

Antonín Havránek; Ondřej Čertík

Pružné kyvadlo

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 51 (2006), No. 3, 198--216

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/141318>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2006

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Pružné kyvadlo

Antonín Havránek a Ondřej Čertík, Praha

1. Úvod

Většina z nás fyziků se ve svém životě setkala s podivným jevem — závaží zavěšené na pružince, tedy v našich představách dokonalý model harmonického oscilátoru, po chvíli kmitání ve svislém směru začne opouštět svislici, přejde na kývavý pohyb, poté se začne k svislici opět přibližovat a děj se opakuje. Setkáme-li se s tímto jevem při výuce ve fyzikálním praktiku, na dotaz studenta odpovíme podle svého založení, buď ať se snaží pružinku co nejpečlivěji rozkmitat pouze ve svislém směru, nebo ať předpokládá, že kmity a kyvy jsou nezávislé, a měřenou hodnotu doby kmitu užije pro další výpočet. Jsme-li s problémem blíže seznámeni, poradíme studentovi, ať volí co nejmenší amplitudu kmitu, nebo ať měření při zlobící velikosti závaží vynechá. První rada je prakticky neproveditelná, druhá vychází ze špatného předpokladu nezávislosti kmitů a kyvů, ale obvykle přinese do výsledku měření doby kmitu jen malou chybu, třetí rada je užitečná a čtvrtá rada je dobrá, jak se dále ukáže.

Proč se závaží zavěšené na pružince někdy nechová jako model lineárního harmonického oscilátoru? Když je pružinka zavěšena dostatečně volně, má pohyb závaží (přesně jeho hmotného středu) tři stupně volnosti. Adekvátní model pro popis jeho pohybu je pružné kyvadlo (elastic pendulum) — hmotný bod v tíhovém poli vázaný k pevnému bodu pružnou vazbou. Když pokládáme pružinku se závažím za model harmonického oscilátoru, mlčky předpokládáme, že hmotný střed závaží neopustí svislici proloženou bodem závěsu. Takový předpoklad je sice teoreticky možný, ale prakticky nerealizovatelný v případě, kdy poloha hmotného středu závaží na svislici přestane být polohou stabilní. To právě nastane při již zmíněném jankovitém chování pružinek. Při určitém poměru délky pružiny, její tuhosti a hmotnosti závaží sebemenší výchylka hmotného středu závaží od svislice začne narůstat a svislý kmitavý pohyb se začne měnit v kývavý pohyb. Kyvy a kmity pružinky se začnou chovat jako vázané oscilátory; kmity mohou vybudit kyvy značné amplitudy a energie oscilací se pak mezi kyvy a kmity periodicky přelévá. Podmínky vzniku jevu a jeho průběh vysvětlíme, když závaží zavěšené na pružině budeme uvažovat jako pružné kyvadlo.

Doc. RNDr. ANTONÍN HAVRÁNEK, CSc. (1934), Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy, V Holešovičkách 2, 180 00 Praha 8, e-mail: havranek@kmf.troja.mff.cuni.cz

ONDŘEJ ČERTÍK (1983), student téže fakulty.

Práce byla iniciována úlohou z mezinárodního Turnaje mladých fyziků (IYPT), kterou řešil student Gymnázia Christiana Dopplera v Praze Ondřej Čertík, a při řešení jej vedl doc. Antonín Havránek, který na tomto gymnáziu učil na částečný úvazek.

Pružné kyvadlo je model, kterým lze sledovat řadu pozoruhodných jevů. V základní práci [1], kterou v 30. letech minulého století inicioval L. I. Mandelštam, byly modelovány vazby mezi kmity molekuly CO_2 známé jako Fermiho rezonance [2]. Anglický překlad práce [1] přetiskl a opatřil komentářem současný protagonista problematiky pružného kyvadla P. Lynch [3]. V komentáři stručně shrnuje stav studia na konci dvacátého století. Oscilace kyvadla kolem rovnovážné polohy se uvažují buď jako rovinný problém, nebo obecněji a realističtěji jako pohyb s třemi stupni volnosti (např. [4]). Vazba mezi kmity a kyvy pružného kyvadla je nelineární a nelze použít rozklad převádějící problém na lineární kombinaci oscilací s dvěma vlastními frekvencemi, tedy nelze užít postup, který mnozí z nás znají z absolvované úlohy fyzikálního praktika věnované lineárně vázaným kmitům [5]. Pohyb vázaných oscilátorů silně závisí na volbě počátečních podmínek. Proto se model pružného kyvadla studuje v souvislosti s teoriemi dynamických systémů (např. [6], [7]), které se otázkou závislosti vzniklých pohybů na změně počátečních podmínek, kritickými body těchto závislostí (bifurkacemi) a otázkami, zda pohyb je chaotický či deterministický, intenzivně zabývají. Tyto otázky jsou velmi důležité v meteorologii. Proto nepřekvapí, že Petr Lynch je zaměstnancem Irského meteorologického ústavu a že model pružného kyvadla používá k výkladu atmosférických dějů (např. [8]) a že existují i jiné práce používající model pružného kyvadla v meteorologii (např. [9]). V práci [8] je velmi podrobný přehled literatury věnované pružnému kyvadlu. Problém pružného kyvadla je stále aktuální, nejnovější informace lze získat např. na internetu [10].

V článku, jehož cílem je seznámit čtenáře s problematikou pružného kyvadla, probereme podrobněji jeho pohyb v okolí rovnovážné polohy. Omezíme se na rovinný pohyb. Ukážeme, jak lze pohybovou rovnici kyvadla v blízkém okolí rovnovážné polohy v dobrém přiblížení přepsat na soustavu dvou rovnic, rovnice pro kmity a rovnice pro kyvy vázané nelineární vazbou. V tomto přiblížení rozebereme různé oblasti chování pružného kyvadla a výsledky konfrontujeme s numerickými řešeními původní pohybové rovnice kyvadla.

2. Pružné kyvadlo, vymezení sledované úlohy

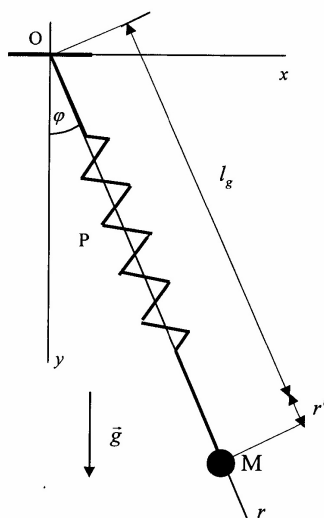
Jako pružné kyvadlo označujeme hmotný bod M o hmotnosti m pohybující se v tíhovém poli (zrychlení \vec{g}), který je k bodu závěsu O vázán pružinou P (viz obr. 1).

Předpokládáme-li, že délka nezatížené pružiny je l a její tuhost je k , pohyb hmotného bodu je popsán pohybovou rovnicí

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{G} + \vec{F}_p, \quad (1)$$

kde $\vec{G} = m\vec{g}$ je tíhová síla a $\vec{F}_p = -(r-l)k\vec{r}/r = k\vec{r}[(l/r) - 1]$ pružná síla. V rovnici pro pružnou sílu je $\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{r}(x(t), y(t), z(t))$ polohový vektor hmotného bodu M, který má počátek v bodě závěsu O.

Pružná síla je v soustavě (1) chápána jako pružná vazba bez ohledu na to, že pružina by se při pohybu hmotného bodu nad bodem závěsu bortila. I při takto chápaném pů-



Obr. 1.

sobení pružiny obsahuje množina řešení soustavy rovnic (2) složité prostorové křivky, které dále vyšetřovat nebudeme. Omezíme se pouze na pohyb kyvadla ve svislé rovině procházející bodem závěsu O^1). Jedna z takových rovin je znázorněna na obr. 1, ve kterém je i vyznačena volba kartézských souřadnic x a y a polárních souřadnic r a φ . Vztah obou souřadnicových soustav je dán rovnicemi

$$x(t) = r(t) \sin \varphi(t) \quad \text{a} \quad y(t) = r(t) \cos \varphi(t). \quad (2)$$

Z pohybové rovnice (1) získáme po běžných úpravách pro předpokládaný rovinný pohyb tuto soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 r}{dt^2} &= -k(r - l) + mg \cos \varphi + mr \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2, \\ mr \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= -mg \sin \varphi - 2m \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned} \quad (3)$$

pro neznámé funkce $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. Parametrické rovnice $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ určují pohyb polohového vektoru $\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{r}(r(t), \varphi(t))$, který popisuje pohyb hmotného bodu M reprezentujícího pružné kyvadlo. Časový průběh velikosti polohového vektoru $r = r(t)$ popisuje kmitavý pohyb pružného kyvadla a časová závislost úhlu $\varphi = \varphi(t)$ popisuje jeho kývavý pohyb.

¹⁾ Naskýtá se otázka, zda takové omezení je možné. Teoreticky ano, protože ve výpočtu automaticky předpokládáme počáteční podmínky takové, že bod M nikdy neopustí rovinu danou jeho spojnicí s bodem závěsu O a svislicí vedenou tímto bodem. Prakticky však nelze při uvedení reálného pružného kyvadla do pohybu takové podmínky zaručit. Je to obdobné, jako když pro pružinu předpokládáme pouze pohyb ve svislém směru, a pokládáme ji pak za model harmonického oscilátoru, jak jsme již rozebrali v textu. Zde vytváříme rovinný model pružného kyvadla, ale reálné pružné kyvadlo bude konat prostorový pohyb, který je teoreticky sledován např. v [4].

Dále se při analýze pohybu pružného kyvadla omezíme na malé kyvy a malé kmity. Pro malé úhly φ můžeme užitím přibližných vztahů $\sin \varphi \doteq \varphi$, $\cos \varphi \doteq 1$ přepsat rovnice (3) na tvar

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 r}{dt^2} &= -k \left[r - \left(l + \frac{mg}{k} \right) \right] + mr \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2, \\ mr \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= -mg\varphi - 2m \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned} \quad (4)$$

Výraz

$$l + \frac{mg}{k} = l_g, \quad (5)$$

pro který jsme rovnicí (5) zavedli označení l_g , značí rovnovážnou délku pružného kyvadla, zavěsíme-li na ně závaží hmotnosti m . V přiblížení malých kmitů se vzdálenost bodu M od bodu závěsu O, tedy velikost souřadnice r , nebude příliš lišit od l_g , a proto tam, kde se v rovnicích (4) r vyskytuje samostatně (ne v rozdílu), je nahradíme l_g . Dostaneme tak po drobných algebraických úpravách rovnice

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{k}{m} (r - l_g) &= l_g \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2, \\ \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{l_g} \varphi &= -\frac{2}{l_g} \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned} \quad (6)$$

Položíme-li pravé strany rovnic rovné nule, je první rovnice rovnicí kmitavého pohybu ve směru souřadnice r kolem rovnovážné polohy l_g , tedy rovnicí netlumených kmitů pro výchylku $r' = r - l_g$. Protože l_g je pro zvolené kyvadlo konstantní, jsou zřejmě derivace výchylky r' a souřadnice r stejné; $dr'/dt = dr/dt$, $d^2 r'/dt^2 = d^2 r/dt^2$. Vlastní úhlová frekvence kmitů je

$$\omega_{r0} = \sqrt{k/m}. \quad (7)$$

Druhá rovnice soustavy (6), položíme-li pravou stranu rovnou nule, je rovnicí kývavého pohybu matematického kyvadla délky l_g , tedy netlumených kyvů s vlastní úhlovou frekvencí

$$\omega_{\varphi 0} = \sqrt{g/l_g}. \quad (8)$$

Pravé strany rovnic (6) představují vazbu mezi oběma oscilátory, která je zřejmě nelineární. V tomto přiblížení, tedy jako pohyb dvou oscilátorů vázaných nelineární vazbou, budeme pohyb pružného kyvadla diskutovat a výsledky konfrontovat s numerickým řešením nezjednodušených rovnic (3). Přibližné, ale velmi přehledné rovnice (6) tedy užijeme k tomu, abychom se kvalitativně orientovali ve výsledcích, které získáme numerickým řešením přesných rovnic (3).

Chování pružného kyvadla přibližně popsané systémem rovnic (6) rozebereme nejprve kvalitativně. Kýve-li pružné kyvadlo, největší měrná odstředivá síla²⁾ působí při

²⁾ Členy na pravé straně rovnic (6) představující nelineární vazby mají fyzikální rozměr síla/hmotnost a budeme je tedy nazývat měrnými silami. V první rovnici má tento člen charakter měrné odstředivé síly, v druhé rovnici měrné Coriolisovy síly. Protože však pracujeme v inerciální souřadnicové soustavě, jde o měrné síly pravé.

průchodu rovnovážnou polohou, nulová je v bodech obratu. Kývavý pohyb (změna úhlu φ) tedy budí kmity ve směru souřadnice r . Měrná Coriolisova síla díky součinu $(dr/dt)(d\varphi/dt)$ budí kývavý pohyb, když pružné kyvadlo koná kmity a hodnota úhlové rychlosti $d\varphi/dt$ je nenulová. Aby úhlová rychlost mohla být v průběhu děje nenulová, je nezbytné, aby hodnota úhlu φ na počátku pohybu (budeme ji značit φ_{00}) byla nenulová³⁾. Pohyb pružného kyvadla probíhá podobně jako pohyb kyvadel vázaných pružnou vazbou (viz např. [5]), energie kyvů se převádí na energii kmitů a naopak. Kyvadlo chvíli kmitá ve svislém směru (mění r při přibližně nulovém φ) a potom přejde v kývavý pohyb (mění φ při přibližně stálém r). Analogie však není úplná, protože vzhledem k nelinearitě vazby nemůžeme provést rozklad vzniklého pohybu na lineární kombinaci dvou základních modů.

Již z kvalitativního rozboru první z rovnic systému (6) vyplývá, že odstředivá měrná síla $l_g(d\varphi/dt)^2$ vynucuje kmit s dvojnásobnou frekvencí, než je frekvence kývavého pohybu. Za jednu dobu kmitu kývavého pohybu projde totiž pružné kyvadlo dvakrát rovnovážnou polohou, kde hodnota odstředivé síly je maximální. Bude-li frekvence vlastních kmitů pružiny (7) rovna dvojnásobku frekvence vlastních kmitů kyvadla (8),

$$\sqrt{k/m} = \omega_{r0} = 2\omega_{\varphi 0} = 2\sqrt{g/l_g}, \quad (9)$$

nastane jakási rezonance a shora popsáný efekt výměny kmitů a kyvů bude největší. Pro pružinu s konstantou k lze dosáhnout podmínky (9) volbou vhodné hmotnosti kyvadla m . Pro takovou hmotnost plyne z rovnice (9) podmínka

$$m = \frac{l_g k}{4g} = \frac{l k}{3g}. \quad (10)$$

V druhé části rovnice jsme do vyjádření zavedli podle (5) délku nezatíženého kyvadla l místo délky zatíženého kyvadla l_g . Touto úpravou se nám podařilo rezonanční hmotnost vyjádřit jen podle tíhového zrychlení a parametrů pružného kyvadla. Pružné kyvadlo dané délkou l a tuhosti k lze naladit do rezonance, zvolíme-li podle (10) jeho hmotnost m .

3. Různé oblasti pohybu pružného kyvadla

Pro diskusi rozdělíme pohyb pružného kyvadla na tři oblasti: a) oblast dominantního kývavého pohybu, b) oblast dominantního kmitavého pohybu a c) rezonanční oblast. Mimo rezonanční oblast dochází jen k malé výměně energie mezi oběma oscilacemi.

³⁾ Požadavek nenulové počáteční úhlové výchylky právě činí rozdíl mezi hmotným bodem zavěšeným na pružině, který bývá považován za ideální model harmonického oscilátoru, a zde studovaným pružným kyvadlem se zdánlivě stejnou modelovou reprezentací. Pro model harmonického oscilátoru je třeba dodat, že hmotný bod je vázán na svislou přímku procházející bodem závěsu. Naopak při numerickém výpočtu pohybu pružného kyvadla musíte počítači zadat nenulovou počáteční úhlovou výchylku φ_{00} , abyste mohli sledovat zajímavosti pohybu pružného kyvadla a nedostali jen triviální řešení harmonického oscilátoru.

Když v takové oblasti volbou počátečních podmínek zvolíme dominantní oscilaci, ta bude druhou oscilací jen velmi málo ovlivněna. Problém pak můžeme řešit jako problém vynucených a ne vázaných kmitů. Soustavu rovnic (6) můžeme separovat a pro separované rovnice získáme přibližná analytická řešení.

První rovnici soustavy (6) v uvedeném přiblížení lze pokládat za rovnici kmitů vynucených kyvy, když zanedbáme malé kolísání amplitudy kyvů způsobené vazbou s kmity. Podrobně je postup proveden a srovnán s numerickým řešením rovnice (3) v části a) této kapitoly. Druhá rovnice soustavy (6) je složitější, protože vynucující měrná síla je součinem vynucujícího kmitu a vynuceného kyvu. Přesto i pro tuto rovnici se nám podařilo najít analytický výraz popisující průběh kyvů vynucených kmity mimo rezonanční oblast, který uvádíme v části b) této kapitoly. Toto řešení nám spolu s výsledky numerických řešení pomohlo objasnit charakter přechodu kyvadla do rezonanční oblasti a význam, jaký pro tento přechod má relativní počáteční prodloužení pružiny. Rezananční oblast je v části c) této kapitoly popsána jen kvalitativně na základě numerických řešení. Pokus o objasnění tvaru křivek na základě přibližných rovnic (6) nebyl učiněn. Přechodu do rezonanční oblasti, který má charakter bifurkace, je věnována kapitola 4.

Pro numerické výpočty jsme zvolili kyvadlo s parametry: délka nezatíženého kyvadla $l = 0,28$ m a jeho pružinová konstanta (tuhost) $k = 12,5$ N/m. Pro takovou pružinu kyvadlo bude v rezonanci, zatížíme-li je závažím hmotnosti

$$m = lk/3g = 0,1189 \text{ kg} \doteq 0,12 \text{ kg}, \quad (11)$$

jak plyne z rovnice (10). Výpočty jsme prováděli pro rezonanční oblast a její okolí. Rezananční podmínky jsme regulovali volbou předpokládané hmotnosti m kyvadla a počátečními podmínkami jeho pohybu, především volbou počátečního protažení pružiny. Pro numerické výpočty jsme volili Rungeovu-Kuttovu metodu 4. řádu. Řešili jsme nezávisle přesné rovnice (1) pro rovinný případ v kartézských souřadnicích a jejich úpravu (3) v polárních souřadnicích. Výsledky se od sebe v rámci nastavené přesnosti nelišily, což pokládáme za test přesnosti numerických výpočtů.

a) Oblast dominantního kývavého pohybu

Pohyby v této oblasti získáme, volíme-li počáteční podmínky pohybu tak, aby výrazně převažoval kývavý pohyb. Např. když vypustíme kyvadlo z krajní polohy (velikost φ_{00} zvolíme několik úhlových stupňů) a počáteční protažení pružiny

$$r'_{00} = r_{00} - l_g \quad (12)$$

(r_{00} počáteční hodnota souřadnice r , l_g rovnovážná délka zatížené pružiny) volíme nulové. Jsme-li dostatečně vzdáleni od rezonance, vybudí se jen malé kmity, energie vyměňovaná mezi kmity a kyvy je malá a vznik kmitavého pohybu jen málo ovlivní průběh kyvů. Pro přibližné početní řešení úlohy pak předpokládáme, že kyvy nejsou kmity vůbec ovlivněny, tedy že jsou popsány harmonickou funkcí

$$\varphi = \varphi_{00} \cos(\omega_{\varphi 0} t). \quad (13)$$

Ze soustavy rovnic (6) pak můžeme v tomto přiblížení separovat první rovnici

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{k}{m} (r - l_g) = l_g \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \quad (14)$$

a uvažovat ji jako rovnici pro vynucené kmity (pohyb ve směru souřadnice r) pružného kyvadla, kde vynucující harmonickou silou (přesněji měrnou silou) je čtverec derivace úhlové výchylky φ násobený délkou kyvadla l_g . Pro derivaci úhlové výchylky, tj. pro okamžitou úhlovou rychlost kyvadla, plyne z (13) vyjádření

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\varphi_{00}\omega_{\varphi 0} \sin(\omega_{\varphi 0}t). \quad (15)$$

Dosadíme-li (15) do rovnice (14) a použijeme-li vztah (7), dostáváme rovnici

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} + \omega_{r0}^2 r' = l_g \varphi_{00}^2 \omega_{\varphi 0}^2 \sin^2(\omega_{\varphi 0}t) = \frac{l_g \varphi_{00}^2 \omega_{\varphi 0}^2}{2} (\cos(2\omega_{\varphi 0}t) - 1). \quad (16)$$

V posledním zápisu rovnice jsme použili skutečnosti, že druhá derivace prodloužení pružiny $r' = r - l_g$ je stejná jako druhá derivace souřadnice r . Rovnice (16) je rovnicí pro vynucený netlumený kmit, kde vynucující frekvence je $2\omega_{\varphi 0}$. Jejím řešením pro počáteční podmínky

$$r'(0) = 0, \quad \frac{dr'}{dt}(0) = 0, \quad (17)$$

které odpovídají případu, kdy pružné kyvadlo volně vypustíme z krajní polohy kyvu (úhlová výchylka φ_{00}), aniž protáhneme pružinu oproti její délce v zatíženém stavu l_g ($r'_{00} = 0$), je

$$r' = \frac{\varphi_{00}^2 l_g \omega_{\varphi 0}^2}{4\omega_{\varphi 0}^2 - \omega_{r0}^2} \sin\left(\frac{\omega_{r0} - 2\omega_{\varphi 0}}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_{r0} + 2\omega_{\varphi 0}}{2}t\right) - \frac{\varphi_{00}^2 l_g \omega_{\varphi 0}^2}{2\omega_{r0}^2} \cos(\omega_{r0}t) + \frac{\varphi_{00}^2 l_g \omega_{\varphi 0}^2}{2\omega_{r0}^2}. \quad (18)$$

Rovnici (18) přepíšeme do stručnějšího tvaru, do kterého zavedeme označení r'_{m1} pro amplitudu obálky prvního sčítance na pravé straně rovnice, r'_{m2} pro amplitudu druhého sčítance, ω_s pro střední frekvenci kyvů a ω_v pro výměnnou frekvenci, tj. pro frekvenci, s jakou se převádí energie kyvů na energii kmitů. Nově zavedené veličiny jsou definovány takto:

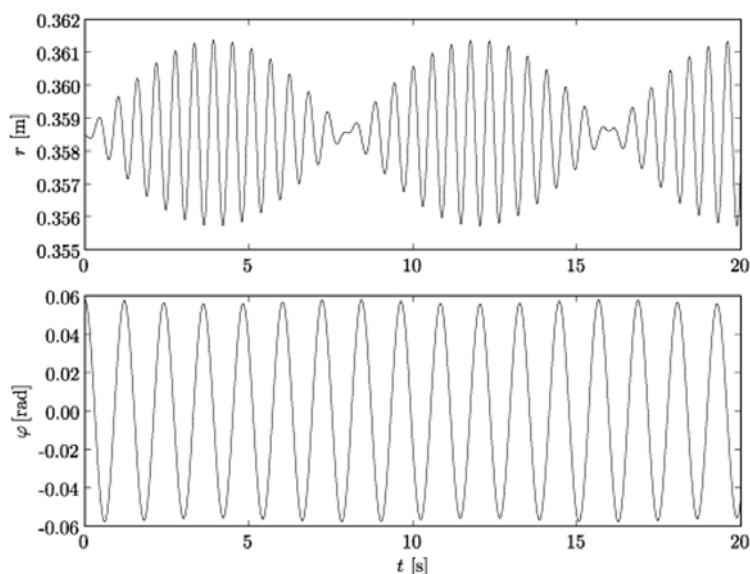
$$r'_{m1} = \frac{\varphi_{00}^2 l_g \omega_{\varphi 0}^2}{|\omega_{r0}^2 - 4\omega_{\varphi 0}^2|}, \quad r'_{m2} = \frac{\varphi_{00}^2 l_g \omega_{\varphi 0}^2}{2\omega_{r0}^2}, \quad (19)$$

$$\omega_s = \frac{\omega_{r0} + 2\omega_{\varphi 0}}{2}, \quad \omega_v = \frac{|\omega_{r0} - 2\omega_{\varphi 0}|}{2}.$$

S nimi přepíšeme (18) na tvar

$$r' = r'_{m1} \sin(\omega_v t) \sin(\omega_s t) - r'_{m2} \cos(\omega_{r0} t) + r'_{m2}. \quad (18')$$

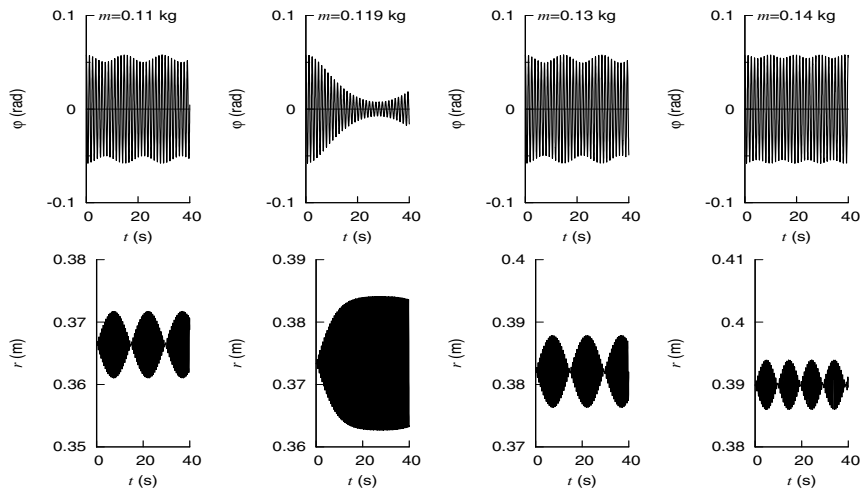
Člen s násobkem dvou sinů má tvar, který známe z vyšetřování rázů či lineárně vázaných oscilátorů. Rozdílová pomalá frekvence ω_v moduluje amplitudu kmitů, které se dějí se střední frekvencí ω_s mezi dvojnásobnou vlastní frekvencí ω_{φ_0} kývavého pohybu a vlastní frekvencí ω_{r_0} kmitavého pohybu. Druhý člen představuje harmonický kmit s frekvencí ω_{r_0} , která je blízká frekvenci ω_s modulovaného kmitu z prvního členu a jehož amplituda r'_{m2} je podstatně menší než amplituda r'_{m1} prvního členu. Tato amplituda je shodná s posunutím rovnovážné polohy (třetí člen) celého složeného kmitu (18) ve směru rostoucí souřadnice r , které je způsobeno odstředivou silou vyvolanou kyvy. Kosinový kmit (druhý člen) vychází z počáteční polohy a osciluje potom kolem posunuté rovnovážné polohy. Složený kmit daný rovnicí (18) má typický tvar rázů (rybičky), které probíhají kolem posunuté rovnovážné polohy. Pozorovaná amplituda obálky kmitů je součtem amplitud r'_{m1} a r'_{m2} .



Obr. 2.

Numerickým řešením přesné soustavy rovnic (3) pro kyvadlo s již uvedenými parametry a s hmotností $m = 0,10$ kg jsme získali závislosti výchylky r' a úhlu φ na čase t , které jsou znázorněny na obr. 2. Počáteční úhlovou výchylku jsme volili $\varphi_{00} = 0,05785$ rad. Průběh kmitů, tj. funkce $r' = r'(t)$ z obr. 2, kvalitativně dobře odpovídá průběhu, který byl předpovězen z přibližných rovnic (6) pro případ dominantního kyvu, tedy funkci (18), resp. (18'). Se stejnou počáteční výchylkou $\varphi_{00} = 0,05785$ rad jsme numericky spočítali řešení rovnic (6) pro dalších šest hodnot hmotností. Graficky je část těchto řešení znázorněna v obr. 3. Hlavní parametry všech řešení a jejich porovnání s analytickými předpověďmi je uvedeno v tab. 1.

Smyslem obr. 3 je ukázat, jak se obraz kyvů a kmitů vyvíjí, měníme-li předpokládanou hmotnost kyvadla m . Je vidět, že s výjimkou rezonančního případu $m = 0,119$ kg je průběh kmitů a kyvů podobný tomu, který je znázorněn v obr. 2, odpovídá tedy analytické předpovědi dané rovnicí (18). Pouze ve zmíněném rezonančním případě



Obr. 3.

dochází ke značnému útlumu kyvů a obálka kmitů je zřetelně neharmonická. Přitom je zajímavé, že již při hmotnosti $m = 0,12 \text{ kg}$ rezonanční charakter kmitů není kvalitativně nápadný a teprve hodnoty z tab. 1 ukazují, že odchylky od teoreticky předpovězeného průběhu jsou značné i v tomto případě.

TABULKA 1.

m (kg)	ω_{r0} (s^{-1})	$\omega_{\varphi 0}$ (s^{-1})	$\omega_{v, \text{an}}$ (s^{-1})	$\omega_{v, \text{num}}$ (s^{-1})	$r'_{m, \text{an}}$ (10^{-2} m)	$r'_{m, \text{num}}$ (10^{-2} m)	E_v (%)
0,1	11,18	5,23	0,36	0,39	0,22	0,28	6,6
0,11	10,66	5,17	0,16	0,21	0,52	0,54	28
0,119	10,25	5,126	0,001	0,034	80	1,1	100
0,12	10,21	5,12	0,015	0,085	5,4	1,0	88
0,13	9,81	5,07	0,16	0,21	0,52	0,58	26
0,14	9,45	5,02	0,30	0,32	0,31	0,39	10

V tabulce jsou uvedeny hodnoty hmotností m , jim odpovídající frekvence vlastních kmitů ω_{r0} a vlastních kyvů $\omega_{\varphi 0}$ kyvadla. Dále veličiny, které umožňují porovnat výsledky již uvedených přibližných analytických výpočtů (značeno indexem „an“) s výsledky numerických řešení (značeno indexem „num“) přesné rovnice (3). Jde o výměnnou frekvenci ω_v a amplitudu obálky kmitů vybuzených kyvy r'_m ; hodnota $r'_{m, \text{an}}$ je stanovena jako $r'_{m, \text{an}} = r'_{m1} + r'_{m2}$ (zavedení veličin viz (19)). V posledním sloupci tabulky je uvedena relativní hodnota energie E_v , která se vyměňuje mezi kyvy a kmity:

$$E_v = \frac{\text{energie převáděná}}{\text{energie celková}} = \frac{\Delta E}{E} = \frac{k(r'_{m, \text{num}})^2}{mgl_g \varphi_{00}^2}. \quad (20)$$

Tato hodnota ukazuje míru, s jakou je oprávněný předpoklad separovat rovnice (6) a první z nich (14) řešit jako rovnici pro vynucené kmity. Konečné vyjádření poměru

energií v rovnici (20) odpovídá právě sledovanému případu, kdy kyvadlo volně vypustíme z krajní polohy (počáteční podmínky (17)).

Tabulka ukazuje, že s výjimkou rezonančních případů ($m = 0,119$ kg a $0,12$ kg) analytický výpočet založený na přibližných rovnicích (6) dává dobré kvalitativní vysvětlení průběhu numerických řešení přesných rovnic (3). Přitom rozdíl mezi numericky zjištěnými a analyticky předpovězenými hodnotami je ještě zvětšen skutečností, že podmínka (12), kterou jsme užili i pro numerické výpočty, neodpovídá v tomto případě přesně podmínce volného vypuštění kyvadla z krajní polohy. Kyvadlo totiž protahuje jen složka tíhy do směru pružiny.

b) Oblast dominantního kmitavého pohybu

Buzení kyvů dominantními kmity je podstatně složitější než právě popsany inverzní případ a). Složitost lze tušit již letným pohledem na druhou z rovnic (6)

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l_g} \varphi = -\frac{2}{l_g} \frac{dr}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right). \quad (21)$$

Člen na pravé straně vystihující vazbu kmitů a kyvů je smíšený; je součinem derivace vynucujícího kmitu a derivace vznikajícího kyvu. Rovnice (21) je jiného charakteru než rovnice (14). Přepíšeme-li ji do anulovaného tvaru

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{2}{l_g} \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \omega_{\varphi 0}^2 \varphi = 0, \quad (22)$$

vidíme, že jde o homogenní lineární diferenciální rovnici, kde však místo konstanty je u první derivace hledané funkce $\varphi(t)$ člen $(2/l_g)(dr/dt)$, tedy funkce času t . Částečný přehled o jejím řešení získáme, předpokládáme-li, že funkce

$$r = r'_0 \cos(\omega_{r0}t) + l_g, \quad (23)$$

tedy že kyvy budíme kmity s konstantní amplitudou r'_0 a frekvencí rovnou frekvenci vlastních kmitů pružného kyvadla ω_{r0} . Dále je v rovnici (23) obsažen předpoklad, že pružinu vypouštíme v čase $t = 0$ z polohy, kdy je protažena o délku r'_0 z rovnovážné zatížené délky l_g . Dosadíme-li předpoklad (23) do rovnice (22), dostaneme rovnici

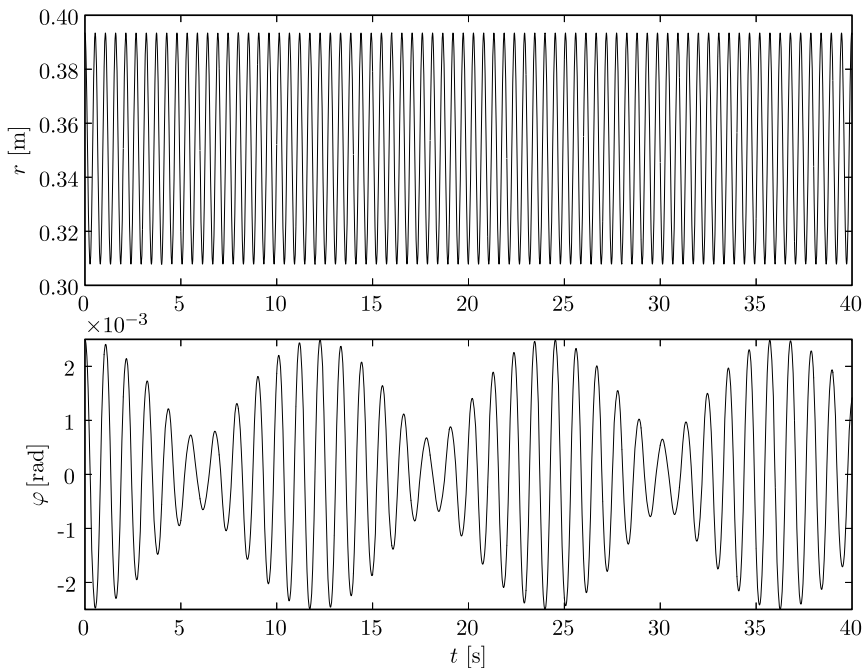
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{2r'_0}{l_g} \omega_{r0} \sin(\omega_{r0}t) \frac{d\varphi}{dt} + \omega_{\varphi 0}^2 \varphi = 0. \quad (24)$$

Aproximačními postupy jsme pro počáteční podmínky

$$\varphi(0) = \varphi_{00} \quad \text{a} \quad d\varphi(0)/dt = 0 \quad (25)$$

dostali pro průběh hledaných kyvů vyjádření

$$\varphi = \frac{\varphi_{00}}{\omega_{rP} - 2\omega_{vP}} \left[\omega_{rP} \cos(\omega_{\varphi P}t) \cos(\omega_{vP}t) - 2\omega_{vP} \cos \frac{\omega_{rP}}{2} \right]. \quad (26)$$



Obr. 4.

V poslední rovnici jsou zavedeny veličiny ω_{rp} a $\omega_{\varphi p}$ týkající se frekvencí, které se vyskytují v průběhu (index p) kyvů a jejichž hodnoty lze odečíst z grafů numerických řešení, a též jejich rozdílová frekvence

$$\omega_{vp} = \frac{\omega_{rp} - 2\omega_{\varphi p}}{2}. \quad (27)$$

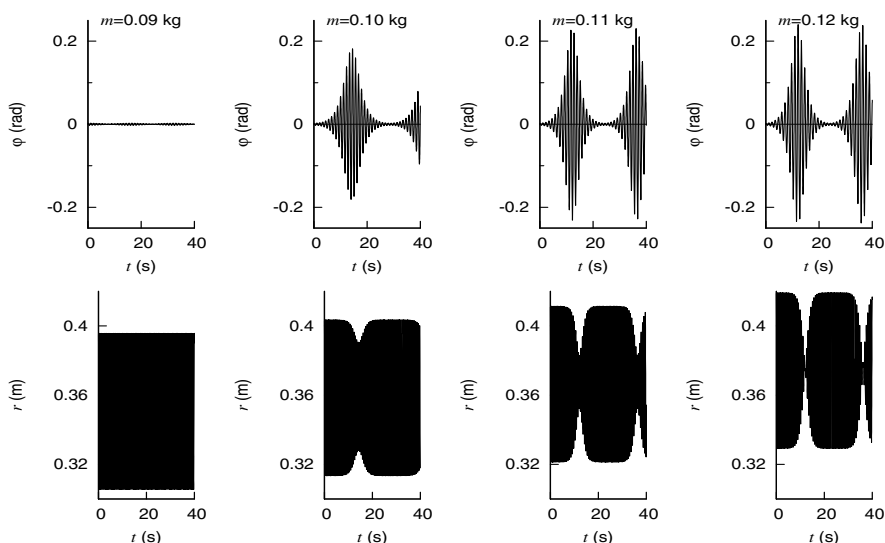
Na obrázku 4 je znázorněn numericky vypočítaný průběh kyvů i kmitů pro již zvolené kyvadlo, zavěsíme-li na ně závaží o hmotnosti $m = 0,09$ kg, protáhneme-li je z rovnovážné polohy o $r'_{00} = r'(0) = 0,044$ m a počáteční úhlovou výchylku volíme $\varphi_{00} = 2,5 \cdot 10^{-3}$ rad. Je vidět, že průběh kyvů kvalitativně připomíná průběh kmitů z obr. 2 a že podmínka stálosti druhé z oscilací, zde kmitů, je splněna daleko dokonaleji. Znázorněný průběh kyvů dobře odpovídá předpovědi dané rovnicí (26) včetně tvrzení, že v oblasti dominantních kmitů největší výchylka φ_{\max} kyvu je počáteční výchylka φ_{00} . To znamená, že kmity pružného kyvadla jsou v této oblasti stabilní. Náhodně vzniklá úhlová výchylka se zachovává. Kyvy nemají na chování kmitů téměř žádný vliv. Kvantitativní údaje o příkladu znázorněném na obr. 4 najdeme v první řádce tabulky 2.

Na obr. 4 je znázorněn případ, kdy pružné kyvadlo vybuzené protažením ve svislém směru se chová jako model harmonického oscilátoru. Malá, vždy přítomná úhlová výchylka φ_{00} se zachovává (reálně klesá) a frekvence kmitů není frekvencí kyvů podstatně ovlivněna. Uvažovaný případ leží velmi blízko přechodu mezi rezonančním a právě popsaným útlumovým chováním pružného kyvadla. Je toho dosaženo poměrně velkým (0,125) relativním počátečním prodloužením pružiny

$$d_{00} = r'_{00}/l_g, \quad (28)$$

i když relativní odchylka od rezonance $(\omega_{r0} - 2\omega_{\varphi 0})/2\omega_{\varphi 0} = 0,1$ je již značná. Proto není numericky vypočtený rozdíl $\omega_{r0} - \omega_{rP} = 0,004 \text{ s}^{-1}$ zcela zanedbatelný. Běžně, když užíváme pružinku se závažím jako model harmonického oscilátoru, jsme hluboko v útlumové oblasti, náhodná úhlová výchylka se nezvětšuje a rozdíl $\omega_{r0} - \omega_{rP}$ je zcela zanedbatelný. Proto závaží zavěšené na pružině je obvykle dobrým modelem harmonického oscilátoru. Prováděný rozbor pohybu pružného kyvadla však ukazuje, že tomu vždy tak být nemusí.

Nyní ukážeme, jak se chování pružného kyvadla změní, když zvýšíme hmotnost závaží. Dopočetli jsme numericky průběhy oscilací uvažovaného kyvadla ($l = 0,28 \text{ m}$, $k = 12,5 \text{ N/m}$) buzeného kmity pro hmotnosti od $0,10 \text{ kg}$ do $0,16 \text{ kg}$ měnící se po $0,01 \text{ kg}$. Počáteční úhlovou výchylku jsme stejně jako v případě znázorněném na obr. 4 volili $\varphi_{00} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ a relativní počáteční prodloužení $d_{00} = 0,125$. Na obr. 5 jsou znázorněny výsledky pro větev od nejmenší hmotnosti $m = 0,09 \text{ kg}$ až do hmotnosti $m = 0,12 \text{ kg}$, která ve velmi dobrém přiblížení splňuje rezonanční podmínku (10).



Obr. 5.

Tato série pro kyvy buzené kmity má značně odlišný charakter od předcházející (obr. 3), kde kmity byly buzeny kyvy. Pouze kyvadlo s hmotností $m = 0,09 \text{ kg}$ a v obrázku neuvedené kyvadlo s $m = 0,16 \text{ kg}$ se chovají jako kyvadla s dominantním kmitavým pohybem, tedy útlumovým způsobem. Ostatní kyvadla série vykazují rezonanční charakter. Amplituda kyvů pro hmotnosti $m = 0,10 \text{ kg}$ až $0,15 \text{ kg}$ dosahuje při rezonanci asi stonásobku počáteční úhlové výchylky φ_{00} a ovlivnění kmitavého pohybu kyvy je značné. Porovnání křivek pro kmity (r) a kyvy (φ) ukazuje, že jde o vázané oscilátory, protože dochází ke značné výměně energie mezi nimi. Obalové křivky, které ani zdaleka nepřipomínají harmonické funkce, ukazují, že vazba je nelineární. Tvar křivek pro jednotlivé hmotnosti v rezonanční oblasti, jejich šířka závisí na zvoleném relativním prodloužení d_{00} , se příliš neliší. Hodnoty parametrů pro křivky z obr. 5

TABULKA 2.

m (kg)	l_g (m)	ω_{r0} (s ⁻¹)	$\omega_{\varphi0}$ (s ⁻¹)	ω_{rP} (s ⁻¹)	$\omega_{\varphi P}$ (s ⁻¹)	$\omega_{vp,num}$ (s ⁻¹)	E_v (%)	$\varphi_{0,max}$ (10 ⁻³ rad)	d_k
0,09	0,3506	11,785	5,29	11,78	5,65	0,256	0	2,5	0,171
0,10	0,3585	11,18	5,23	11,23	5,60	0,105	45	175	0,132
0,11	0,3663	10,66	5,17	10,74	5,39	0,129	83	230	0,088
0,12	0,3742	10,21	5,12	10,34	5,18	0,133	98	243	0,027
0,13	0,3820	9,81	5,07	9,74	4,98	0,126	90	230	0,090
0,14	0,3898	9,45	5,02	9,39	4,82	0,104	62	185	0,120
0,15	0,3977	9,13	4,96	9,11	4,71	0,075	17	95	0,139
0,16	0,4056	8,84	4,92	8,82	4,65	0,287	0,1	2,5	0,156

a též pro ostatní v sérii sledované, ale v obrázku neznázorněné případy jsou uvedeny v tab. 2. Význam některých sloupců tabulky bude objasněn až v další části textu.

c) Rezonanční oblast

V rezonanční oblasti již nelze jednotlivé rovnice soustavy (6) oddělovat a zkoumat je jako rovnice, kde jedna oscilace vynucuje druhou, aniž je sama převodem energie na druhou oscilaci podstatně ovlivněna. Musí se plně respektovat skutečnost, že rovnice (6) nejsou nezávislé a popisují vázané kmity, při nichž se v okolí rezonance podstatná část energie mezi kmity a kyvy vyměňuje. V této oblasti je důležité zachování celkové energie systému E , které můžeme zapsat ve tvaru

$$\overline{kr_0'^2(t)} + mgl_g\overline{\varphi_0^2(t)} = 2E, \quad (29)$$

kde jako $\overline{r_0'^2(t)}$ je označen čtverec amplitudy kmitu nejlépe vystihujícího kmitavý pohyb pružného kyvadla v čase t a $\overline{\varphi_0^2(t)}$ čtverec amplitudy úhlu nejlépe vystihující jeho kývavý pohyb ve stejném čase. Vydělíme-li rovnici (29) hmotností m a čtvercem rovnovážné délky zatíženého kyvadla l_g , zavedeme-li do ní označení pro relativní protažení pružiny $\overline{d_0} = \overline{r_0'}/l_g$ a frekvence vlastních kmitů (7) a vlastních kyvů (8) kyvadla, dostaneme rovnici

$$\omega_{rP}^2\overline{d_0^2} + \omega_{\varphi P}^2\overline{\varphi_0^2} = \omega_{r0}^2\overline{d_{00}^2} + \omega_{\varphi0}^2\overline{\varphi_{00}^2} = \Omega_0^2. \quad (30)$$

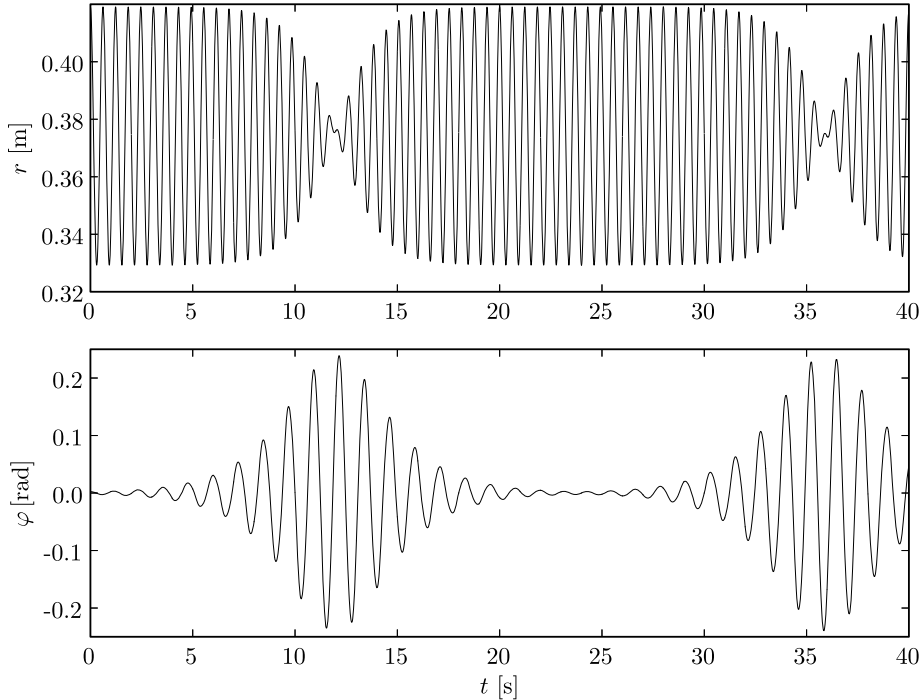
Protože levá strana je konstantní v čase, je uvedena i hodnota pro čas $t = 0$, která je vyjádřena podle počátečního protažení pružného kyvadla d_{00} a jeho počáteční úhlové výchylky φ_{00} . Celková energie E z rovnice (29) po vydělení výrazem ml_g^2 získá rozměr čtverce frekvence, a proto konstantu z rovnice (30) značíme Ω_0^2 .

Na obr. 6 je podrobně zachycen průběh rezonančních oscilací pro hmotnost $m = 0,12$ kg, tedy je rozkreslen poslední sloupec obrázku 5. To, že jde o hmotnost dobře splňující rezonanční podmínku (10), se projeví v největší amplitudě kyvů a tomu

odpovídajícím největším útlumu kmitů, tedy v největší výměnné energii E_v , kterou nyní ve shodě s definicí (20) zapíšeme ve tvaru

$$E_v = \frac{\omega_{\varphi p}^2 \overline{\varphi_{0,\max}^2}}{\Omega_0^2}, \quad (31)$$

když pro stanovení poměru uvažovaných energií vyjdeme z rovnice (30).



Obr. 6.

Průběh oscilací v rezonanční oblasti jsme analyticky neřešili, omezíme se tedy jenom na kvalitativní popis podle numerického řešení znázorněného v obr. 6. Kvantitativní údaje se budou týkat případu z obr. 6, kvalitativní popis je platný pro celou rezonanční oblast. Amplituda kyvů roste se vzrůstající rychlostí od počáteční úhlové výchylky $\varphi_{00} = 0,0025$ rad po maximální amplitudu $\varphi_{0,\max} = 0,243$ rad, kterou dosáhne asi za 12 s. Kmitý přitom drží konstantní amplitudu až asi do 7 s a potom stále prudčeji klesají. Pro znázorněnou rezonanční frekvenci až téměř do úplného vymizení (v minimu téměř celá energie přejde na kyvy: $E_v = 98\%$). Frekvence provozních kmitů a kyvů přibližně dodržují relaci $\omega_{rp} = 2\omega_{\varphi p}$, ale přesně ne, jak je patrné z hodnoty výměnné frekvence $\omega_{vp,num} = |\omega_{rp} - 2\omega_{\varphi p}| = 0,133$ s⁻¹, která je nejvyšší ze všech hodnot v tab. 2, které se týkají rezonanční oblasti.

Z obr. 5 je patrné, že nejmenší hodnota výměnné frekvence ($\omega_{vp} = 0,10$ s⁻¹) v rezonanční oblasti nastává pro hmotnost $m = 0,10$ kg. Z hodnot uvedených jen v tabulce je to pro $m = 0,15$ kg ($\omega_{vp} = 0,07$ s⁻¹). Jsou to hodnoty pro hmotnosti na okrajích rezonanční oblasti. U kyvadla buzeného kmitý hodnota počátečního relativního prodloužení d_{00} doladuje rezonanční podmínku (10). Na obou okrajích hmotnostního

rezonančního intervalu se nacházejí hmotnosti m_k , pro něž zvolená hodnota d_{00} ideálně doladuje rezonanci a způsobí, že výměnná frekvence $\omega_{vp} \rightarrow 0$. V naší sérii, kde jsme volili $d_{00} = 0,125$, leží podle numerických výpočtů tyto kritické hmotnosti mezi $m = 0,09 \text{ kg}$ a $m = 0,1 \text{ kg}$ a mezi $m = 0,15 \text{ kg}$ a $m = 0,16 \text{ kg}$.

Přechodu mezi rezonanční a útlumovou oblastí při stálé hodnotě hmotnosti m lze tedy dosáhnout změnou počátečního relativního prodloužení na kritickou hodnotu d_k . Vydeme-li z předpokladu, že doladění rezonance spočívá v dodání energie do systému protažením pružiny, které vyjádříme vztahem

$$d_k^2 \omega_{r0,rez}^2 = |\omega_{\varphi pk}^2 - \omega_{\varphi 0}^2|, \quad (32)$$

dostaneme po úpravách a dosti hrubých aproximacích pro hledané d_k jednoduchý vzorec

$$d_k^2 = \frac{|\omega_{r0} - 2\omega_{\varphi 0}|}{4\omega_{r0,rez}}. \quad (33)$$

V posledních dvou rovnicích jsou zavedena nová označení: $\omega_{r0,rez}$ pro hodnotu vlastní frekvence kmitů splňující rezonanční podmínku (10) (pro námi uvažovanou sérii je to hodnota odpovídající hmotnosti $m = 0,119 \text{ kg}$, tedy 10,25) a $\omega_{\varphi pk}$ pro frekvenci kyvů při splnění kritické podmínky pro doladění nové rezonance. Podle rovnice (33) předpovězené hodnoty d_k pro jednotlivé hmotnosti kyvadla jsou uvedeny v tab. 2. Vlivem hrubé aproximace jsou hodnoty d_k poněkud nadhodnoceny. Tak lze vysvětlit, proč podle předpovězené hodnoty d_k by kyvadlo při okrajových hmotnostech $m = 0,10 \text{ kg}$ a $m = 0,15 \text{ kg}$ mělo již kývat útlumově, zatímco podle numerického výpočtu kývá rezonančně. Přes tento nedostatek uijeme rovnici (33) pro další výklad přechodu mezi rezonanční a útlumovou oblastí, protože kvalitativně popisuje jev velmi dobře. Zpřesnění rovnice je možné, ale vede ke komplikovaným a nepřehledným výrazům.⁴⁾

4. Přechod mezi útlumovou a rezonanční oblastí — bifurkace

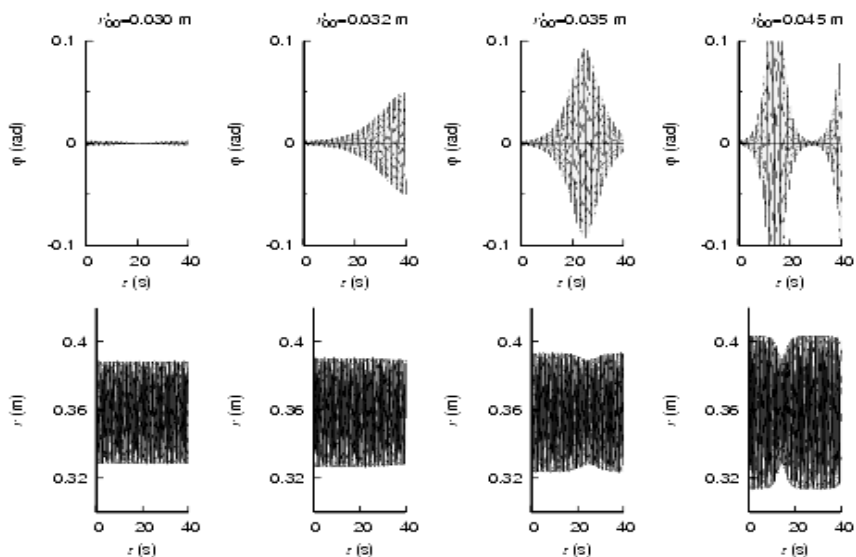
Chování pružného kyvadla v rezonanční a útlumové oblasti je naprosto odlišné a přechod mezi oblastmi nenastává pozvolna, ale náraz. Může jej způsobit náhodná malá změna počátečních podmínek, tedy náhodná fluktuace vnějších podmínek v okolí kritických hodnot. Taková výrazná změna následného chování při malé změně počátečních podmínek se označuje jako bifurkace⁵⁾. Proto budeme přechod přes kritické

⁴⁾ Aproximace při odvození rovnice (33) se týkají již výchozí rovnice (32), kde je možné diskutovat, zda vycházet z předávané energie nebo výkonu a zda na levé straně rovnice má být $\omega_{r0,rez}$, ω_{r0} nebo $\omega_{\varphi pk}$. Při úpravě rovnice (32) na vzorec (33) se však tyto rozdílly setřou, protože jednoduchý vzorec (33) se dostane, jen když se v celé rezonanční oblasti uvažuje rovnost $\omega_{r0} = 2\omega_{\varphi 0}$ s výjimkou rozdílu těchto frekvencí.

⁵⁾ V geografii se takto označuje případ opačný k soutoku. Tedy poměrně vzácný případ, kdy tok z jistého místa pokračuje dvěma různými koryty. Nejznámější je případ řeky Casiquiare, která se v jižní Venezuele štěpí na dvě ramena, z nichž pravé pokračuje jako Orinoko a levé se stane přítokem řeky Rio Negro. V lékařství se pojem také používá, např. pro rozdělení průdušnice.

hodnoty m_k , d_k označovat jako přechod přes bifurkační práh a celý jev přechodu jako bifurkaci. Bifurkace, jako singularita v závislosti řešení dynamických rovnic na počátečních a okrajových podmínkách, je základním pojmem v teorii dynamických systémů (např. [6], [7]). Pružné kyvadlo je jedním z nejjednodušších systémů, na kterém ji lze studovat. Proto takový zájem o jeho chování např. ze strany meteorologů, kde v kritických případech malé změny počátečních podmínek mohou zhroutit celou dlouhodobou předpověď počasí.

V případě znázorněném na obr. 5 přechod přes bifurkační práh byl vyvolán změnou hmotnosti kyvadla při stálé hodnotě jeho počátečního relativního prodloužení d_{00} . Na obr. 7 je znázorněn výsledek dalšího numerického pokusu, kdy jsme sledovali přechod přes bifurkační práh dosažený změnou počátečního relativního prodloužení d_{00} pro kyvadlo se stálou hmotností $m = 0,11$ kg. V sérii znázorněné na obr. 5, kde počáteční relativní prodloužení mělo hodnotu $d_{00} = 0,125$, kyvadlo s hmotností $m = 0,11$ kg leželo hluboko v rezonanční oblasti. Na obr. 7 je ukázáno, že pro toto kyvadlo přechod přes bifurkační práh nastane mezi počátečním prodloužením $r'_{00} = 0,030$ m ($d_{00} = 0,083$) a $r'_{00} = 0,032$ m ($d_{00} = 0,089$). Kritická hodnota počátečního relativního prodloužení $d_k = 0,088$ předpovězená podle vzorce (33) a uvedená v tab. 2 tedy leží uvnitř numerickým výpočtem stanoveného intervalu, i když je zřejmě trochu nadhodnocena. Z obrázku je opět patrné, že výměnná frekvence ω_{vp} v rezonanční oblasti roste se vzdáleností od bifurkačního prahu.



Obr. 7.

Z numerického i analytického rozboru plyne, že na bifurkačním prahu hodnota výměnné provozní frekvence (27) $\omega_{vp} = (\omega_{rp} - 2\omega_{\varphi p})/2$ klesne na nulu. Dosadíme-li podmínku $\omega_{vp} = 0$ do rovnice (26), získáme pro vzniklý kyv vyjádření

$$\varphi = \varphi_{00} \cos(\omega_{\varphi p} k t) = \varphi_{00} \cos\left(\frac{\omega_{r0} + 2\omega_{\varphi 0}}{4} t\right). \quad (34)$$

Pružné kyvadlo kýve jednoduchým harmonickým kyvem s frekvencí $\omega_{\varphi\text{pk}}$, která je průměrnou frekvencí mezi frekvencí vlastních kyvů $\omega_{\varphi 0}$ a poloviční frekvencí vlastních kmitů $\omega_{r0}/2$. Nezávisle na tomto pohybu probíhá kmit

$$r' = d_k l_g \cos(\omega_{r\text{pk}} t) = d_k l_g \cos\left(\frac{\omega_{r0} + 2\omega_{\varphi 0}}{2} t\right) \quad (35)$$

s amplitudou $r'_0 = d_k l_g$ a frekvencí

$$\omega_{r\text{pk}} = 2\omega_{\varphi\text{pk}} = \frac{\omega_{r0} + 2\omega_{\varphi 0}}{2}. \quad (36)$$

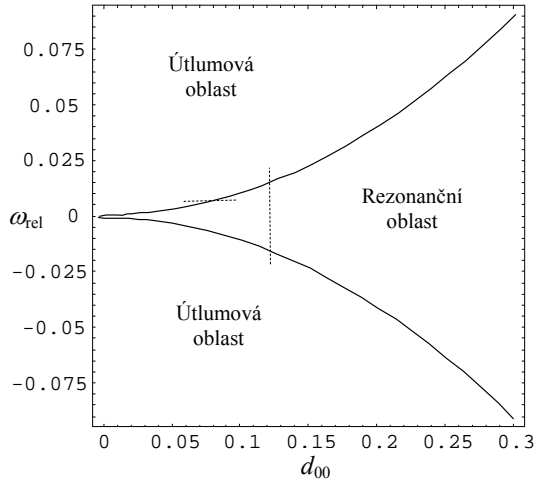
Na bifurkačním prahu je totiž působením kritického relativního prodloužení d_k přesně dosaženo rezonanční podmínky (9), tentokrát však ne pro vlastní frekvence, ale pro provozní frekvence. Na bifurkačním prahu nedochází k žádné výměně energie mezi kmitem a kyvem, a proto kyvy i kmity jsou popsány jednoduchými harmonickými funkcemi (34) a (35). Právě popsané chování pružného kyvadla na bifurkačním prahu je naprosto nestabilní a nepatrným vnějším vlivem přejde buď na útlumové, nebo na rezonanční chování.

5. Závěr

V článku jsme se snažili ukázat, jaká mnohá překvapení skýtá zdánlivě jednoduchý systém — kulička zavěšená na pružině. Není jen modelem harmonického oscilátoru, za který se běžně pokládá, ale i modelem pro nelineárně vázané oscilátory a lze na něm ukázat i nespojitou závislost vzniklého pohybu na malé změně počátečních podmínek, známou pod pojmem bifurkace.

Shrneme získané výsledky. Ukázali jsme, že je-li splněna rezonanční podmínka (10), sebemenší úhlová výchylka kyvadla se v průběhu jeho kmitů zvětšuje, až kmitavý pohyb přejde na kývavý a výměna energie mezi kmity a kyvy se pak periodicky opakuje. Kmity a kyvy pružného kyvadla se v okolí jeho rezonanční frekvence (9) chovají jako oscilace vázané nelineární vazbou. Šíře oblasti, ve které nastává rezonanční chování, roste se vzrůstajícím relativním počátečním prodloužením pružiny d_{00} , jak je ukázáno na obr. 8. Stupeň rozladění pružného kyvadla je na ose y vyneseno v bezrozměrných jednotkách $\omega_{\text{rel}} = (\omega_{r0} - 2\omega_{\varphi 0}) / (4\omega_{r0, \text{rez}})$, které odpovídají pravé straně rovnice (33). Vynesené křivky $\omega_{\text{rel}} = \pm d_{00}^2$ tak vyznačují hranice (bifurkační práh) mezi rezonanční a útlumovou oblastí.

Náhodně zvolená pružina se zavěšenou hmotností m se obvykle nachází v útlumové oblasti a je v tomto případě vhodným modelem harmonického oscilátoru. Obr. 8 znázorňuje malý úsek útlumové oblasti v okolí hodnoty $\omega_{\text{rel}} = 0$, kde délka nezatížené pružiny l , její pružinová konstanta k a hmotnost na ní zavěšená m splňují rezonanční podmínku (10) [$m = lk / (3g)$]. Když kyvadlo rozkýváme způsobem uvažovaným v části a) kapitoly 3, tedy vypustíme-li je bez protažení z krajní polohy, pohybujeme se po přímce $d_{00} = r'_{m2} / l_g \doteq 0,0005$ (srov. rovnici (19)) v bezprostřední blízkosti osy y z obr. 8. Resonanční oblast je pak velmi úzká, jak jsme již zjistili podrobným rozborem dominantních kyvů (obr. 3, tab. 1).



Obr. 8.

Budíme-li pružné kyvadlo protažením pružiny (viz část b) kap. 3), protažení ovlivní frekvenci oscilací kyvadla a posune splnění rezonanční podmínky (9) na bifurkační práh, kde je splněna ne pro vlastní frekvence, ale pro provozní frekvence (viz rovnici (36)). Pohled na obr. 8 nám ukáže, že podmínka (36) pro dané relativní počáteční prodloužení d_{00} je splněna dvakrát, jednou pro případ, kdy vlastní frekvence kmitů ω_{r0} je větší než dvojnásobná frekvence vlastních kyvů $2\omega_{\varphi 0}$, podruhé v případě, kdy je tomu naopak. Vznikne tak tím širší průsek rezonanční oblasti, čím větší je d_{00} . Na obr. 5 a v tab. 2 je dokumentován průběh chování pružného kyvadla v takovém průseku pro $d_{00} = 0,125$. Do sledovaného souboru jsou zahrnuty i okrajové případy, kdy zvolené hmotnosti posunou kyvadlo do útlumové oblasti. V obr. 8 končíme zobrazení rezonanční oblasti hodnotou $d_{00} = 0,125$. V obr. 8 je průsek znázorněn svislou tečkovanou úsečkou.

Hranice mezi útlumovou a rezonanční oblastí má bifurkační charakter. Při přechodu přes tento bifurkační práh maximální amplituda kyvů vzroste asi stokrát a charakter jejich obálky se kvalitativně změní (porovnej obr. 2 a obr. 6). Přitom hranice oblastí je ostrá, malá fluktuace vnějších podmínek může převést kyvadlo z útlumového do rezonančního chování či naopak. Např. pouhé 2 mm protažení změní charakter chování, jak je dokumentováno rozdílem mezi prvním a druhým obrázkem série znázorněné na obr. 7. Body této série jsou v obr. 8 znázorněny vodorovnou tečkovanou úsečkou. Protože rezonanční podmínka mezi provozními frekvencemi je přesně splněna na hranici oblastí (rovnice (36)), je přirozené, že rozdílová provozní frekvence ω_{vp} (rovnice (27)) stoupá od hranice rezonanční oblasti k jejímu středu. Je to patrné jak z obr. 5 a 7, tak z tab. 2.

Nakonec se od analytických a numerických výpočtů vrátíme k reálnému experimentu. Pořídit si pružné kyvadlo, na kterém můžeme demonstrovat přecházení mezi kmitavým a kývavým pohybem, je celkem jednoduché. Seženeme nějaký stojan, na který zavěsíme pružinu, a změříme její délku v nezátíženém stavu l a pružinovou konstantu k . Podle rovnice (10) [$m = lk/(3g)$] vypočteme hmotnost m závaží, které

máme na pružinu zavěsit. Pružinu se závažím dostatečně protáhneme, přitom ji určitě také mírně vychýlíme do strany, vybuzené kmity za chvíli přejdou v kyvy a děj se bude periodicky opakovat. Průběh kyvů a kmitů a jejich vzájemné časové posunutí bude odpovídat grafům z obr. 6. Jestliže se to napoprvé nepovede, prověříme výpočet — především jednotky, vhodnost zvolené pružiny, správnost stanovení její délky l ⁶⁾ a po úpravě zkusíme pokus znovu.

Kdo má rád trochu poezie, koupí si v hračkářství letadélko zavěšené na pružině. Zváží ho, změří tuhost k pružiny a zjistí, zda může přivažkem dosáhnout rezonance. Když to nelze, vezme tužší pružinu a podmínku rezonance nastaví pro ni. V rezonanci nebude letadélko kmitat jen ve svislém směru, ale bude též vodorovně kývat a vy budete spokojeni, že jste naučili letadélko létat. Experimentální pružné kyvadlo bude měnit svou rovinu kyvu, když mu to závěs dovolí. Je to v pořádku, protože předpoklad o zachování roviny kyvu je stejně experimentálně nesplnitelný jako předpoklad, že pružinka se závažím bude pouze kmitat ve svislé přímce, splňují-li její parametry alespoň přibližně rezonanční podmínku (10).

Poznámka redakce. Některé zajímavé aspekty pružného kyvadla jsou v článku analyzovány spíše kvalitativně. K problému se ještě vrátíme v některém z dalších čísel Pokroků.

L i t e r a t u r a

- [1] VITT, A., GORELIK, G.: *Kolebanija uprugovo majatnika kak primer kolebanij dvuch parametričeski svjazanyh linejnyh sistem*. ŽTF 3 (2–3), (1933), 294–307.
- [2] FERMI, E.: Z. für Physik 71 (1931), 250.
- [3] *Historical note No 3. MetOb Éireann* — The Irish Meteorological Service, ed. LYNCH, P., Dublin 1999.
- [4] LYNCH, P.: *Resonant motion of the three-dimensional elastic pendulum*. Int. J. Non-Linear Mechanics 37 (2002), 345–367.
- [5] BROŽ, J. a kol.: *Základy fyzikálních měření*. SPN, Praha 1967, 148–152 (čl. 2.6.3), (v druhém vydání (1983) čl. 2.5.3).
- [6] MACUR, J.: *Úvod do teorie dynamických systémů a jejich simulace*. VUT Brno, PC-DIR, Brno 1995, 87 s.
- [7] HORÁK, J., KRLÍN, L., RAIDL, A.: *Deterministický chaos a jeho fyzikální aplikace*. Academia, Praha 2003, 440 s.
- [8] LYNCH, P.: *The swinging spring a simple model for atmospheric balance*. In: *Large-Scale Atmosphere-Ocean Dynamics, Vol. II. Geometric Methods and Models*. Cambridge University Press, Cambridge 2001.
- [9] JIN, F., NOELIN, P. M., GHIL, M.: *El Niño on the devil's staircase: annual subharmonicstepsto chaos*. Science 264 (1996), 70–72.
- [10] Heslo „elastic pendulum“ v mezinárodním vyhledávači.
- [11] ČERTÍK, O., HAVRÁNEK, A.: *Elastické kyvadlo*. Matematika–fyzika–informatika 12 (2002/2003), Prometheus, Praha.
- [12] HAVRÁNEK, A., ČERTÍK, O.: *Pružné kyvadlo, modelový bifurkační systém*. In: *Pedagogický software 2000*. Scientific Pedagogical Publishing, České Budějovice 2004, 234–246.
- [13] HAVRÁNEK, A.: *Klasická mechanika I — Hmotný bod a tuhé těleso*. Praha: Karolinum, 2002, 242 s. ISBN 80-246-0458-2.

⁶⁾ Rovnovážná délka $l_g = l + mg/k$, ze které l můžeme spočítat, se musí měřit od bodu závěsu až do těžiště zavěšeného závaží.