10. kapitola

JEŠTĚ JEDNOU HONIČKA NA ŠACHOVNICI A KVOČNY NA VEJCÍCH NEBOLI BERNOULLIOVO SCHÉMA

10.1 BERNOULLIŮV POKUS

Budeme se zabývat kvočnou sedící na vejcích. Z každého vejce se vylíhne kohoutek nebo slepička. Předpokládáme-li, že vejce jsou zdravá, jiná možnost není. O tom, co se vylíhne, rozhoduje náhoda. Bude-li to slepička, bude to hospodyně považovat za úspěch, bude-li to kohoutek, za neúspěch. Z kohoutka totiž mnoho užitku není, jakmile povyroste, bude se muset zabít. Sledujeme-li, co se z vejce vylíhne, provádíme náhodný pokus se dvěma výsledky. Vysezení n vajec je vlastně totéž jako n-násobné vysezení jednoho vejce.

Sledujme činnost kontrolora v továrně. Zkoumá každý zhotovený výrobek, je-li dobrý nebo vadný. Zkouška vede k jednomu ze dvou výsledků: výrobek je dobrý, nebo je to zmetek. Odhalení zmetku je pro kontrolora úspěch.

Definice 10.1. Náhodný pokus, který má dvouprvkový prostor výsledků, se nazývá *Bernoulliův pokus.**)

Hod mincí, hod s-kostkou, zjištění pohlaví narozeného dítěte, zjištění, vzklíčilo-li zaseté semeno, zkoumání, je-li výrobek vadný, jsou Bernoulliovy pokusy. U Ber-

---

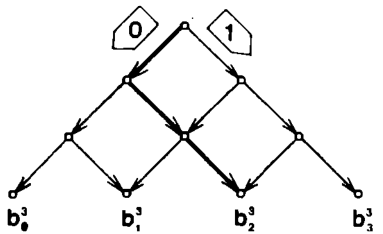
*) J. Bernoulli (1654—1705), švýcarský matematik a fyzik, který položil základy teorie pravděpodobnosti.

noulliových pokusů budeme také mluvit o úspěchu a neúspěchu. Slovo neúspěch nebude mít přitom záporné zabarvení. Úspěch budeme kódovat číslicí 1 a neúspěch číslicí 0. Dále budeme označovat $\mathsf{P}(1) = p$, $\mathsf{P}(0) = q$.

Známe různé příklady Bernoulliových pokusů a známe také víceetapové náhodné pokusy související s Bernoulliovým pokusem. Např. pokus, který jsme nazvali čekání na první úspěch (příklad 2.6), spočívá v opakování Bernoulliova pokusu tak dlouho, až se poprvé dostaví úspěch.

10.2. BERNOULLIOVO SCHÉMA JAKO NÁHODNÁ PROCHÁZKA

Vraťme se k závodům na šachovnici (odst. 6.3). Šachovnici jsme nahradili jednoduchou sítí. Připomeňme si to: Bernoulliův pokus je teď hod s-kostkou. Skončí-li pokus



Obr. 10.1.

úspěchem, figurka postoupí na jihovýchod, skončí-li neúspěchem, na jihozápad (obr. 10.1). Po trojím zopakování téhož pokusu se figurka dostane od jednoho z cílů b_k^3.

Uvedený náhodný pokus je příklad náhodné procházky. Někdo jiný by však mohl říci, že to je trojí opakování stejného Bernoulliova pokusu.

Jak budeme kódovat výsledky naší procházky, zajímá-li nás, kudy a ke kterému cíli figurka putovala? U náhodných procházek jsme výsledky kódovali cestami, které náhoda figurce určila. Všimněte si silně vyznačené cesty na obr. 10.1. Nejsnadněji ji zakódujeme trojicí 011. Trojice z nul a jedniček si odpovídají s cestami v síti. Cest v síti je právě tolik jako takových trojic. Jsou to tříprvkové variace ze dvou prvků {0, 1} a je jich 2^3. Tolik výsledků obsahuje prostor Ω náhodné procházky, a tedy i trojího opakování Bernoulliova pokusu.

Kdyby kvočna seděla na třech vejcích, mohli bychom zjišťování, co se z nich vyklube, spojit s procházkou po síti z obr. 10.1. Síť má tři úrovně, každá odpovídá jednomu opakování pokusu. Vylíhne-li se slepička, figurka se posune na jihovýchod, vylíhne-li se kohoutek, na jihozápad. Průběh líhnutí modelujeme náhodnou procházkou po síti.

Náhodný jev, že se vylíhne k slepiček, se v jazyce náhodných procházek vyjádří tak, že se figurka dostane k cíli b_k^3 ($k = 0, 1, 2, 3$). Můžeme to popsat ještě jinak: Při trojnásobném opakování pokusu nastane právě k-krát úspěch. Tento jev označíme B_k^3.

Kvočna může sedět na n vejcích, kontrolor může prohlédnout n výrobků, zahradník může sledovat n zasetých semen atd.

Definice 10.2. Náhodný pokus spočívající v n-násobném opakování téhož Bernoulliova pokusu nazýváme *Bernoulliovo schéma s n pokusy.*

Jev B_k^n znamená, že v Bernoulliově schématu s n pokusy nastal úspěch právě k-krát.

Vraťme se opět ke kvočně sedící na třech vejcích. Pro jev B_k^3 je příznivých $\binom{3}{k}$ výsledků. Právě tolik cest vede k cíli b_k^3. Zakódujeme např. jev B_2^3 — kvočna vysedí právě dvě slepičky ze tří vajec.

$$B_2^3 = \{011, 101, 110\}$$

Podle pravidla násobení je $\mathsf{P}(011) = qpp = p^2q$, $\mathsf{P}(101) = pqp = p^2q$ a $\mathsf{P}(110) = ppq = p^2q$. Každý výsledek příznivý pro jev B_2^3 má tutéž pravděpodobnost p^2q. Zapišme ji ve tvaru p^2q^{3-2}. Pravděpodobnost $\mathsf{P}(B_2^3)$ je součet stejných sčítanců, kterých je $\binom{3}{2}$, a tedy

$$\mathsf{P}(B_2^3) = \binom{3}{2}p^2q^{3-2}\,.$$

Podobnými úvahami najdeme vzorce pro pravděpodobnost ostatních jevů B_0^3, B_1^3, B_3^3.

Uvažujem Bernoulliovo schéma s n pokusy a jev B_k^n. Je pro něj příznivých právě tolik výsledků, kolik cest vede v příslušným způsobem prodloužené síti k cíli b_k^n. Tato síť bude mít n úrovní a $n + 1$ cílů. Označíme je od západu k východu $b_0^n, b_1^n, \ldots, b_n^n$. Jejich indexy obsahují informace o cestách, které k nim vedou. Horní index udává počet kroků od startu do cíle (počet pokusů), dolní index pak počet kroků směřujících na jihovýchod (počet úspěchů).

K cíli b_k^n vede $\binom{n}{k}$ cest. Pro jev B_k^n je příznivých $\binom{n}{k}$ výsledků. Každému výsledku příznivému pro jev B_k^n odpovídá n-tice, v níž je právě k jedniček. Odpovídá mu cesta skládající se z n úseků, z nichž právě k směřuje na jihovýchod a $n—k$ na jihozápad. Pravděpodobnost výsledku je rovna pravděpodobnosti průchodu cestou, která mu odpovídá. Podle pravidla násobení dostáváme:

Věta 10.1. *Pravděpodobnost každého výsledku příznivého pro jev B_k^n je p^kq^{n-k}. Je to pravděpodobnost průchodu cestou vedoucí k cíli b_k^n.*

K cíli b_k^n vede $\binom{n}{k}$ různých cest. Pro jev B_k^n je tedy příznivých $\binom{n}{k}$ výsledků. Pravděpodobnost průchodu každou z cest vedoucích k cíli b_k^n je stejná a podle věty 10.1 je rovna $p^k q^{n-k}$. Podle pravidla sčítání je tedy pravděpodobnost dosažení cíle b_k^n (bez ohledu na to, kterou cestou) součet $\binom{n}{k}$ sčítanců, rovných $p^k q^{n-k}$.

Věta 10.2. *Pravděpodobnost dosažení cíle b_k^n je rovna $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.*

Dosažení cíle b_k^n odpovídá v Bernoulliově schématu s n pokusy jevu B_k^n.

Věta 10.3. *Označuje-li B_k^n jev, že v Bernoulliově schématu s n pokusy nastane právě k-krát úspěch a p je pravděpodobnost úspěchu v jednom pokusu, $q = 1 - p$, platí pro $k = 0, 1, 2, \ldots, n$*

$$\mathsf{P}(B_k^n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Všimněte si, že jevy $B_0^n, B_1^n, \ldots, B_n^n$ jsou vzájemně disjunktní a jejich sjednocení je jistý jev.

Úloha 10.1. Ukažte, že $\mathsf{P}(B_0^n) + \mathsf{P}(B_1^n) + \ldots + \mathsf{P}(B_n^n) = 1$.

Příklad 10.1. V autobusových garážích je 10 autobusů. Všechny se denně kontrolují, než vyjedou. Z dlouhodobé zkušenosti je známo, že pravděpodobnost, že autobus bude v daném dni schopen provozu, je rovna 0,8. Určete pravděpodobnost, že v daném dni bude schopno provozu právě 6 autobusů.

Kontrola postupně prohlíží každý z deseti autobusů. Je-li autobus schopen provozu, mluvíme o úspěchu. Pravděpodobnost úspěchu je 0,8. Neúspěch bude druhý výsledek prohlídky — autobus není v pořádku. Pravděpodobnost neúspěchu je $q = 1 - p = 0{,}2$. Prohlídka jednoho autobusu je Bernoulliův pokus. Kontrola deseti autobusů je desetinásobné opakování téhož pokusu, tedy Bernoulliovo schéma s deseti pokusy. Jev, že právě 6 autobusů bude schopno provozu, je jev B_6^{10}. Podle věty 10.3 je

$$\mathsf{P}(B_6^{10}) = \binom{10}{6}(0{,}8)^4(0{,}2)^6.$$

Úloha 10.2. Určete pravděpodobnost, že v daném dni budou schopny provozu aspoň 4 autobusy.

Úloha 10.3. Určete pravděpodobnost, že kvočna vysedí ze šesti vajec právě čtyři slepičky. Určete pravděpodobnost jevů

a) vylíhne se stejně slepiček i kohoutků,
b) vylíhnou se nanejvýše dva kohoutci,
c) vylíhnou se nanejvýš tři slepičky.

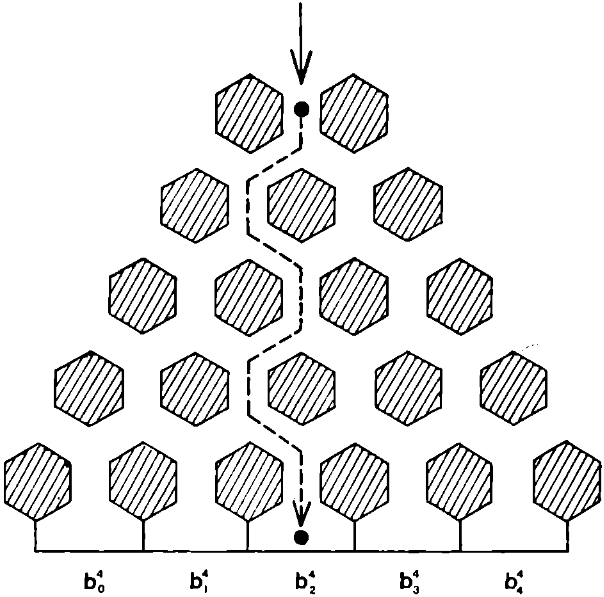
Úloha 10.4. Klíčivost semen určitého druhu bobu je 0,98. To znamená, ze P(semeno vyklíčí) = 0,98.

K pokusným účelům bylo zasazeno 10 semen. Určete pravděpodobnost, že z nich

a) vyklíčí právě 8,
b) nevyklíčí ani jedno.

10.3. GALTONOVA DESKA ČILI OPĚT O SIMULACI

Bernoulliovo schéma jsme modelovali pomocí náhodných procházek po síti. Na obr. 10.2 je znázorněn jednoduchý



Obr. 10.2.

přístroj, tzv. Galtonova deska. Šestiúhelníkové výstupky jsou odděleny uličkami. Vhodíme-li do horního otvoru kuličku, bude se čtyřikrát „rozhodovat", kudy padat. Rozhodne o tom náhoda. Bludiště má takový tvar, že na každém rozcestí je šance pro výběr levé uličky (úspěch) stejná jako pro výběr pravé (neúspěch). Nakonec kulička spadne do jedné z pěti přihrádek — to jsou cíle. Kdybychom desku nakreslili schematicky, dostali bychom známou síť pro Bernoulliovo schéma se čtyřmi pokusy. Přihrádky proto označíme stejně jako cíle v síti. Abychom odhadli pravděpodobnost, že při náhodné procházce dojde figurka do určitého cíle, postavili jsme na start ne jednu, ale více figurek. Nasypme tedy do našeho přístroje m kuliček. Budeme tak simulovat m-násobné opakování procházky. Procházka je však Bernoulliovo schéma se čtyřmi pokusy a s pravděpodobností úspěchu v jednotlivém pokusu $p = \frac{1}{2}$. Všimněte si, že Galtonova deska také znázorňuje sezení na vejcích. Vhodíme-li do ní jednu kuličku, odpovídá to vysezení čtyř vajec. Spadne-li kulička do přihrádky b_k^4, znamená to, že se vylíhly právě čtyři slepičky.

Do horního otvoru přístroje jsme tedy nasypali větší množství kuliček. Sledujme, jak se kuličky rozdělí, jaká část se jich objeví v jednotlivých přihrádkách — cílech. Výsledek bude překvapující. Počty kuliček, které se dostanou k cílům, budou úměrné počtu cest, které k nim vedou, tedy číslům

$$\binom{4}{0} = 1, \binom{4}{1} = 4, \binom{4}{2} = 6, \binom{4}{3} = 4, \binom{4}{4} = 1.$$

(Kde jsou tato čísla v Pascalově trojúhelníku?) Galtonova deska umožňuje simulovat Bernoulliovo schéma pro $p = \frac{1}{2}$. Prodloužíme-li desku směrem dolů, bude odpovídat schématu s větším počtem pokusů.

Pomocí Galtonovy desky můžeme tedy určovat pravděpodobnost související s Bernoulliovým schématem.

Úloha 10.5. Jak byste pomocí Galtonovy desky určili pravděpodobnost jevu B_k^{10} — kvočna vysedí z deseti vajec právě k slepiček ($k = 0, 1, 2, \ldots, 10$)?

10.4. POČET ÚSPĚCHŮ V BERNOULLIOVĚ SCHÉMATU. OPĚT PRAVDĚPODOBNOSTNÍ POČÍTADLO

Výsledky sezení na vejcích kódujeme n-ticemi úspěchů a neúspěchů (jedniček a nul). Hospodyně považuje za úspěch počet slepiček, což je počet úspěchů v Bernoulliově schématu. Jev, že se vylíhne k slepiček, můžeme vyjádřit takto: V Bernoulliově schématu nastane právě k-krát úspěch. Sedí-li kvočna na n vejcích, jde o jev B_k^n. Věta 10.3 udává vzorec pro výpočet jeho pravděpodobnosti.

Nastane-li právě k úspěchů, je to totéž, jako když se figurka dostane k cíli b_k^n. Pomocí pravděpodobnostního počítadla určíme pro $n = 3$ pravděpodobnost jevu, že počet úspěchů bude roven k. Galtonova deska nám princip počítadla připomněla. V bludišti na desce se kuličky rozdělí náhodně, i když se zdá, že náhoda se řídí určitými zákony. Na počítadle však situaci idealizujeme — na každém rozcestí jde polovina figurek na jednu stranu a polovina na druhou. Stačí postavit na start 8 figurek. K cíli b_0^3 dojde 1, k cíli b_1^3 dojdou 3, k cíli b_2^3 dojdou 3 a k cíli b_3^3 dojde 1. Je tedy

$$\mathsf{P}(\text{počet úspěchů je } 0) = \mathsf{P}(B_0^3) = \frac{1}{8},$$

$$\mathsf{P}(\text{počet úspěchů je } 1) = \mathsf{P}(B_1^3) = \frac{3}{8},$$

$$\mathsf{P}(\text{počet úspěchů je } 2) = \mathsf{P}(B_2^3) = \frac{3}{8},$$

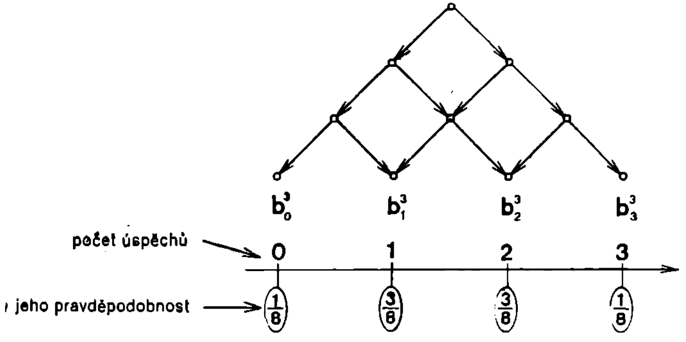
$$\mathsf{P}(\text{počet úspěchů je } 3) = \mathsf{P}(B_3^3) = \frac{1}{8}.$$

Tytéž hodnoty bychom dostali podle věty 10.3.

Pod síť nakreslíme osu a na ní vyznačíme body, které budou odpovídat počtu úspěchů (obr. 10.3). Pro každé k

jsme určili pravděpodobnost, že nastane právě k úspěchů. Připišme je tedy pod příslušné body osy.

Uvědomte si, že jsme každému výsledku Bernoulliova schématu přiřadili právě jedno číslo, totiž počet úspěchů. Výsledky Bernoulliova schématu jsou n-tice nul a jedniček. Číslo přiřazené výsledku je počet jedniček v n-tici. Toto přiřazení je funkce definovaná na prostoru výsledků. S podobnými funkcemi jsme se už seznámili při náhodných hrách. Jsou to náhodné veličiny. Náhodnou veličinu, která uvádí počet úspěchů v Bernoulliově schématu, s n pokusy označme S_n.



Obr. 10.3.

Úloha 10.6. V určitém Bernoulliově schématu je pravděpodobnost $p = \dfrac{1}{3}$. Určete hodnoty náhodné veličiny S_4 (počet úspěchů v Bernoulliově schématu se čtyřmi pokusy). Ke každé z těchto hodnot určete příslušnou pravděpodobnost pomocí pravděpodobnostního počítadla. Informace o funkci S_4 zapište do obrázku (podobně jako obr. 10.3).