Rozhledy matematicko-fyzikální

Vlastimil Dlab

Pravoúhlý trojúhelník v pravoúhlém trojúhelníku

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 97 (2022), No. 4, 24–31

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151636

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2022

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Pravoúhlý trojúhelník v pravoúhlém trojúhelníku

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

Při výuce matematiky nesmíme zapomínat, že jeden ze základních rysů matematiky je způsobilost otázky zobecňovat a nezastavovat se u konkrétních případů. Obecné řešení je totiž často názornější, přináší hlubší porozumění a speciální případy vysvětluje. V přístupu k výuce matematiky bychom měli mít tento prvek stále na paměti. K objasnění tohoto procesu může posloužit úloha 269 a její řešení v časopisu Matematika–fyzika–informatika [1, Úloha 269] (v citaci jsme si dovolili označení bodů M a L zaměnit):

Úloha ([1, Úloha 269]): *Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC, v němž K je střed jeho přepony AB. Uvažujme pravoúhlý trojúhelník KLM s pravým úhlem při vrcholu L, kde vrcholy L, M leží po řadě uvnitř odvěsen AC, BC. Sestrojte bod M tak, aby úsečka BM měla co nejmenší délku.*

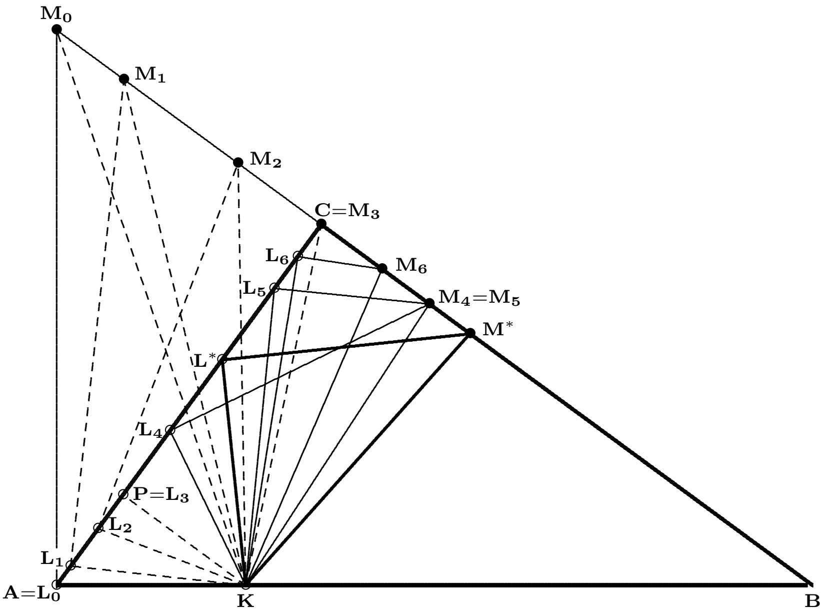
Úloha je velmi speciálním případem obecného problému, který můžeme formulovat takto:

Obecná úloha: *Uvažujme pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Na přímce AB zvolme bod K. Popišme množinu všech pravoúhlých trojúhelníků KLM s pravým úhlem při vrcholu L, kde bod L leží na přímce CA a bod M na přímce BC. Konstrukce trojúhleníku KLM definuje zobrazení bodů L přímky CA na body M přímky BC. Popište toto zobrazení jako funkci přiřazující orientované vzdálenosti bodu L od bodu A orientovanou vzdálenost bodu M od bodu B. Popište závislost této funkce na volbě bodu K na přímce AB.*

Výše uvedené zobecnění poslouží čtenáři jako možná úloha k procvičení po prostudování článku. Abychom tento článek zpřístupnili co nejširšímu okruhu studentů, omezíme se na následující částečně zobecněný případ:

Naše úloha: *Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC, v němž bod K leží na přeponě AB. Uvažujme pravoúhlý trojúhelník KLM s pravým úhlem při vrcholu L, kde vrchol L leží na odvěsně CA a vrchol M na přímce BC. Sestrojte bod M tak, aby úsečka BM měla co nejmenší délku.*

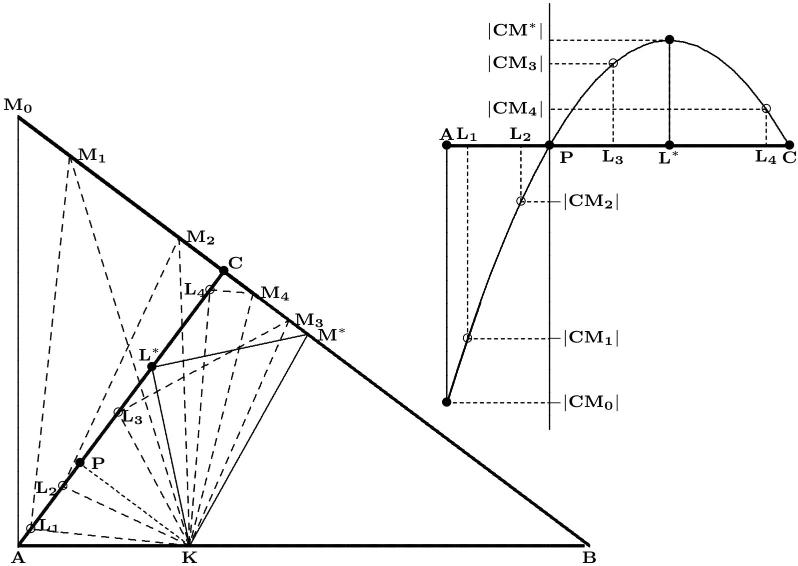
Nadále je tedy ABC pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délky $a = |BC|$, $b = |CA|$ a přeponou délky $c = |AB|$. Trojúhelníku ABC je přiřazen pravoúhlý trojúhelník ABM_0, kde M_0 je průsečík přímky BC a kolmice na přeponu AB vztyčené v bodě A (viz obr. 1).



Obr. 1: ABC-přiřazené trojúhelníky KL_iM_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Budeme studovat pravoúhlé trojúhelníky KLM přidružené k trojúhelníku ABC následujícím způsobem. Vrchol K je bodem přepony $AB, K \neq A$. Vrchol L leží na odvěsně CA, $L \neq C$. Vrchol M leží na přímce BC tak, že úhel KLM je pravý. Vrchol M tedy leží na polopřímce M_0B (viz obr. 1 a obr. 2). Abychom si ulehčili vyjadřování, budeme každý takový pravoúhlý trojúhelník KLM nazývat *ABC-přiřazený trojúhelník*. Na obr. 1 je takových trojúhelníků zobrazených osm: KL_iM_i pro $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ a KL^*M^*. Všimněme si, že $M_4 = M_5$ a že pravoúhlé trojúhelníky ACM, kde M je libovolný bod prodloužené odvěsny $BC, M \neq C$, nejsou ABC-přiřazené trojúhelníky. Podmínka $K \neq A$ zaručuje, že vrchol M je jednoznačně určen volbou vrcholů K a L. (Názornou představu může čtenář získat volbou poloh vrcholů K a L v [2].)

Označme P patu kolmice vedenou vrcholem K na odvěsnu CA. Důležitou roli bude v tomto článku hrát střed úsečky PC. Označme ho L^*, tedy $|PL^*| = |L^*C|$.



Obr. 2: Vrchol M je funkcí vrcholu L: Zobrazení AC na M_0M^*

Celý článek využívá důležitý pojem *podobnosti trojúhelníků.* Z podobnosti trojúhelníků ABC, AKP a M_0AC na obr. 1 plynou tyto vztahy, kde $x = |AK|$:

$$|AP| = \frac{bx}{c}, \quad |KP| = \frac{ax}{c}, \quad |AM_0| = \frac{bc}{a}, \quad |M_0C| = \frac{b^2}{a}. \qquad (1)$$

Nechť KLM je ABC-přiřazený trojúhelník. Kromě označení délky úsečky AK písmenem x, označme $|AL| = y$ a $|CM| = z$. Následující tvrzení krok za krokem povedou k řešení naší úlohy. První tvrzení je pozorování, které si čtenář jistě sám ověří.

Tvrzení 1. *Pro libovolnou volbu bodu $K \neq A$ na přeponě AB a bodu L na úsečce AP je vrchol M ABC-přiřazeného trojúhelníku KLM bodem úsečky M_0C. Tato konstrukce trojúhelníků KLM definuje vzájemně jednoznačné zobrazení (bijekci) bodů úsečky AP na body úsečky M_0C, které zachovává uspořádání.*

Tvrzení 2. *Pro každý ABC-přiřazený trojúhelník KLM s vrcholem L na úsečce AP platí*

$$z = |CM| = \frac{(b-y)(bx-cy)}{ax}. \tag{2}$$

Pro pevně danou vzdálenost $x = |AK|$ je vzdálenost $z = |CM|$ kvadratickou funkcí f proměnné $y = |AL|$, $0 \leq y \leq \frac{bx}{c}$,

$$z = f(y) = \frac{c}{ax}y^2 - \frac{b(c+x)}{ax}y + \frac{b^2}{a}. \tag{3}$$

Platí, $f(0) = \frac{b^2}{a}$ a $f(\frac{bx}{c}) = 0$.

Důkaz. Užitím podobnosti trojúhelníků LKP a MLC dostaneme:

$$z = \frac{|LC| \cdot |LP|}{|KP|} = \frac{|LC| \cdot (|AP| - |AL|)}{|KP|} = \\ = \frac{(b-y)(\frac{bx}{c} - y)}{\frac{ax}{c}} = \frac{(b-y)(bx-cy)}{ax},$$

přičemž v předposlední rovnosti jsme využili vztahů (1). Úpravou vztahu už je snadné odvodit (3) a vypočítat hodnoty $f(0)$ a $f(\frac{bx}{c})$.

Následující tvrzení se týká případu, kdy bod L leží na úsečce PC, $L \neq C$. Zahrnují v sobě analogie tvrzení 1 a 2.

Tvrzení 3. *Pro libovolnou volbu bodu $K \neq A$ na přeponě AB a bodu L na úsečce PC je vrchol M ABC-přiřazeného trojúhelníku KLM bodem úsečky CM^*, kde bod M^* leží na odvěsně BC ve vzdálenosti*

$$z^* = |CM^*| = \frac{b^2(c-x)^2}{4acx} \tag{4}$$

od bodu C (viz obr. 1). Přitom

$$z = |CM| = \frac{(b-y)(cy-bx)}{ax} \tag{2'}$$

a tato vzdálenost je tedy (při konstantním $x = |AK|$) dána kvadratickou funkcí

$$z = g(y) = -\frac{c}{ax}y^2 + \frac{b(c+x)}{ax}y - \frac{b^2}{a}. \tag{3'}$$

Platí $g(\frac{bx}{c}) = g(b) = 0$. *Proto funkce* $g(y)$ *nabývá ve středu* L^* *úsečky* CP *maxima a platí*

$$y^* = |AL^*| = \frac{b(c+x)}{2c}. \tag{5}$$

Důkaz. Vztah (2′) lze opět ověřit užitím podobnosti trojúhelníků LKP a MLC. Jeho úpravou pak získáme vztah (3′). Ověřit, že maximální vzdálenost bodů M ABC-přiřazených trojúhelníků KLM od vrcholu C je dána vztahem (4), můžeme úpravou vzorce pro funkci g: [1)]

$$g(y) = -\frac{c}{ax}\left[\left(y - \frac{b(c+x)}{2c}\right)^2 - \frac{b^2(c-x)^2}{4c^2}\right].$$

Vidíme ihned, že tato funkce (jejímž grafem je parabola, viz obr. 2) nabývá maximální hodnotu vyjádřenou vztahem (4) pro y^* dané rovností (5).

Zde je důležité zdůraznit, že odvodit vzorec (4) lze též jednodušším způsobem, jak už naznačila poslední věta tvrzení 3. Každá kvadratická funkce má totiž extrémní hodnotu (maximální či minimální) v aritmetickém průměru dvou proměnných, v nichž nabývá stejnou hodnotu. Naše funkce nabývá hodnotu nula v případě, že $L = P$ nebo $L = C$, a maxima tedy ve středu L^* úsečky PC.

Jednou z přirozených otázek je nyní určit polohu bodu K tak, aby vrchol M^* příslušného extrémního ABC-přiřazeného trojúhelníku splynul s vrcholem B. Takový bod budeme značit K_B (a příslušné vrcholy L_B^* a M_B^*). Situace je zobrazena na obr. 3.

Tvrzení 4. *Nechť pro extrémní ABC-přiřazený trojúhelník* KL^*M^* *je* $M^* = B$, *tj.* $K = K_B, L^* = {L_B}^*$ *(viz obr. 3). Potom*

$$x_B = |AK_B| = \frac{c(c-a)^2}{b^2}$$

a

$$y_B^* = |AL_B^*| = \frac{b^2 + (c-a)^2}{2b}.$$

[1)] Připomeňme, že doplnění výrazu $ry^2 + sy$ na čtverec $r(y + \frac{s}{2r})^2$ při vyšetřování kvadratické funkce používal již před více než tisíci lety ve své knize Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi (780-850).

Důkaz: Výraz pro x_B obdržíme dosazením $z^* = a$ ve vztahu (4) a využitím Pythagorovy věty $c^2 = a^2+b^2$. Pro x_B dostaneme kvadratickou rovnici s kořeny

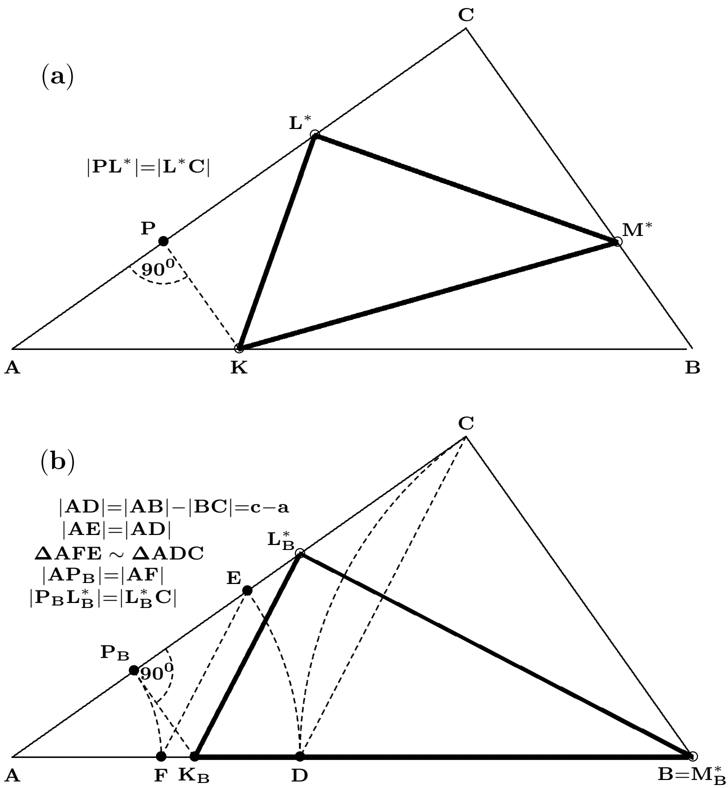
$$\frac{c(c \pm a)^2}{b^2},$$

z nichž pouze

$$x_B = \frac{c(c-a)^2}{b^2}$$

vyhovuje podmínce, že bod K_B leží na přeponě AB.

Cvičení 1. Vysvětlete geometrickou konstrukci bodů M^* a K_B tak, jak je naznačena na obr. 3.



Obr. 3: Konstrukce ABC-přiřazených trojúhelníků KL^*M^* a $K_BL_B^*M_B^*$

Víme, že vrcholy M ABC-přiřazených trojúhelníků leží na polopřímce M_0B. Zopakujte si bližší určení polohy vrcholů M řešením následujícího cvičení.

Cvičení 2. Popište podmínky, které musí splňovat vrcholy K a L ABC-přiřazených trojúhelníků, aby bod M ležel

(i) na úsečce M_0C,

(ii) na úsečce CB,

(iii) mimo úsečku M_0B.

Odpovědi na otázky (i) a (ii) si lze zkontrolovat, naleznete je v předchozím textu. V odpovědi na případ (iii) je K bodem úsečky AK_B, $K \neq A$, $K \neq K_B$ a odpovídající L leží na úsečce $L'L''$, přičemž

$$L' \neq L'', \; L \neq L', \; L \neq L''$$

a $KL'B$ a $KL''B$ jsou ABC-přiřazené trojúhelníky.

Na závěr připojme ještě malou poznámku týkající se zobrazení bodů přepony AB na body prodloužené odvěsny CB pomocí extrémních ABC-přiřazených trojúhelníků.

Jedná se o funkci

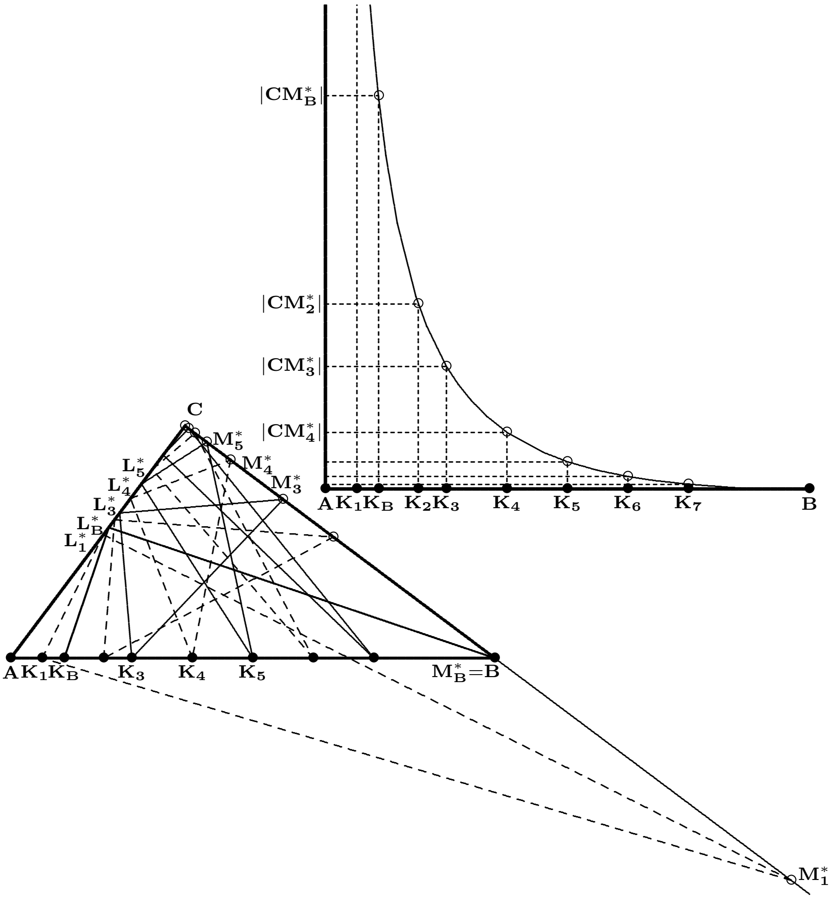
$$h(x) = \frac{b^2(c-x)^2}{4acx} \quad \text{(viz (4))}$$

vyjadřující vzdálenost $|CM^*|$ v závislosti na volbě $x = |AK|$. Jejím grafem je hyperbola, přičemž jedna ze souřadnicových os je její asymptotou a druhá její tečnou (viz obr. 4).

Čtenáři doporučujeme, aby se vrátil k obecné úloze zmíněné na začátku tohoto článku a zkusil ji vyřešit. Pomůckou může posloužit reference [3].

Poděkování.

Děkuji doc. Ing. Ľubomíře Dvořákové, Ph.D., za konečnou úpravu článku včetně jeho názvu.



Obr. 4: Zobrazení bodů přepony AB na body prodloužené odvěsny CB pomocí extrémních ABC-přiřazených trojúhelníků

Literatura

[1] Calábek, P.: Zajímavé matematické úlohy. *Matematika–fyzika–informatika*, 30 (2021), č. 4, s. 272–278.

[2] https://www.geogebra.org/m/eh6wpjbw

[3] https://www.geogebra.org/m/ukm7swwq