 вытекает, что $\xi(a) = \xi(a')$ тогда и только тогда, когда $a\underline{\varrho} a'$. Значить, или $a = a'$, или существуют натуральное число $k \geqslant 2$ и такие элементы $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$, что $a_1 = a$, $a_k = a'$, $a_i \varrho_1 a_{i+1}$ для $i = 1, 2, \dots, k - 1$.

Пусть $a_1 \varrho_1 a_2$. Значит, $a_1, a_2 \in U_A \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ для каких-нибудь $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$. Затем $a_1 = x_1^{k_{11}} x_2^{k_{12}} \dots x_n^{k_{1n}} x_1^{k_{21}} x_2^{k_{22}} \dots x_n^{k_{2n}} \dots x_1^{k_{s1}} x_2^{k_{s2}} \dots x_n^{k_{sn}}$ где $k_{ij} \geqslant 0$, $k_{1i} + k_{2i} + \dots + k_{si} \geqslant 1$ для $i = 1, 2, \dots, h$. $a_2 = x_1^{h_{11}} x_2^{h_{12}} \dots x_n^{h_{1n}} x_1^{h_{21}} x_2^{h_{22}} \dots x_n^{h_{2n}} \dots x_1^{h_{r1}} x_2^{h_{r2}} \dots x_n^{h_{rn}}$ где $h_{ij} \geqslant 0$, $n_{1i} + h_{2i} + \dots + h_{ri} \geqslant 1$ для $i = 1, 2, \dots, n$. Так как φ — гомоморфизм полугруппы $A \otimes B$ на полуструктуру G (G — коммутативная полугруппа идемпотентов), то элементы $\varphi(x_i \otimes b)$ — идемпотенты, которые между собой коммутируют. Поэтому $\varphi(a_1 \otimes b) = \varphi(x_1^{k_{11}} \dots x_n^{k_{1n}} x_1^{k_{21}} \dots x_n^{k_{2n}}$

$\dots x_1^{k_{s1}} \dots x_n^{k_{sn}} \otimes b) = \varphi[(x_1^{k_{11}} \otimes b) \dots (x_n^{k_{sn}} \otimes b)] = \varphi(x_1^{k_{11}} \otimes b) \dots \varphi(x_n^{k_{sn}} \otimes b) = [\varphi(x_1 \otimes b)]^{k_{11}} \dots [\varphi(x_n \otimes b)]^{k_{sn}} = [\varphi(x_1 \otimes b)]^{k_{11}+k_{21}+\dots+k_{s1}} \times$ $\times [\varphi(x_2 \otimes b)]^{k_{12}+k_{22}+\dots+k_{s2}} \dots [\varphi(x_n \otimes b)]^{k_{1n}+k_{2n}+\dots+k_{sn}}$, где $k_{1i} + k_{2i} + \dots + k_{si} \geqslant 1$ для $i = 1, 2, \dots, n$.

Так как $\varphi(x_i \otimes b) \in G$ являются идемпотентами, то: $\varphi(a_1 \otimes b) = \varphi(x_1 \otimes b)\, \varphi(x_2 \otimes b) \dots \varphi(x_n \otimes b)$.

$$\begin{tikzcd}
E \times F \arrow[rr, "\omega"] \arrow[dr, "\beta"'] & & E \otimes^c F \arrow[dl, dashed, "\varphi^*"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

Рис. 8

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & E \otimes^c F \arrow[dl, dashed, "\varphi^*"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

Рис. 9

Тем самым образом докажем, что: $\varphi(a_2 \otimes b) = \varphi(x_1 \otimes b)\, \varphi(x_2 \otimes b) \dots \varphi(x_n \otimes b)$. Значит, $\varphi(a_1 \otimes b) = \varphi(a_2 \otimes b)$. Точно так же $\varphi(a_2 \otimes b) = \varphi(a_3 \otimes b), \dots, \varphi(a_{k-1} \otimes b) = \varphi(a_k \otimes b)$. Мы доказали, что $\varphi(a \otimes b) = \varphi(a' \otimes b)$. Аналогичным образом мы докажем равенство $\varphi(a' \otimes b) = \varphi(a' \otimes b')$, и значит, $\varphi(a \otimes b) = \varphi(a' \otimes b')$.

6. Из предыдущей части вытекает, что β — однозначно определенное отображение $E \times F$ в G. Дальше для всех $e_1, e_2 \in E$, $f \in F$ существуют $a_1, a_2 \in A$, $b \in B$ такие, что $e_1 = \xi(a_1)$, $e_2 = \xi(a_2)$, $f = \eta(b)$. Итак $e_1 e_2 = \xi(a_1)\, \xi(a_2) = \xi(a_1 a_2)$. Из этого вытекает $\beta(e_1 e_2, f) = \varphi(a_1 a_2 \otimes b) = \varphi[(a_1 \otimes b)(a_2 \otimes b)] = \varphi(a_1 \otimes b)\, \varphi(a_2 \otimes b) = \beta(e_1, f)\, \beta(e_2, f)$. Точно так же $\beta(e, f_1 f_2) = \beta(e, f_1)\, \beta(e, f_2)$ для всех $e \in E$, $f_1, f_2 \in F$. Мы доказали, что β — билинейное отображение декартова произведения $E \times F$ в полуструктуру G. Из свойств тензорного произведения вытекает, что к отображению β существует такой гомоморфизм $\varphi^* : E \otimes^c F \to G$, что следующая диаграмма коммутирует (значит, $\beta = \varphi^* \circ \omega$, рис. 8).

7. Если мы вернемся к исходной полугруппе $A \otimes B$, получаем следующую диаграмму (рис. 9).

Для гомоморфизма $\varphi : A \otimes B \to G$ существует такой гомоморфизм $\varphi^* : E \otimes^c F \to G$, что $\varphi(a \otimes b) = \beta(e, f) = \varphi^* \circ \omega(e, f) = \varphi^*(e \otimes^c f)$ для всех $a \otimes b \in A \otimes B$ и $e = \xi(a)$, $f = \eta(b)$. Из 3. для всех $a \otimes b \in A \otimes B$ получаем $\varphi(a \otimes b) = \varphi^* \circ \alpha(a \otimes b)$. Так как это равенство истинно для всех образующих элементов полугруппы $A \otimes B$, то оно истинно для всех элементов полугруппы $A \otimes B$, итак $\varphi = \varphi^* \circ \alpha$. Тем доказательство нашей теоремы закончено.

ЛИТЕРАТУРА

[1] FULP, R.: Tensor and torsion products of semigroups. Pacif. J. Math. *32*, 1970, 685—696.

[2] GRILLET, P. A.: The tensor product of semigroups. Trans. Amer. Math. Soc. *138*, 1969, 267—280.

[3] GRILLET, P. A.: The tensor product of commutative semigroups. Trans. Amer. Math. Soc. *138*, 1969, 281—293.

[4] TAMURA, T. — SHAFER, J.: Another proof of two decompositions theorems of semigroups. Proc. Japan Acad. *42*, 1966, 685—687.

Поступило 29. 3. 1973

Katedra matematiky Elektrotechnickej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej
Vazovova 1/b
880 19 Bratislava