František Staněk
Jak (na)učit žáky chápat reálná čísla

Učitel matematiky, Vol. 4 (1996), No. 1, 9–24

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151465

Jak (na)učit žáky chápat reálná čísla

FRANTIŠEK STANĚK

Na základní škole se žák seznámí s různými číselnými obory. Jde o obory přirozených, celých, racionálních a reálných čísel. V časovém sledu se nejpozději seznámí s oborem čísel reálných. Co vlastně o tomto oboru ví, či co by vědět měl?

Vyjdeme-li z osnov, platných pro osmiletou základní školu, pak do konce třetí třídy pracuje žák pouze s oborem přirozených čísel. Ve čtvrté třídě se seznámí se zlomky: určuje část z celku, daného přirozeným číslem, vyjádřenou zlomkem, tj. pracuje se zlomkem jako s operátorem. V následující třídě se informace o zlomcích prohloubí, jsou zavedeny zlomky desetinné a pomocí nich se vytváří pojem desetinného čísla. Poté se rozvíjí práce s desetinnými čísly; žáci se je naučí porovnávat, sčítat a odčítat, násobit a dělit. Na konci tohoto ročníku je obsažen základ učiva o celých číslech, žák pozná pojem celého čísla a naučí se tato čísla porovnávat, sčítat a odčítat. Násobení a dělení celých čísel je zařazeno až do šestého ročníku. V tomto ročníku se věnuje velká pozornost zlomkům. Žáci se naučí provádět čtyři základní početní výkony se zlomky a také se naučí zlomky porovnávat. Poznají též postup, jak zapsat zlomek ve tvaru desetinného čísla (přesněji: ve tvaru desetinného rozvoje). Opačný postup však znají pouze pro případ, kdy je desetinný rozvoj konečný. V případě, že daný zlomek má periodický nekonečný desetinný rozvoj, je tato cesta pro ně jednosměrná; znají postup, jak ke zlomku vypočítat příslušný rozvoj, obrácený postup však ne. Přitom, jak jsem si sám ověřil ve výuce na základní škole, jsou schopni tento postup zvládnout. Dále se v tomto ročníku seznámí, zatím pouze intuitivně, s pojmem racionálního čísla. To pro ně představuje množinu sobě rovných zlomků.

RNDr. František Staněk (*1957), absolvent učitelského studia MFF UK, profesor gymnázia v Praze 4 na Vítězné pláni. Článek volně souvisí s připravovanou kandidátskou prací autora.

S ohledem na cíle tohoto stupně vzdělání je žák veden k tomu, aby se naučil prakticky pracovat s čísly, aby byl schopen řešit úlohy z běžného života. Vzhledem k tomu se výuka omezuje na stanovení pravidel a postupů této práce, bez hlubšího teoretického zázemí. Hodně je využívána intuice. Proto jsou pro průměrného žáka číselné obory látkou bezproblémovou. Poněvadž je už z prvního stupně základní školy obeznámen s číselnou osou, akceptuje bez výhrad i myšlenku, že každé racionální číslo má svůj obraz na číselné ose. Jelikož v okolí obrazu každého racionálního čísla lze na číselné ose nalézt obraz dalšího racionálního čísla, do jisté míry mu číselná osa splývá s obrazy racionálních čísel.

Čím oblíbenějším žákovým předmětem je matematika, tím více je překvapen v 7. ročníku zjištěním, že číselná osa zaplněná obrazy racionálních čísel obsahuje ještě body, které obsazené nejsou. Je na tom asi tak, jako starořečtí matematici, když zjistili, že existují nesouměřitelné veličiny. Tuto informaci získá v souvislosti s druhými odmocninami nezáporných čísel. Je seznámen s tím, že vedle čísel racionálních existují i čísla, která nazýváme iracionálními a která, podle [3], *můžeme vyjádřit přibližně číslem desetinným, a to s libovolnou, předem danou přesností.* Ve stejné učebnici je uveden i postup určení dolní a horní aproximace čísla $\sqrt{2}$. (Důkaz, že toto číslo je číslem iracionálním, je však až látkou prvního ročníku gymnázia.) V sedmém ročníku je také zavedena množina reálných čísel jako množina obsahující všechna racionální a všechna iracionální čísla. Kromě informace, že pro reálná čísla platí stejná početní pravidla jako pro čísla racionální, je doplněn žákův pohled na tuto množinu ještě o geometrické hledisko. Dozví se, že obrazy reálných čísel vyplní celou číselnou osu.

V učebnici [4] pro devátý ročník, který byl do letošního školního roku nepovinný, jsou doplněny některé informace o číselných oborech. Reálné číslo je charakterizováno geometricky: *Každý bod na číselné ose představuje reálné číslo.* Racionální číslo je definováno jako číslo, které lze vyjádřit zlomkem, jehož čitatel a jmenovatel jsou celá čísla (jmenovatel není nula). Zároveň se hovoří o desetinném rozvoji racionálních čísel, který je *ukončený nebo periodický.* Jako iracionální jsou označena ta čísla, která jsou reálná, ale nejsou racionální. O jejich rozvoji se žák doví, že je *neukončený a neperiodický.* Protože jiné informace už žák nedostane, zařazuje pak absolvent základní školy mezi reálná čísla kromě racionálních čísel ještě odmocniny a číslo π. Na šesti pražských gymnáziích jsem s pochopením ředitelů a učitelů matematiky zadal ihned po nástupu prvních ročníků čtyřletého studia dotazník, který se týkal informovanosti žáků právě o oboru reálných čísel. Zde se ukázalo, že identifikovat číslo 0,101001000..., tj. uvedené ve tvaru nekonečného neperiodického desetinného rozvoje, jako číslo iracionální, umělo pouze malé procento studentů, naopak číslo $\sqrt{0{,}04}$ zařadila mezi čísla iracionální více než polovina studentů. Nejhorší výsledky byly dosaženy v úkolu, kdy měli studenti najít nějaké iracionální číslo, které vyhovovalo nerovnicím, např. $\pi < x < \pi^2$. Zde odpověděla správně necelá desetina studentů. Poněkud lepších výsledků dosáhli v tomto směru žáci základní školy, kde jsem tento dotazník zadal ve třech sedmých třídách. Je zřejmé, že znalosti, týkající se iracionálních čísel, nejsou příliš opakovány a zasouvají se proto do podvědomí žáků, aniž dojde k uvědomění hlubokého rozdílu mezi množinou reálných a racionálních čísel. K tomuto procesu přispívá i praktická činnost s iracionálními čísly, která jsou v běžných výpočtech nahrazována svými racionálními aproximacemi s patřičnou přesností. Souvisí to i s rozšířeným užíváním kapesních kalkulátorů.

Jak se mění znalosti studenta v této oblasti při studiu na střední škole? Soustřeďme se na průměrného gymnazistu přírodovědné či všeobecné větve.

Pro zopakování informací o číselných oborech je zvolen axiomatický způsob popisu číselných oborů: je uveden výčet vlastností, které musí splňovat operace sčítání a násobení v těchto oborech, totéž se provede pro relace rovnosti a uspořádání. Jsou uvedeny příklady přirozených, celých, racionálních a reálných čísel. Při opakování pojmu desetinného rozvoje čísel je jako iracionální číslo označeno to číslo, které lze zapsat jen nekonečným a neperiodickým desetinným rozvojem. Tento závěr student většinou bez dotazů akceptuje. Položíme-li mu však otázku, kdy můžeme říci, že iracionální číslo je v tomto tvaru *určeno*, když reálně nemůžeme určit všechny cifry tohoto rozvoje, nebude pravděpodobně schopen správně odpovědět. Touto otázkou se totiž učebnice vůbec nezabývají a studenti si ji většinou sami nekladou. Přitom učebnice pro gymnázia z počátku století odpověď na tuto otázku uváděly. Např. v [1] uvádí autor: *Číslo irracionalné pokládáme za známé, dovedeme-li určiti libovolný počet jeho míst.* Považuji za vhodné, zabývat se touto otázkou ve výuce, neboť přináší nový pohled na matematické metody. V tomto případě totiž nahrazuje princip konkrétní znalosti všech číslic periodického rozvoje principem znalosti metody, jak libovolný počet těchto číslic zjistit.

Reálná čísla jsou v učebnicích geometricky interpretována jako délky úseček. Uvádí se, že operace v $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ mají stejné vlastnosti, rozdíl mezi těmito obory však není zdůrazněn. Není využita ani možnost, časově nepříliš náročná, sloužící k prohloubení znalostí studentů v otázce vztahu mezi množinami racionálních a iracionálních čísel. Jde o otázku uzavřenosti operací sčítání a násobení v těchto množinách. Zatímco tyto operace v množině všech racionálních čísel uzavřené jsou, a student by si to měl uvědomit a dokonce to umět i striktně matematicky dokázat, v množině všech iracionálních čísel uzavřené nejsou. I zde studenti musí umět najít příklady, které dokazují toto tvrzení. Vyšetřit je možné i čísla, která jsou výsledkem uvedených operací mezi čísly, z nichž jedno je racionální a druhé iracionální. Závěr, který si studenti z tohoto vyšetřování odnesou, opět prohloubí jejich znalosti těchto oborů.

K dalšímu rozšíření znalostí o iracionálních číslech dochází u studenta při probírání látky týkající se mocnin. U mocnin s iracionálním exponentem se setkává s postupem určení dolních a horních aproximací čísla $2^{\sqrt{2}}$. Tím je zopakován postup, se kterým se setkal při určování aproximací čísla $\sqrt{2}$. V této souvislosti je nutné se vyvarovat chybného zafixování myšlenky této aproximace. Platí totiž, že z nerovností

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5, \tag{1}$$

plynou nerovnosti

$$2^{1{,}4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1{,}5}.$$

Kdybychom však chtěli aproximovat číslo $(0{,}5)^{\sqrt{2}}$, dospějeme k závěru, že z nerovností (1) plynou nerovnosti

$$(0{,}5)^{1{,}4} > (0{,}5)^{\sqrt{2}} > (0{,}5)^{1{,}5}.$$

Tuto možnost je vhodné studentům taktéž předvést, neboť k jiné možnosti při určování mocnin s kladným racionálním základem a iracionálním exponentem nemůže dojít. (Nechceme přitom ani zacházet k příkladům typu $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$.) Tím bude student podpořen v názoru, že předvedený postup je univerzální. Tímto způsobem získáváme vlastně desetinný rozvoj daného iracionálního čísla. Uvědomíme-li si, že uvedenou metodou dovedeme vypočítat libovolný počet míst tohoto rozvoje, je, jak již bylo dříve řečeno, výsledné iracionální číslo zcela určeno.

K dalšímu prohloubení znalostí dochází v části, týkající se posloupností a jejich limit. Uveden je postup určování iracionálního čísla π pomocí posloupností dolních a horních aproximací délky kružnice. Členy těchto posloupností tvoří délky obvodů pravidelných n-úhelníků vepisovaných do kružnice a opisovaných kružnici. Na geometrickém názoru je založeno tvrzení, že první z těchto posloupností je rostoucí a druhá klesající. Vypočteno je několik členů těchto posloupností a je ukázáno, že délka kružnice je určena členy těchto posloupností ve stále se zmenšujících intervalech. Předpoklad, že tento postup vede k určení čísla π, je opřen o větu: *Každá monotónní omezená posloupnost reálných čísel je konvergentní.* Tato věta je dále aplikována na konvergenci posloupnosti dolních, resp. horních aproximací čísla $\sqrt{2}$. Zde autoři [5] zcela striktně odvozují, že limita posloupnosti dolních aproximací se rovná limitě posloupnosti horních aproximací a že tyto limity jsou rovny číslu $\sqrt{2}$. Uvedený postup určování reálných čísel je zobecněn ve větě: *Každé reálné číslo je limitou jisté neklesající posloupnosti racionálních čísel.* Jako příklad je uvedeno číslo e, které je definováno jako limita posloupnosti $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$. Závěr, zabývající se konvergencí uvedené posloupnosti, je pouze podepřen výpočtem několika prvních členů této posloupnosti. Z důvodů obtížnosti, jak poznamenávají autoři, není uveden důkaz monotonie a omezenosti. S tímto tvrzením lze polemizovat, neboť důkazy jsou poměrně snadné.

Poslední informací o reálných číslech, s níž se studenti mohou na gymnáziu setkat, je informace, že uvedená vlastnost existence limity monotónní omezené posloupnosti reálných čísel má důležité důsledky pro existenci logaritmů, odmocnin z kladných racionálních čísel či pro větu o střední hodnotě v diferenciálním počtu. Zde je možno položit studentům otázku, které z funkcí, s nimiž se seznámili, by nemohly být definovány v takovém rozsahu, jak je známe, kdybychom se omezili pouze na práci s oborem racionálních čísel.

V případě lineární funkce $x \longrightarrow ax + b$ s racionálními koeficienty bude, zvolíme-li jako definiční obor množinu racionálních čísel, oborem hodnot podmnožina množiny racionálních čísel. Tato podmnožina bude mít následující vlastnost:

$$
\begin{aligned}
&(\forall y_1, y_2 \in H_f;\, y_1 \leq y_2)(\forall y \in \mathbb{Q}) \\
&[(y_1 \leq y \leq y_2) \Rightarrow (\exists x \in D_f)(y = ax + b)]\,.
\end{aligned} \tag{2}
$$

V případě, že zvolíme u lineární funkce $x \longrightarrow ax$ jako koeficient a iracionální číslo, pak pro libovolné nenulové racionální číslo x bude funkční hodnota číslo iracionální. Zde se naskýtá možnost využít geometrickou interpretaci tohoto tvrzení. Představme si v rovině vytvořenou *síť racionálních bodů,* tj. bodů, jejichž obě souřadnice jsou racionální čísla. Můžeme o ní tvrdit, že je *hustá* v rovině, což znamená, že v libovolném okolí každého bodu se nachází nějaký bod sítě. Sestrojíme-li nyní v rovině graf funkce $x \longrightarrow ax$, kde a je číslo iracionální, pak vzniklá přímka nebude procházet, kromě počátku, žádným dalším bodem této sítě a tedy body společnými s touto sítí nemůže být určena.

V případě mocniny $x \longrightarrow x^2$ uvažované pouze na množině racionálních čísel, bude oborem hodnot jistá podmnožina množiny racionálních čísel. Vlastnost (2) však tato funkce nemá. Jednoduše se lze o tom přesvědčit: oborem hodnot je podmnožina kladných racionálních čísel, zvolíme-li však čísla $y_1 = 1$, $y_2 = 4$, pak pro číslo $y = 2$ platí $y_1 < 2 < y_2$, ale nelze nalézt žádné racionální číslo x, pro které by platilo $x^2 = 2$. Tak bychom mohli sestrojit i komplikovanější příklady.

V případě goniometrických funkcí je v jistém smyslu většina jejich funkčních hodnot pro racionální argument iracionálním číslem; obdobně se chová i logaritmus a exponenciála. Žáci by měli alespoň získat dojem, že rozšíření číselného oboru racionálních čísel není nutné jen kvůli zavedení odmocnin, ale také proto, abychom mohli korektně definovat elementární funkce.

Znalosti maturanta týkající se reálných čísel tedy spočívají víceméně na slušném obeznámení s axiomatikou uspořádaného pole (i když se o axiomatice vůbec nemluví) a na mlhavé znalosti existence limity každé omezené monotónní posloupnosti. Je to málo nebo hodně?

Odpověď na tuto otázku závisí na přístupu k ní. Z hlediska historie výuky matematiky v našich zemích jsou znalosti o oboru reálných čísel obsažené např. v učebnicích z první republiky a v dnešních učebnicích srovnatelné. V dřívějších učebnicích jsou některá tvrzení detailnější, zejména s ohledem na vztah iracionálního čísla a nekonečného desetinného rozvoje a naopak jiná tvrzení, např. z oblasti limit posloupností, v těchto učebnicích zpravidla nenalezneme. Celkově však je možno říci, že vědomosti studenta gymnázia z první republiky a studenta současného gymnázia se v této oblasti příliš neliší. To, s ohledem na rychlý rozvoj matematiky od dob první republiky, by znamenalo určitou stagnaci ve výuce. Z širšího pohledu se však není možno omezit jen na tento obor, v současných učebnicích nalezneme i kapitoly, které v dřívějším období byly do výuky zařazeny až na vysoké škole. Na druhé straně není využito v matematice všech možností, jak problematiku oboru reálných čísel studentům přiblížit.

Z hlediska perspektivního uplatnění znalostí studenta při dalším studiu je nutné volit takovou cestu, aby bylo možné na vysoké škole na znalosti získané na střední škole snadno navázat. Učitelé vysokých škol by měli specifikovat, co je v této oblasti pro ně potřebné a užitečné. Také je však nutno zvážit, zda tato přání je možno splnit. Nemělo by však zůstat jen u vzájemných konzultací, ale optimální by byla situace, kdy na síti vybraných středních škol bude možno ověřit možnosti škol tyto požadavky splnit. Zároveň by bylo možno ověřit metody výkladu, které by využívaly i jiných postupů. Tuto situaci by mělo napomoci řešit ministerstvo školství, protože především jeho cílem by měly být co nejkvalitnější vědomosti studentů.

Nesmíme zapomenout ani na hodnocení položené otázky z hlediska cílů, které jsme si vytkli ve výuce matematiky na gymnáziu. Aniž budu podrobně analyzovat uvedené cíle (a není to ani úkolem tohoto článku), je možno říci, že požadujeme elementární přehled v základních oblastech matematiky, analýzu reálné situace, matematizaci, její řešení a interpretaci výsledků. Zároveň požadujeme, aby student dovedl spojovat znalosti z různých oblastí matematiky, aby dovedl aplikovat závěry získané v jedné části matematiky i v jiné části, která s danou logicky souvisí. V teoretické oblasti by měl být student schopen vytvářet hypotézy, vyvracet je, či potvrzovat.

Na základě tohoto velice zjednodušeného pohledu je odpověď na položenou otázku nejednoznačná. Kladně můžeme odpovědět, neboť běžný student získá informaci, že obor reálných čísel je lineárně uspořádané pole, v němž je splněn axiom o existenci suprema neprázdné shora omezené množiny. Nezíská poznatek v tomto tvaru, ale v tvrzeních, které obsahují uvedenou charakteristiku. Záporná odpověď souvisí s tím, že, jak bylo uvedeno, nejsou využity všechny možnosti k získání úplnějšího pohledu na tento číselný obor. Absolvent gymnázia sice umí s reálnými čísly pracovat, ale základní představu o prvcích této množiny nemá a špatně chápe rozdíly mezi obory racionálních a reálných čísel. K tomu přispívá poměrně velká, a ne vždy opodstatněná, intuitivnost v zavedení reálných čísel.

Poslední tvrzení pak nutně vede k otázce, jak reálná čísla zavést přesněji, neboli, jak stojí v záhlaví článku, jak (na)učit žáky chápat reálná čísla. Odpověď na otázku s dokonavým videm slovesa učit by patrně zajímala každého vyučujícího a to nejen v této oblasti. Bohužel, zde musíme odpovědět, že nevíme. Zaměníme-li však dokonavý vid slovesa za nedokonavý, potom je odpověď sice méně jednoznačná, ale zato daleko širší. Přitom je možná samozřejmě nabídnout více cest, které směřují k uvedenému cíli. Z historického hlediska by bylo možné se snažit o užití metody Dedekindových řezů. Tato cesta je však pro použití poměrně nevhodná, neboť pracuje s pojmy pro studenty neznámými. Metoda Cantorových posloupností má určitou oporu v gymnaziálním učivu, kde je učivo o posloupnostech obsaženo. Rozsah tohoto učiva je však v současné látce nepříliš velký, hlavní náplň tvoří učivo o dvou konkrétních typech posloupností, tj. o posloupnosti aritmetické a geometrické. To, aby bylo možno zavést reálná čísla postupem pocházejícím od Cantora, by vyžadovalo poměrně značný obsahový i časový nárůst učiva ve srovnání s možnými dalšími cestami.

Daleko výhodnější se mi jeví využití pojmového aparátu, se kterým se studenti seznámili už v prvním ročníku nebo dokonce i na základní škole. Tím je interpretace reálného čísla pomocí systému vložených intervalů s racionálními krajními body nebo pomocí desetinných rozvojů.

Zvolil jsem druhou možnost, tj. použít k interpretaci reálných čísel desetinné rozvoje. Uvedená metoda není nová, byť byla používána spíše na úrovni vysoké školy. Daný postup lze nalézt např. v [2], [6]. Ve velké míře je využíváno toho, co není pro studenty neznámé. S pojmem desetinného rozvoje se seznámili už na základní škole. Střední škola pak už jen zopakovala informaci, že každé reálné číslo jde vyjádřit ve tvaru desetinného rozvoje. Je proto možné na tuto informaci navázat a postupně ji rozvíjet tak, abychom ukázali, že desetinné rozvoje jsou skutečně těmi objekty, které mají všechny vlastnosti, jež vyžadujeme od reálných čísel. Provedu v dalším textu stručný nástin této cesty. Hned na začátku je však třeba říci, že nevystačíme zcela s tím, co obsahuje současné učivo matematiky na gymnáziu a že určitá časová dotace je v tomto případě nutná. Vynaložené úsilí kvalitativně zvýší rozsah znalostí studentů a rozšíří jejich pohled na matematiku. Pokud bychom se rozhodli pro uvedenou cestu v celém rozsahu, pak je vhodné zařadit tuto tematiku do semináře v posledním ročníku studia. Tím bude zajištěno, že budeme pracovat se studenty, kteří mají o matematiku zájem a mají i dostatečné matematické schopnosti. Zároveň však některá fakta z uvedeného postupu mohou být zařazena do běžné výuky.

Celý postup je možno provést s přesností, která odpovídá záměru vyučujícího a úrovni studentů. Přestože pro důkazy stačí ve většině případů gymnaziální znalosti, je možné v některých případech využít do určité míry intuice. Nemusí být cílem striktní vybudování tohoto oboru, to lze ponechat až na vysoké škole, ale ukázání metody a prostředků sloužících k tomuto vybudování. Zároveň je třeba upozornit studenty na alternativní možnosti, které mají v přístupu k reálným číslům, ale i při konkrétní zvolené cestě. Ta navrhovaná využívá pojmy z oblasti algebraických struktur, neboť ty pouze zobecňují to, co student intuitivně zná pod konkrétními vlastnostmi operací v jednotlivých číselných oborech. Dochází proto u něj k vytvoření určitého nadhledu z hlediska matematických struktur. Na druhé straně není potřebné jazyk algebraických struktur používat a lze se omezit na ověřování konkrétních vlastností reálných čísel.

Před vlastní výstavbou oboru reálných čísel je potřebné připomenout a také i zavést některé pojmy. S většinou z nich se studenti už setkali v průběhu studia. V tomto okamžiku jde o potřebné zpřesnění daného pojmu či o jeho procvičení na konkrétních příkladech. Z oblasti množin jde např. o pojmy omezené množiny, dolní a horní meze (též závory) množiny, infima a suprema množiny. Z oblasti relací jde o vlastnosti, jako jsou reflexivnost, symetričnost, tranzitivnost, a o precizaci relace ekvivalence či uspořádání. U operací jde opět o jejich vlastnosti, tj. o komutativnost, asociativnost, distributivnost, řešení základní rovnice apod. Pokud budeme chtít použít pojmy z oblasti algebraických struktur, definujeme pologrupu, grupu, polookruh, okruh, obor integrity, pole. S těmito pojmy se studenti většinou nesetkali. Protože jde o pojmy nové, přestože se jejich definice opírají většinou o známé vlastnosti, je vhodné je procvičit. Přitom lze výhodně využít těch číselných struktur, které už studenti znají. Hloubka či rozsah tohoto procvičení je opět ovlivněna úrovní studentů, časovou dotací a především cílem, kterého chce vyučující dosáhnout. Velkou pozornost nicméně doporučuji věnovat pojmům infima a suprema množiny. Zejména pojem suprema představuje jeden z nejdůležitějších pojmů používaných v daném postupu. Pomocí něj jsou zavedeny operace v množině desetinných rozvojů. Na rozdíl od pojmu horní meze množiny, který je mu blízký, je určen jednoznačně. To je jeho výhoda, ale na druhé straně jde o pojem, který je poměrně náročný pro správné pochopení.

Základním pojmem zvoleného postupu je pojem nezáporného desetinného rozvoje, přičemž vyloučíme desetinné rozvoje s periodickou devítkou. Z vlastní zkušenosti mohu říci, že už toto omezení vyvolá dotazy, proč se k tomuto kroku uchylujeme. Jelikož však studenti znají součet nekonečné geometrické řady, mohou si sami dokázat identitu rozvojů, např. $2{,}\overline{0}$ a $1{,}\overline{9}$. Poté už chápou dané omezení z důvodů jednoznačnosti vyjádření desetinného rozvoje. Zároveň zavedeme pojem dolní a horní aproximace desetinného rozvoje, což mnohým připomene postup při určování čísla $\sqrt{2}$, resp. $2^{\sqrt{2}}$, se kterým se v průběhu studia setkali. V dalších částech budeme často nahrazovat práci s nekonečnými desetinnými rozvoji prací s jejich aproximacemi. Tím se celý postup poněkud zjednodušuje, neboť aproximace jsou desetinná čísla a praktickou činnost s těmito čísly provádějí už žáci na základní škole. Navíc jde o čísla racionální, tj. o číselný obor, jehož vlastnosti studenti poměrně dobře znají a mohou je tudíž používat. Důležité je, aby dospěli k přesvědčení, že dané nahrazení můžeme vždy provést.

V množině všech desetinných rozvojů definujeme rovnost dvou rozvojů jakožto rovnost všech jejich dolních aproximací stejného řádu. Dokážeme, že daná relace je ekvivalencí v této množině. Pomocí dolních aproximací pak definujeme relaci „menší než“. Přitom porovnávání desetinných rozvojů převedeme opět na porovnávání jejich dolních aproximací stejného řádu. A jestliže si dva rozvoje nejsou rovny, tak musíme při tomto porovnávání nutně jednou dospět k situaci, že dolní aproximace jednoho desetinného rozvoje bude menší než dolní aproximace druhého desetinného rozvoje stejného řádu. Potom tedy první z těchto rozvojů označíme jako menší. Můžeme položit studentům otázku, zda nelze dospět k situaci, kdy bychom pokračovali ve srovnávání dolních aproximací daných rozvojů a dospěli bychom k rovnosti dvou těchto aproximací nebo k obrácené nerovnosti mezi těmito aproximacemi než v případě nižších řádů. Odpověď na tuto otázku studenti jistě naleznou. Přitom je vhodné, pokud tak neprovedou sami, zformulovat závěr o monotonii posloupnosti dolních aproximací, neboť ten nalezne uplatnění i v dalších důkazech. (Přitom můžeme poukázat na důležitost vyloučení periodických devítek.) O definované relaci „menší než" dokážeme, že je lineárním uspořádáním.

Definice relací využívaly pouze pojem dolní aproximace desetinného rozvoje, tj. používaly racionální čísla. Všechny vlastnosti těchto relací byly také odvozeny z vlastností racionálních čísel. Nyní uvedeme vlastnost, která odlišuje množinu racionálních čísel od množiny reálných čísel. Tato vlastnost může být vyslovena různým způsobem, přičemž s jedním už se studenti setkali v souvislosti s posloupnostmi. Poznali větu: *Každá monotónní omezená posloupnost je konvergentní.* Tato věta nebyla dokázána, dokonce nebylo ani příliš zdůrazněno, že platí v množině reálných čísel, ale nikoliv v množině racionálních čísel. Ve zvoleném postupu uvedeme tuto vlastnost v jiném tvaru. Ten využívá suprema množiny: *Každá neprázdná shora omezená podmnožina množiny reálných čísel má supremum.* Toto tvrzení upravíme pro případ nezáporných desetinných rozvojů na tvar: *Každá neprázdná shora omezená podmnožina množiny nezáporných desetinných rozvojů má supremum.* (Je tím myšleno, že supremum takovéto množiny je opět desetinný rozvoj.) Důkaz této věty patří k těm obtížnějším, ale je možné ho provést, neboť neobsahuje nic, co studenti neznají. Navíc využívá postupu, kdy je potřeba nejprve příslušný prvek, jenž by měl být supremem, zkonstruovat a potom dokázat, že o supremum skutečně jde. Protože s tímto typem konstruktivního důkazu se studenti málo setkali, je vhodné tuto situaci využít pro rozšíření jejich znalostí. I když však vyučující neprovede daný důkaz detailně, pouze naznačí jeho myšlenku, není tento přístup na závadu. Důležitá je v tomto okamžiku ta skutečnost, aby studenti pochopili obsah dané věty a dovedli ji použít v dalším postupu.

Využijeme tuto větu hned při definici sčítání a násobení desetinných rozvojů. Protože jsme využívali dolních aproximací už při definici relací, nebude pro studenty obtížné navrhnout definici součtu dvou desetinných rozvojů tak, že budeme postupně sčítat dolní aproximace desetinných rozvojů, které chceme sečíst, a nalezneme supremum množiny těchto součtů. Obdobnou definici lze navrhnout pro násobení desetinných rozvojů. Obě definice představují operace v množině desetinných rozvojů, neboť uvedeným postupem je skutečně dvěma desetinným rozvojům jednoznačně přiřazen třetí desetinný rozvoj. Přitom je potřeba rozmyslet, jak se vypořádáme s případem, kdy by daný postup vedl k nedovolenému desetinnému rozvoji, tj. k rozvoji s periodickou devítkou.

V diskusi při formulování definic operací sčítání a násobení se lze setkat se situací, kdy studenti budou vytvářet dané množiny součtů nebo součinů ze sčítanců nebo z činitelů, které tvoří dolní aproximace stejného řádu. Je možné dokázat, že při tomto postupu dospějeme ke stejnému desetinnému rozvoji jako při použití postupu, kdy budeme vytvářet množinu ze součtů či součinů dolních aproximací všech možných řádů. Vhodné je proto v definici použít aproximace různých řádů a v důkazech, kde je to možné, se omezit na práci s dolními aproximacemi stejného řádu. To lze při důkazech komutativnosti, existence nulového či jednotkového prvku dané operace, vlastnosti krácení či existence inverzního prvku vzhledem k operaci násobení ke každému kladnému desetinnému rozvoji. Při důkazu asociativnosti sčítání či násobení desetinných rozvojů je však nutné využít definice s aproximacemi různých řádů.

Téměř všechny důkazy je možno provést detailně pod větším či menším dohledem vyučujícího, neboť studenti vědí, co mají dokazovat. Výjimku tvoří důkaz existence inverzního prvku vzhledem k operaci násobení, neboť jde opět o důkaz konstruktivní. Nejprve je nutno zkonstruovat prvek, o němž pak dokážeme, že je hledaným inverzním prvkem. A právě konstrukce tohoto hledaného prvku vyžaduje hlubší analýzu. Nelze totiž položit hledaný desetinný rozvoj rovný převrácené hodnotě daného nenulového desetinného rozvoje, neboť nevíme, co by vzniklý výraz představoval. Zřejmé je i to, že nelze tento krok použít ani v případě dolních aproximací tohoto rozvoje, neboť převrácená hodnota dolní aproximace n-tého řádu nemusí být dolní aproximací n-tého řádu. Patrně studenti nabídnou v tomto postupu možnost omezit se u dané převrácené hodnoty dolní aproximace desetinného rozvoje n-tého řádu na n-tou dolní aproximaci rozvoje, který vznikne při převedení dané převrácené hodnoty na tvar desetinného rozvoje. Tento krok je však scestný, jak je možno demonstrovat na příkladech desetinných rozvojů, kdy posloupnosti desetinných čísel, vzniklé uvedeným postupem, nelze interpretovat jako dolní aproximace nějakého desetinného rozvoje, neboť tyto posloupnosti mohou být klesající, konstantní, dokonce nemusí být vůbec monotónní. Přitom víme, že posloupnost dolních aproximací každého desetinného rozvoje je neklesající. V tomto případě je třeba využít horních aproximací desetinného rozvoje.

Pro dokončení celého postupu vytvoření struktury nezáporných desetinných rozvojů zbývá dokázat distributivnost násobení vzhledem ke sčítání a monotonii vzhledem ke sčítání a k násobení. Po těchto krocích můžeme strukturu nezáporných desetinných rozvojů s operacemi sčítání a násobení a s relací lineárního uspořádání označit za lineárně uspořádaný komutativní polookruh s nulovým a jednotkovým prvkem, s krácením vzhledem ke sčítání a s inverzními prvky ke každému nenulovému prvku vzhledem k násobení. Jde tedy o strukturu naprosto stejných vlastností, jaké má struktura nezáporných reálných čísel. Je proto možné ztotožnit nezáporné reálné číslo s nezáporným desetinným rozvojem. (Používání uvedené terminologie není nutné.)

Abychom vytvořili obor reálných čísel, je nutno rozšířit obor nezáporných reálných čísel na obor všech reálných čísel. Je možné provést tento krok jako analogii s postupem rozšíření oboru přirozených čísel na obor čísel celých. Tento postup nalezneme v různých učebnicích algebry, neboť je zcela založen na algebraických postupech. Využít lze např. [2]. Vytvoříme množinu všech uspořádaných dvojic přirozených čísel, na níž definujeme rovnost uspořádaných dvojic. Po důkazu, že jde o ekvivalenci, provedeme rozklad množiny uspořádaných dvojic na třídy sobě rovných dvojic. Na těchto třídách definujeme relace rovnosti a uspořádání a operace sčítání a násobení. To můžeme provést tak, že budeme vycházet z myšlenky týkající se pozdějšího ztotožnění třídy uspořádaných dvojic a celého čísla. S ohledem na tento cíl pak volíme definice relací a operací, tj. použijeme jistým způsobem formální cestu. Metodicky vhodnější je však využít postupu, na němž by student viděl, že dané relace a operace nejsou ničím umělým, ale že vzniknou logickou cestou z naší volby tříd ekvivalence.

Uvědomme si, že otázka nastolení rozšíření daného číselného oboru vyvstane v momentě, kdy určitý typ rovnic není v existujícím číselném oboru řešitelný. To je situace, kdy se snažíme řešit v přirozených číslech rovnici tvaru: $a + x = b$. Tato rovnice je řešitelná v daném oboru pouze v případě, že $a \leq b$. Snažíme se tedy rozšířit tento číselný obor tak, aby byla uvedená rovnice řešitelná v nově vzniklém číselném oboru vždy. Řešení každé takovéto rovnice závisí na číslech a, b. Každá tato rovnice je tedy popsatelná touto dvojicí. Při volbě různých dvojic však může nastat případ, že více dvojic určuje stejné řešení, tj. některé rovnice popsané různými dvojicemi mají stejná řešení. Položíme takovéto dvojice sobě rovné. Abychom mohli tuto relaci definovat v množině všech uspořádaných dvojic, které reprezentují rovnice uvedeného typu, musíme předpis, který jsme odvodili pro dvojici přiřazené řešitelným rovnicím, rozšířit na všechny rovnice daného typu. Takto definovaná relace je tou ekvivalencí, s jejímž použitím vytvoříme třídy ekvivalentních uspořádaných dvojic. S těmito třídami budeme dále pracovat tak, jak bylo naznačeno v předcházejícím textu. Budeme-li chtít definovat další relace či operace, pak nejprve provedeme úvahu pro ty třídy, které reprezentují rovnice řešitelné v oboru přirozených čísel, a vzniklý vztah použijeme jako definici v množině všech tříd. Definice nám pak z této úvahy přímo vyplynou. Např. v případě sčítání tříd budeme chtít, aby výsledná třída reprezentovala rovnici, jejímž řešením je součet řešení rovnic reprezentujících sčítané třídy.

Daným postupem tak rozšíříme obor přirozených čísel na obor celých čísel. Stejným postupem dospějeme k oboru nezáporných racionálních čísel, když budeme chtít vytvořit obor, v němž by byly řešitelné všechny rovnice tvaru: $ax = b$, kde b je libovolné přirozené číslo, ale a je nenulové přirozené číslo. Výhodou je, že postup vytváření tohoto číselného oboru je totožný s postupem vytváření oboru celých čísel.

Důležité je, aby si studenti uvědomili, že postup vytvoření oboru celých čísel z oboru přirozených čísel můžeme použít i v případě, kdy z oboru nezáporných desetinných rozvojů chceme vytvořit obor všech desetinných rozvojů. Daný postup totiž vůbec nezáležel na konkrétních reprezentantech oboru, z něhož vycházíme, ale na vlastnostech relací a operací definovaných v tomto oboru. A z tohoto pohledu je obor přirozených čísel téměř shodný s oborem nezáporných desetinných rozvojů, neboť ten má všechny vlastnosti jako obor přirozených čísel. Jelikož v něm navíc existují inverzní prvky vzhledem k násobení ke všem nenulovým prvkům, existují i v oboru všech desetinných rozvojů inverzní prvky ke všem nenulovým desetinným rozvojům. Jde tedy o strukturu lineárně uspořádaného pole. Můžeme ji proto ztotožnit se strukturou reálných čísel.

Jak jsem si ověřil, postačí k uvedenému postupu zavedení oboru reálných čísel včetně obecné přípravy a důslednému provedení všech důkazů dvouhodinový seminář. Přitom přínos z tohoto semináře nebyl jen v hlubším pochopení struktury reálných čísel studenty, ale i v hlubším pochopení výstavby číselných oborů vůbec. Zároveň lze ke kladům přičíst i rozšíření znalostí v oblasti algebraických struktur, preciznější provádění důkazů, řazení - byť jednoduchých vět - do celků, sloužících k získání hlubšího tvrzení. Zúročení celé práce se jistě projeví u studentů při studiu na vysoké škole.

LITERATURA:

[1] Bydžovský B., *Arithmetika pro VI. a VII. třídu škol reálných*, Jednota českých matematiků, Praha, 1911.

[2] Blažek J. a kol., *Algebra a teoretická aritmetika I*, SPN, Praha, 1983.

[3] Müllerová J. a kol., *Matematika pro 7. ročník ZŠ — I. díl*, SPN, Praha, 1990.

[4] Houska J. a kol., *Matematika pro 9. ročník ZŠ a nižší třídy gymnázia (Aritmetika a algebra)*, Fortuna, Praha, 1991.

[5] Odvárko O. a kol., *Matematika pro II. ročník gymnázií*, SPN, Praha, 1985.

[6] Brudno A. L., *Teorija funkcij dejstvitelnogo peremennogo*, Nauka, Moskva, 1971.