18. ročník matematické olympiády

IV. Soutěžní úlohy II. kola

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor): 18. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1968-1969. 11. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1970. pp. 96–128.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404588

1. KATEGORIE A

1. Nájdite všetky komplexné čísla z, pre ktoré platí

$$2z^n + (1 + 3i) \,.\, |z^n| = 1 + i\,, \tag{1}$$

kde n je prirodzené číslo. Koľko rôznych takých čísel existuje? (6 bodov)

RIEŠENIE. Číslo $z = 0$ rovnici (1) zrejme nevyhovuje, preto jej riešenie môžeme hľadať v goniometrickom tvare $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde $r > 0$, φ sú reálne čísla. Po dosadení do (1) dostaneme

$$2r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) + (1 + 3i)r^n = 1 + i,$$

čo je splnené vtedy a len vtedy, keď čísla r a φ vyhovujú sústave rovníc

$$r^n(2\cos n\varphi + 1) = 1,\quad r^n(2\sin n\varphi + 3) = 1\,. \tag{2}$$

Zo sústavy (2) dostaneme

$$r^n = \frac{1}{2\cos n\varphi + 1} = \frac{1}{2\sin n\varphi + 3}\,, \tag{3}$$

z čoho pre φ vyplýva rovnica

$$\cos n\varphi = \sin n\varphi + 1\,. \tag{4}$$

Každé riešenie rovnice (4) splňuje však aj vzťah

$$\cos^2 n\varphi = 1 + 2\sin n\varphi + \sin^2 n\varphi$$

čiže

$$\sin n\varphi(\sin n\varphi + 1) = 0\,. \tag{5}$$

Skúmajme teraz, ktoré z riešení rovnice (5) vyhovujú rovnici (4). Ak $\sin n\varphi = 0$, potom zo (4) dostaneme $\cos n\varphi = 1$ a z oboch týchto podmienok vyplýva $n\varphi = 2k\pi$, kde k je celé číslo. Riešeniami rovnice (4) sú teda čísla $\varphi_{1k} = \frac{2k\pi}{n}$, k celé číslo a po dosadení do (3) dostaneme $r_1 = \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$. Čísla r_1, φ_{1k} sú zrejme riešeniami sústavy (2) a príslušné riešenia rovnice (1) sú preto dané vzorcom

$$z_{1k} = \frac{1}{\sqrt[n]{3}}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k \text{ celé číslo.} \tag{6}$$

Ak $\sin n\varphi = -1$, potom zo (4) dostaneme $\cos n\varphi = 0$. Obom podmienkam vyhovujú len tie φ, pre ktoré $n\varphi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, kde k je celé. Riešenia rovnice (4) sú teda v tomto prípade $\varphi_{2k} = \frac{(4k+3)\pi}{2n}$ a pre r zo vzťahov (3) dostávame $r_2 = 1$. Dvojice r_2, φ_{2k} sú riešeniami sústavy (2) a príslušné riešenia rovnice (1) majú tvar

$$z_{2k} = \cos\frac{(4k+3)\pi}{2n} + \mathrm{i}\sin\frac{(4k+3)\pi}{2n}, \quad k \text{ celé číslo.} \tag{7}$$

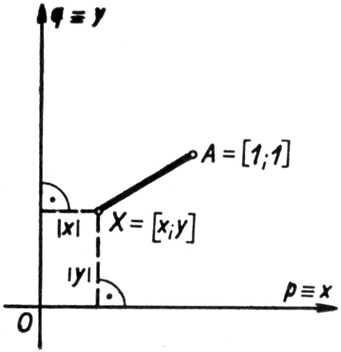
Keďže každé celé číslo k možno zapísať v tvare $k = qn + k_1$, kde q, $0 \leqq k_1 \leqq n-1$ sú celé čísla, je $\frac{2k\pi}{n} = 2q\pi + \frac{2k_1\pi}{n}$ a $\frac{(4k+3)\pi}{2n} = 2q\pi + \frac{(4k_1+3)\pi}{2n}$. Vzhľadom na periodičnosť funkcií sínus a kosínus je každým zo vzťahov (6) a (7) určených práve n rôznych komplexných čísel, ktoré dostaneme napr. pre

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Záver: Rovnica (1) má práve $2n$ rôznych riešení, ktoré sú určené vzťahmi (6) a (7) pre $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

2. V rovině jsou dány dvě navzájem kolmé přímky p, q a bod A, který má od obou z nich tutéž kladnou vzdálenost.

Vyšetřete geometrické místo bodů X, pro které vzdálenost AX se rovná součtu vzdáleností bodu X od přímek p, q. (Použijte metody souřadnic.) (7 bodů)



Obr. 28

ŘEŠENÍ. I. Přímky p, q zvolíme za osy kartézských souřadnic: $p \equiv x$, $q \equiv y$ (obr. 28). Osy orientujeme tak, aby bod A ležel uvnitř prvního kvadrantu, jednotku délky zvolíme tak, aby obě souřadnice bodu A byly rovny jedné.*)

Budiž $X = [x, y]$ proměnný bod hledaného geometrického místa bodů; podle podmínky úlohy je pak

$$|x| + |y| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \tag{1}$$

Rovnici (1) umocníme a upravíme; vyjde

$$|xy| + x + y = 1\,. \tag{2}$$

Rozlišíme dva případy: a) Leží-li bod X v I. nebo III. kvadrantě, je $xy \geqq 0$, tj. $|xy| = xy$; rovnice (2) pak zní

$$xy + x + y = 1\,, \tag{2'}$$

---

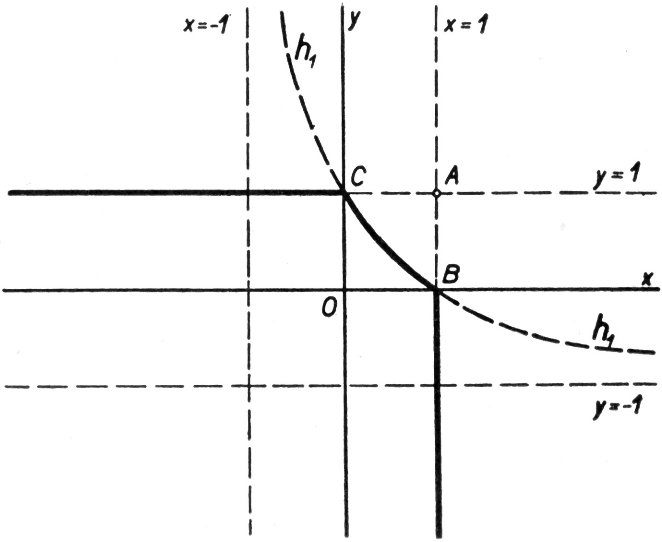
*) Volba souřadnic bodu A rovných jedné není nutná; pouze zjednodušuje výpočty.

neboli po úpravě

$$(x + 1)(y + 1) = 2\,. \tag{3}$$

Rovnice (3) vyjadřuje rovnoosou hyperbolu h_1, jejíž asymptoty jsou přímky $x = -1$, $y = -1$ a která protíná osu x, popřípadě y v bodě

$$B = [1; 0],\ \text{popř.}\ C = [0; 1]\,. \tag{4}$$



Obr. 29

Body X geometrického místa bodů náležejí jen těm obloukům hyperboly h_1, které leží v I. a III. kvadrantě (na obr. 29 tlustě vytaženy — větev ležící ve 3. kvadrantu není na obr. 29 nakreslena).

b) Leží-li bod X ve II. neb IV. kvadrantě, je $xy \leq 0$, tj. $|xy| = -xy$; rovnice (2) pak zní

$$xy - x - y + 1 = 0, \qquad (2'')$$

neboli

$$(x - 1)(y - 1) = 0. \qquad (5)$$

Rovnice (5) vyjadřuje dvojici kolmých přímek $x = 1$ a $y = 1$. Body X geometrického místa bodů náležejí ovšem jen těm částem přímek, které leží ve II. a ve IV. kvadrantu (na obr. 29 jsou tlustě vytaženy).

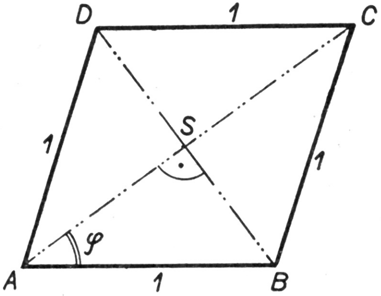
II. Zbývá dokázat, že každý bod tlustě vytažené čáry náleží vyšetřovanému místu bodů. Tak v případě a) platí-li pro souřadnice x, y rovnost (3), platí (2'); protože je $xy \geqq 0$, platí i (2) a tudíž i (1). Obdobně je tomu i v případě b).

3. Jedna pobočná hrana čtyřbokého jehlanu má délku x, všechny ostatní jeho hrany mají délku 1.

a) Vyjádřete objem jehlanu jako funkci proměnné x.

b) Určete, pro které x je objem co největší.

(6 bodů)

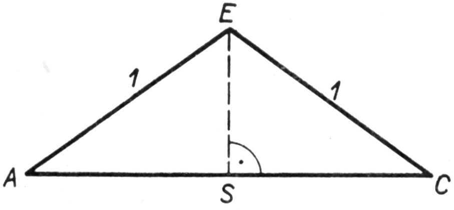


Obr. 30

ŘEŠENÍ. a) Podstava jehlanu $ABCDE$ je rovnostranný čtyřúhelník (obr. 30). Označme φ velikost ostrého úhlu CAB. Pak je $AS = CS = \cos\varphi$, $BS = DS = \sin\varphi$. Můžeme předpokládat, že hrana DE má délku x. Trojúhelník ACE je rovnoramenný (dvě protější pobočné hrany mají délku 1) — viz obr. 31. Protože je $\triangle ACB \cong \triangle ACE$ (*sss*), je patrně $SE = \sin\varphi$. Situaci v rovině

BDE ukazuje obr. 32. Zde je $DE = x$, $BE = 1$. Protože bod *E* leží na Thaletově kružnici se středem *S* a poloměrem $\sin \varphi$, je $\sphericalangle$ *DEB* pravý, tj. platí

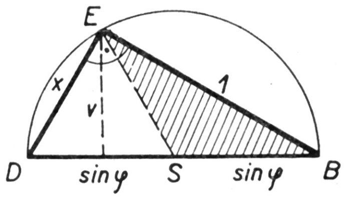
$$1 + x^2 = 4 \sin^2 \varphi \, . \tag{1}$$



Obr. 31

Výšku v trojúhelníka *BSE* na stranu *BS* vypočteme pomocí obsahu; je

$$v \, . \sin \varphi = \frac{x}{2} \, ,$$



Obr. 32

tj.

$$v = \frac{x}{2 \sin \varphi} \tag{2}$$

Protože obsah čtyřúhelníka *ABCD* je $\sin 2\varphi$, je objem y jehlanu *ABCDE*

$$y = \frac{1}{3} \sin 2\varphi \, . \, \frac{x}{2 \sin \varphi} = \frac{1}{3} x \cos \varphi \tag{3}$$

Dále vypočteme z (1)

$$4 \cos^2 \varphi = 4 - 4 \sin^2 \varphi = 4 - (1 + x^2) = 3 - x^2 ;$$

odtud plyne $2 \cos \varphi = \sqrt{3 - x^2}$.

Dosadíme-li do (3), vyjde

$$y = \frac{x}{6}\sqrt{3 - x^2}\,, \tag{4}$$

což je výsledný vzorec.

b) y je maximální právě tehdy, je-li maximální $36y^2$, tj. $x^2(3 - x^2)$. Součin dvou čísel (x^2, $3 - x^2$), jejichž součet je číslo 3, je maximální právě tehdy, jsou-li obě čísla sobě rovna, tj. je-li

$$x^2 = 3 - x^2\,.$$

Odtud plyne $2x^2 = 3$, neboli

$$x = \sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

Objem je pak

$$y_{\max} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{3 - \frac{3}{2}} = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25\,.$$

Zajímavé je, že maximální objem nemá pravidelný čtyřboký jehlan, jehož všecky hrany mají délku 1. Tento jehlan má totiž výšku $\frac{1}{\sqrt{2}}$ a jeho objem je

$$y = \frac{1}{3}\,.\,1\,.\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{6}\sqrt{2} = 0{,}236 < \frac{1}{4}\,.$$

JINÉ ŘEŠENÍ. a) Budiž $ABCDV$ daný jehlan s podstavou $ABCD$ a nechť $AV = x$; ostatní hrany mají tedy délku 1. Zřejmě je $ABCD$ rovnostranný čtyřúhelník (kosočtverec, příp. čtverec) se stranami délky 1. Budiž S průsečík jeho úhlopříček. Poněvadž $AB = VB = CB = 1 = AD = VD = CD$, leží body A, V, C na kružnici, jež je průsečnicí jednotkových kulových ploch se středy B, resp. D. Přitom AC je průměrem této kružnice, neboť střed úsečky AC je totožný se středem úsečky BD. Trojúhelník ACV je tedy pravoúhlý, s přeponou AC a odvěsnami AV a CV. Jest $AV = x$, $CV = 1$, tedy $AC = \sqrt{1 + x^2}$. Také trojúhelník ASB je pravoúhlý s přeponou AB délky 1 a s odvěsnami AS a SB, takže délku odvěsny SB dostaneme opět podle Pythagorovy věty $SB = \sqrt{AB^2 - AS^2}$, tedy

$$SB = \sqrt{1 - \frac{1 + x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3 - x^2}\,.$$

Jehlan $ABCDV$ si můžeme představit složený ze dvou shodných trojbokých jehlanů $ABCV$ a $ADCV$, se společnou podstavou ACV a výškou SB, resp. SD. Pro objem jehlanu $ABCDV$ tak dostáváme vyjádření:

$$V = 2\,.\,\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3 - x^2} = \frac{1}{6}\,x\sqrt{3 - x^2}\,.$$

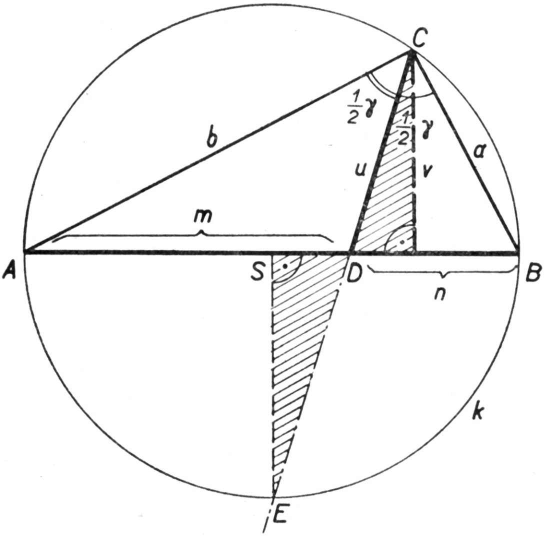
b) Stanovení maximálního objemu je stejné jako v prvním řešení: součin $x^2(3 - x^2)$ bude maximální při $x^2 = 3 - x^2$, tzn. pro $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$; maximální objem je pak roven $\frac{1}{4}$.

4. Pravoúhlý trojúhelník ABC má přeponu $AB = c$; D je takový bod přepony, že polopřímka CD je osa pravého úhlu.

Vyjádřete výšku v na přeponu AB pomocí délek $c = AB$, $u = CD$. Jaký vztah mezi c a u je podmínkou, aby trojúhelník ABC existoval? (6 bodů)

ŘEŠENÍ (obr. 33).

a) Označme $m = AD$, $n = BD$; podle kosinové věty pro trojúhelníky ACD, BCD platí



Obr. 33

$$n^2 = a^2 + u^2 - 2au \cos \frac{\gamma}{2}, \qquad m^2 = b^2 + u^2 - 2bu \cos \frac{\gamma}{2}. \tag{1}$$

Pro tytéž trojúhelníky dostaneme ze sinové věty

$$m = \frac{b}{a} \cdot n\,. \tag{2}$$

Dosadíme z (2) do druhé rovnice (1) a po úpravě vyjde

$$b^2n^2 = a^2b^2 + a^2u^2 - 2a^2bu \cos \frac{\gamma}{2} . \tag{3}$$

První rovnici (1) násobíme číslem b^2 a dostaneme

$$b^2n^2 = a^2b^2 + b^2u^2 - 2ab^2u \cos \frac{\gamma}{2} . \tag{4}$$

Odečtením (3) a (4) vyjde

$$(a^2 - b^2)u^2 = 2abu \cos \frac{\gamma}{2} . (a - b) . \tag{5}$$

Je-li $a \neq b$, plyne z (5)

$$(a + b)u = 2ab \cos \frac{\gamma}{2} = ab\sqrt{2} , \tag{6}$$

neboť $\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník ABC máme

$$c^2 = a^2 + b^2 . \tag{7}$$

Ze vzorců pro obsah trojúhelníka dostaneme

$$ab = cv . \tag{8}$$

Ze (6), (7) a (8) eliminujeme a, b; vyjde

$$2c^2v^2 - 2cu^2v - c^2u^2 = 0 . \tag{9}$$

Rovnice (9) má jediné kladné řešení

$$v = \frac{u + \sqrt{u^2 + 2c^2}}{2c} . u . \tag{10}$$

Sestrojme nyní pravoúhlý trojúhelník s přeponou c a výškou (na přeponu) v, danou vzorcem (10); označme v něm u_1 příslušnou úsečku na ose úhlu γ. Podle předchozího je pak

$$v = u_1 \frac{u_1 + \sqrt{u_1^2 + 2c^2}}{2c} . \tag{11}$$

Porovnáním (10) a (11) zjistíme, že nutně $u_1 = u$.

Vzorec (10) platí i v případě, že $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}} . c$.

b) Je-li dáno c, u, je úloha řešitelná právě tehdy, jestliže $v \leqq \frac{1}{2} c$, tj. podle (10)

$$\frac{u + \sqrt{u^2 + 2c^2}}{2c} . u \leqq \frac{1}{2} c .$$

Odtud

$$u^2 + u \sqrt{u^2 + 2c^2} \leqq c^2 ,$$

neboli

$$u \sqrt{u^2 + 2c^2} \leqq c^2 - u^2$$

a dále

$$u^4 + 2c^2u^2 \leqq c^4 - 2c^2u^2 + u^4 ,$$

tj.

$$4c^2u^2 \leqq c^4 ,$$

tj.

$$u \leqq \frac{c}{2} .$$

To je hledaná podmínka řešitelnosti úlohy.

Ke konstrukci trojúhelníka ABC z daných c, u se s výhodou použije známé vlastnosti osy úhlu (viz obr. 33). Označíme-li E průsečík polopřímky CD s kružnicí k (nad průměrem AB), jest

$$\sphericalangle ACE = \sphericalangle ABE = \frac{1}{2} \gamma$$

a obdobně

$$\sphericalangle ECB = \sphericalangle EAB = \frac{1}{2}\gamma .$$

Trojúhelník ABE je tedy rovnoramenný a bod E leží na ose strany AB. Sestrojíme bod D tak, že vypočteme délku $x = DE$. Z podobnosti vyšrafovaných trojúhelníků totiž plyne $x = \dfrac{uc}{2v}$, tj.

$$x = \frac{c^2}{u + \sqrt{u^2 + 2c^2}} ;$$

tuto délku lze snadno sestrojit z daných c, u.

2. *KATEGORIE B*

1. Budiž $l \geqq 3$ přirozené číslo. Dokažte, že součin

$$l(l+1)(l+2)\ldots(3l-4)(3l-3) \qquad (1)$$

je dělitelný druhou mocninou každého přirozeného čísla $m \leqq l$. (5 bodů)

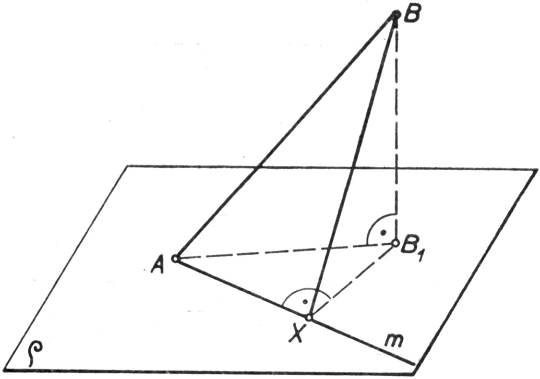
ŘEŠENÍ. Součin (1) obsahuje $(3l - 3) - (l - 1) = 2l - 2$ za sebou následujících přirozených čísel. Stačí dokázat, že tento součin obsahuje aspoň dva násobky čísla m.

a) Je-li $m = l$, je $2l$ mezi těmito čísly (neboť $2l - 2 > l$ vzhledem k předpokladu $l \geqq 3$). Proto obsahuje součin (1) činitele l i $2l$; je tedy násobkem čísla l^2.

b) Je-li $m < l$, tj. $m \leqq l - 1$, obsahuje součin (1) aspoň dva násobky čísla m, neboť $2l - 2 = 2(l - 1) \geqq 2m > m$. Proto i v tomto případě je součin (1) násobkem čísla m.

2. Je dána rovina ϱ, v ní bod A a mimo ni bod B; přímka AB není kolmá k rovině ϱ. Bod X se pohybuje v rovině ϱ tak, že $\sphericalangle AXB$ je a) pravý, b) tupý, c) ostrý. Určete množinu těžišť všech trojúhelníků ABX, které tak vzniknou. (6 bodů)

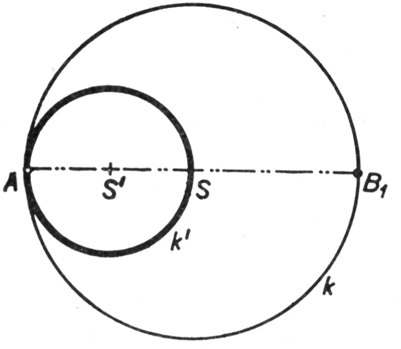
ŘEŠENÍ (obr. 34). a) Označme B_1 patu kolmice vedené bodem B na rovinu ϱ. Veďme bodem A v rovině



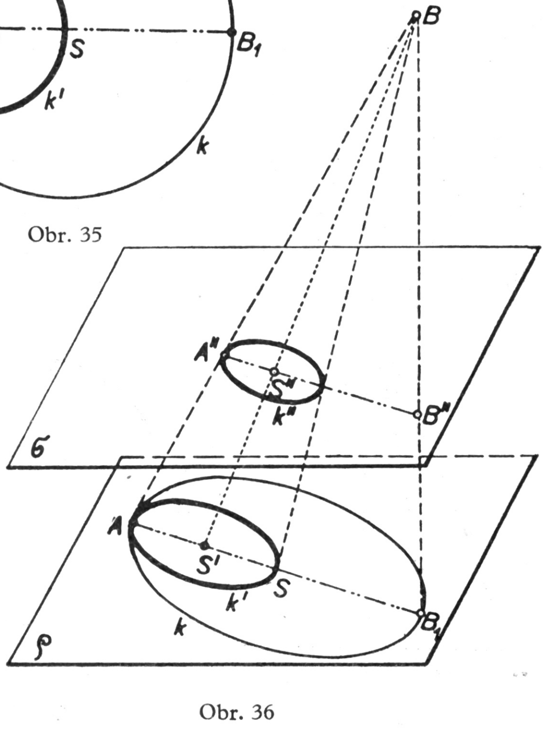
Obr. 34

ϱ libovolnou přímku m. Protože je $BB_1 \perp \varrho$, mají kolmice spuštěné z bodů B a B_1 na přímku m tutéž patu X. Body X vyplní tedy kružnici k sestrojenou v rovině ϱ nad průměrem AB_1, z níž je vyloučen bod A (je-li $X \equiv A$, nevznikne totiž $\sphericalangle AXB$). Množina středů Y všech stran AX je kružnice k', která je obrazem k v stejnolehlosti se středem A a konstantou $\frac{1}{2}$; z kružnice k' je ovšem také třeba vyloučit bod A (obr. 35). Těžiště Z každého trojúhelníka ABX leží na úsečce BY, a to tak, že $BZ =$

$= \frac{2}{3} BY$. Body Z vyplní tedy kružnici k'', která leží v rovině $\sigma \parallel \varrho$; σ dělí úsečku BB_1 v poměru $2:1$. Střed S'' kružnice k'' náleží úsečce BS' (obr. 36). Poloměr



Obr. 35



Obr. 36

kružnice k'' je $\frac{2}{3} AS' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} AS = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} AB_1 =$ $= \frac{1}{6} AB_1$. Z kružnice k'' je třeba vyloučit bod, který je průsečíkem úsečky AB s rovinou σ.

b), c) Je-li bod U *uvnitř* kruhu k, platí podle věty o vnějším úhlu pravoúhlého trojúhelníka (UBX)

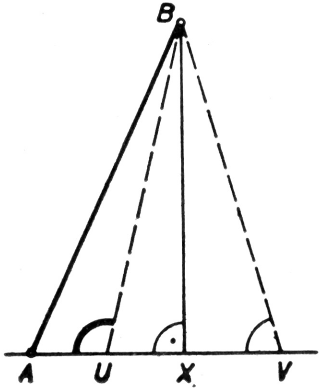
$$\sphericalangle AUB > \sphericalangle AXB = 90°, \tag{1}$$

tj. $\sphericalangle AUB$ je tupý (obr. 37). Je-li bod V *vně* kruhu k, platí podle věty o pravoúhlém trojúhelníku (BXV)

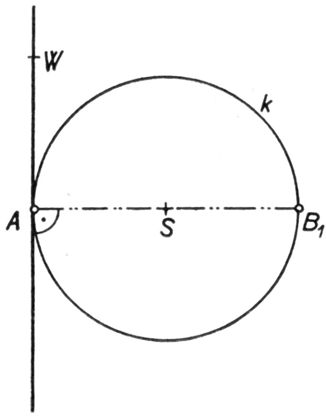
$$\sphericalangle AVB < 90°, \tag{2}$$

tj. $\sphericalangle AVB$ je ostrý (obr. 37). Nerovnost (2) platí evidentně i v případě, když bod W leží na tečně sestrojené v bodě A ke kružnici k (obr. 38).

Ze vztahů (1), (2) vyplývá, že hledaná množina bodů je v případě b) vnitřek kruhu k'', v případě c) jeho vnějšek.



Obr. 37



Obr. 38

3. Určite všetky kladné hodnoty parametra a, pre ktoré má sústava rovníc

$$|x - a| + a = |x| + |y|, \qquad (1)$$
$$x + 2y = 2$$

s neznámymi x, y práve tri riešenia.

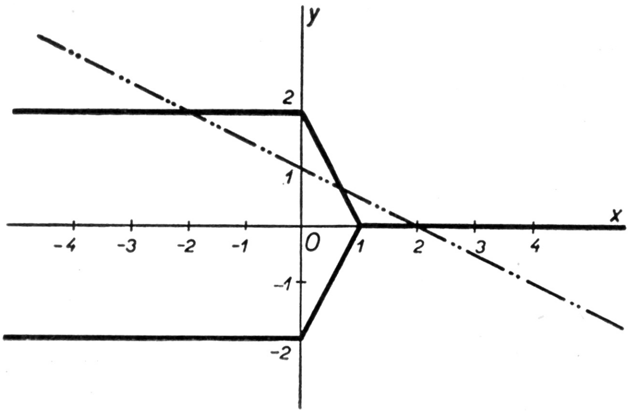
(*Návod:* Zostrojte graf prvej rovnice sústavy (1) napr. pre $a = 1$). (7 bodov)

RIEŠENIE. Graf prvej rovnice sústavy (1) zostrojíme tak, že vyšetríme grafy funkcií

$$y = |x - a| + a - |x|, \qquad (2)$$
$$y = -|x - a| - a + |x| \qquad (3)$$

a utvoríme ich zjednotenie. Pri vyšetrovaní každého z týchto dvoch grafov rozdelíme množinu všetkých reálnych čísel x na tri intervaly:

I. $x \leqq 0$; II. $0 \leqq x \leqq a$; III. $x \geqq a$.



Obr. 39

Funkcia (2) je v týchto intervaloch určená v uvedenom poradí vzťahmi: I. $y = 2a$; II. $y = 2(a - x)$; III. $y = 0$. Funkcia (3) je zasa v uvedených intervaloch určená vzťahmi: I. $y = -2a$; II. $y = 2(x - a)$; III. $y = 0$. Grafické znázornenie prvej rovnice sústavy (1) je pre $a = 1$ na obr. 39. Na obr. 39 je zároveň prerušovanou čiarou znázornená priamka p, ktorá je grafom druhej rovnice sústavy (1). Obrázok nám napovedá, že v tomto prípade má sústava (1) tri riešenia. Ľahko vypočítame, že sú to dvojice reálnych čísel $[-2; 2]$, $\left[\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right]$ a $[2; 0]$.

Ak riešime druhú rovnicu sústavy (1) so šiestimi rovnicami, ktorými sme vyjadrili v intervaloch I., II., III. prvú rovnicu (1), dostaneme:

pre interval I.: $x = 2(1 - 2a)$, $x = 2(1 + 2a)$,

pre interval II.: $x = \dfrac{4a - 2}{3}$, $x = \dfrac{4a + 2}{5}$,

pre interval III.: $x = 2$.

Druhý vzťah pre I. nedáva nikdy riešenie, pretože je $2(1 + 2a) > 0$, zatiaľ čo prvý vzťah pre I. dáva riešenie len pre $1 - 2a \leqq 0$, t. j. pre

$$a \geqq \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Prvý vzťah pre II. dáva riešenie len pre $0 \leqq \dfrac{4a - 2}{3} \leqq a$, t. j. pre

$$\frac{1}{2} \leqq a \leqq 2. \tag{5}$$

Druhý vzťah pre II. dáva riešenie len pre $0 \leqq \dfrac{4a + 2}{5} \leqq$ $\leqq a$, t. j. pre

$$a \geqq 2. \tag{6}$$

Vzťah pre III. je riešením sústavy len pre

$$a \leqq 2 . \tag{7}$$

Zo vzťahov (4), (5), (6) a (7) je zrejmé, že pre $0 < a < \frac{1}{2}$ má sústava (1) len jediné riešenie (pozri (7), a to [2; 0].

Pre $a = \frac{1}{2}$ má sústava (1) dve riešenia (pozri (4), (5), (7)), a to [0; 1], [2; 0].

Pre $\frac{1}{2} < a < 2$ má sústava (1) tri riešenia (pozri (5), (4), (7)), a to $[2(1 - 2a); 2a]$, $\left[\frac{1}{3}(4a - 2); \frac{2}{3}(2 - a)\right]$, [2; 0].

Pre $a = 2$ má sústava (1) dve riešenia (pozri (4), (5), (6), (7)), a to: $[-6; 4]$, $[2; 0]$.

Konečne pre $a > 2$ má sústava (1) taktiež dve riešenia (pozri (4), (6)), a to $[2(1 - 2a); 2a]$,

$$\left[\frac{1}{5}(4a + 2); \ \frac{2}{5}(2 - a)\right].$$

Tri riešenia má sústava (1) teda práve vtedy, keď platí $\frac{1}{2} < a < 2$.

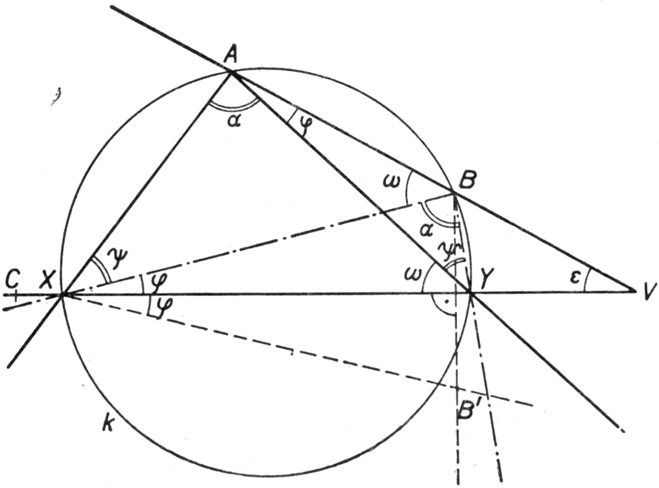
4. Je dán úhel $\sphericalangle AVC = \varepsilon$, kde $0 < \varepsilon \leqq 90^\circ$ a dále druhý úhel velikosti α. Uvnitř úsečky AV leží další bod B.

Na polopřímce VC sestrojte body X, Y tak, aby platilo

$$\sphericalangle XAY = \sphericalangle XBY = \alpha . \tag{1}$$

(6 bodů)

ŘEŠENÍ. *Rozbor.* Na obr. 40 je znázorněno předpokládané řešení úlohy: platí tedy vztah (1) a podle věty o shodných obvodových úhlech velikosti α nad tětivou XY leží body A, B, X a Y na téže kružnici k (uvažujme



Obr. 40

pořadí bodů na kružnici A, B, Y, X jako na obr. 40). Proto také platí

$$\sphericalangle YAB = \sphericalangle YXB = \varphi\,, \tag{2}$$
$$\sphericalangle AXB = \sphericalangle AYB = \psi\,, \tag{3}$$
$$\sphericalangle AYX = \sphericalangle ABX = \omega\,. \tag{4}$$

S použitím vztahů (1) až (4) dostaneme pro součet vnitřních úhlů čtyřúhelníka $ABYX$

$$2(\alpha + \varphi + \psi + \omega) = 360°\,. \tag{5}$$

Podle věty o vnějším úhlu ω trojúhelníka XVB

$$\omega = \varphi + \varepsilon ;$$

odtud dosazením do (5) dostaneme

$$\alpha + 2\varphi + \psi + \varepsilon = 180° ,$$

čili

$$2\varphi + \psi = 180° - (\alpha + \varepsilon) ; \tag{6}$$

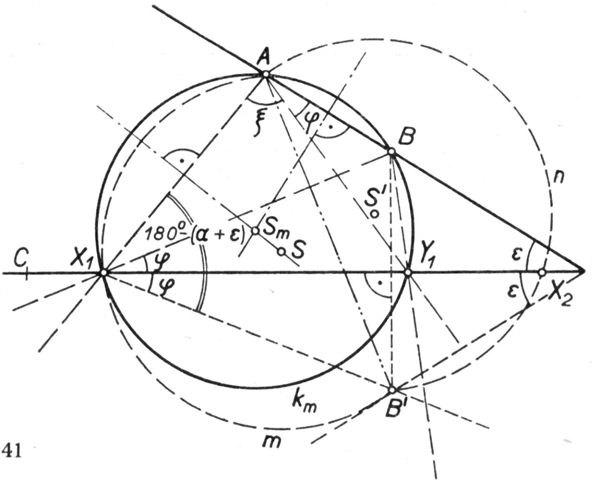
úhel $2\varphi + \psi$ je tedy z daných podmínek sestrojitelný a dostaneme jej jako úhel $\sphericalangle AXB'$, kde B' je bod souměrně sdružený s bodem B podle přímky VC. Odtud už plyne *konstrukce*.

1. Sestrojíme bod B' souměrně sdružený s bodem B podle přímky CV.

2. Nad úsečkou AB' jako tětivou sestrojíme množinu všech bodů X, pro něž platí

$$\sphericalangle AXB' = 2\varphi + \psi = 180° - (\alpha + \varepsilon);$$

tuto množinu tvoří dva kruhové oblouky m, n (obr. 41).



Obr. 41

3. Každý z těchto oblouků protne přímku VC (neboť body A, B' jsou odděleny touto přímkou) v hledaném bodě X_1, popř. X_2 (pokud leží na polopřímce VC).

4. Průsečík polopřímky VC s kružnicí opsanou trojúhelníku ABX_1, popř. ABX_2 je druhý hledaný bod Y_1, popř. Y_2.

Zkouška. a) pro řešení X_1, Y_1 (viz obr. 41). Kružnice k_m opsaná trojúhelníku ABX_1 vždy protne polopřímku VC v dalším bodě Y_1; kdyby totiž bylo $X_1 = Y_1$, dutý úhel $\sphericalangle X_1AY_1$ by byl nulový, avšak $\alpha \neq 0$ podle předpokladu. Bod Y_1 leží na polopřímce VC proto, že dvě přímky, obsahující dvě různé tětivy této kružnice, se protnou buď ve vnějším bodě obou tětiv (tj. náš případ), nebo ve vnitřním bodě tětiv.

Dokážeme, že úhel $\sphericalangle X_1AY_1 = \xi$ má danou velikost α. Protože body A, B, Y_1, X_1 leží na kružnici k_m, platí

$$\sphericalangle BAY_1 = \sphericalangle BX_1Y_1 = \sphericalangle Y_1X_1B' = \varphi .$$

Potom pro součet vnitřních úhlů trojúhelníka X_1VA platí

$$180^\circ - (\alpha + \varepsilon) - \varphi + \varepsilon + \xi + \varphi = 180^\circ ,$$

čili

$$\xi = \alpha ;$$

potom také úhel $\sphericalangle X_1BY_1 = \alpha$.

b) Pro řešení X_2, Y_2, pokud existuje, proběhne zkouška obdobně, pouze pořadí bodů na kružnici k je A, B, X_2, Y_2.

Diskuse. Konstrukce a řešení a) je proveditelné vždy právě tehdy, je-li $\alpha + \varepsilon < 180^\circ$ (viz 2. bod konstrukce).

Řešení typu b) dostaneme jen tehdy, jestliže oblouk n protne polopřímku VC ve vnitřním bodě X_2. To nastane právě tehdy, je-li

$$\sphericalangle AXB' > \sphericalangle AVB' ,$$

tj.

$$180^\circ - (\alpha + \varepsilon) > 2\varepsilon ,$$

čili $$180^\circ > \alpha + 3\varepsilon\,.$$

Shrnutí. Platí-li
$$\alpha + 3\varepsilon < 180^\circ\,,$$
má úloha dvě řešení (při uvažovaných pořadích bodů A, B, X, Y na kružnici k), platí-li
$$\alpha + 3\varepsilon \geqq 180^\circ > \alpha + \varepsilon\,,$$
má řešení jediné. Pro $\alpha + \varepsilon \geqq 180^\circ$ řešení neexistuje.

3. KATEGORIE C

1. Je dán vypuklý pětiúhelník, kterému lze vepsat kružnici.

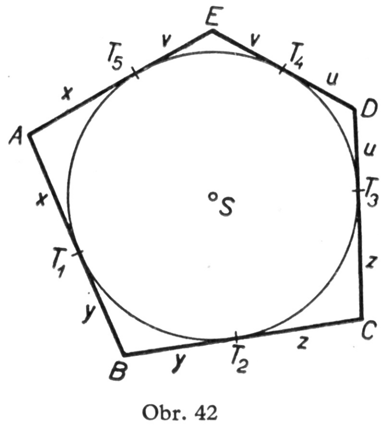
a) Dokažte větu: Jestliže všechny strany mají celočíselné velikosti a obvod je sudé číslo, potom také všechny úsečky na jeho stranách, omezené vrcholy a dotykovými body, mají celočíselné délky.

b) Je možno větu obrátit?

(6 bodů)

ŘEŠENÍ. a) Velikosti úseček na stranách pětiúhelníka označme podle obr. 42 písmeny x, y, z, u, v. Jsou-li a, b, c, d, e po řadě velikosti stran AB, BC, CD, DE a EA, dostaneme rovnosti

$$\begin{aligned} x + y &= a\,,\\ y + z &= b\,,\\ z + u &= c\,, \qquad (1)\\ u + v &= d\,,\\ v + x &= e\,. \end{aligned}$$



Obr. 42

Po výpočtu z rovnic (1) dostaneme např.

$$2x = a - b + c - d + e$$

čili

$$x = \frac{a + b + c + d + e}{2} - b - d\,. \qquad (2)$$

Obdobně získáme

$$y = \frac{o}{2} - c - e\,, \qquad (3)$$

$$z = \frac{o}{2} - d - a\,, \qquad (4)$$

$$u = \frac{o}{2} - e - b\,, \qquad (5)$$

$$v = \frac{o}{2} - a - c\,. \qquad (6)$$

Protože velikost obvodu podle předpokladů je sudé číslo, velikosti stran a, b, c, d, e jsou celočíselné, plyne z rovnic (2) až (6), že i délky úseků x, y, z, u, v jsou celočíselné.

b) Obrácená věta zní: Jestliže všechny úsečky na stranách vypuklého pětiúhelníka, omezené vrcholy a dotykovými body vepsané kružnice, mají celočíselné délky, potom délky stran jsou celočíselné a obvod je sudé číslo.

Věta je zřejmě správná; první tvrzení o celočíselnosti délek stran plyne bezprostředně z rovnic (1). Druhé tvrzení dokážeme sečtením rovnic (1); dostaneme rovnost

$$2(x + y + z + u + v) = a + b + c + d + e,$$

z níž je zřejmé, že velikost obvodu je sudé číslo.

2. V 8 hodin ráno vyjel cyklista z A do B ($AB = 50$ km). Když ujel 10 km, předjelo ho auto, které vyjelo z A v 8 hodin 25 minut. Tento automobilista dojel do B, tam se zdržel 1 hodinu 15 minut a potom se opět vracel do A. Zpáteční cesta mu trvala o třetinu kratší dobu než cesta do B. Našeho cyklistu potkal 5 kilometrů před B. (Všechny jízdy byly rovnoměrné pohyby.)

V kolik hodin se automobilista vrátil do A?

(5 bodů)

ŘEŠENÍ. Označme v_1 a v_2 po řadě rychlosti v km/h cyklisty a auta na cestě do B. Ze setkání 10 km za A plyne rovnice

$$\frac{10}{v_1} = \frac{10}{v_2} + \frac{25}{60}, \tag{1}$$

ze setkání před B rovnice

$$\frac{25}{60} + \frac{50}{v_2} + \frac{5}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{v_2} = \frac{45}{v_1}. \tag{2}$$

Položíme-li

$$\frac{1}{v_1} = x, \quad \frac{1}{v_2} = y,$$

dostaneme spojením (1) a (2) soustavu rovnic o neznámých x, y:

$$10x - 10y = \frac{5}{12},$$

$$45x - \frac{160}{3} y = \frac{5}{3}.$$

Soustava (3) má řešení

$$x = \frac{1}{15}, \quad y = \frac{1}{40},$$

o čemž se snadno přesvědčíme *zkouškou*. Rychlost cyklisty byla tudíž 15 km/h a rychlost auta na cestě do B 40 km/h.

Automobilista byl na cestě celkem

$$\frac{50}{40} + \frac{5}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{50}{40} = \frac{10}{3}$$

hodiny, tj. 3 h 20 min, takže se do A vrátil v 11 h 45 min, o čemž se přesvědčíme zkouškou.

Zkouška. Auto se vrátilo do A v 11 h 45 min, tj. automobilista byl na cestě 3 h 20 min. Z toho na jízdy připadá 2 h 5 min. Zpáteční cesta do A mu trvala o $\frac{1}{3}$ méně než z A do B; dojel tedy z A do B za $\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{125}{60}\right)$ min $=$ 1 h 15 min.

Z toho se snadno vypočte, že při jízdě z A do B byla rychlost auta 40 km/h, při návratu 60 km/h. Cyklistu předjel na 10. km v (8 h 25 min $+ \frac{10}{40}$ h) $=$ 8 h 40 min, tj. cyklista za 40 min ujel 10 km, tj. jel rychlostí 15 km/h. 5 km před B je tudíž cyklista v (8 h $+ \frac{45}{15}$ h) $=$ 11 h. Automobilista je na tomtéž místě skutečně také v 8 h 25 min $+ \frac{50}{40}$ h $+$ 1 h 15 min $+$ $\frac{5}{60}$ h $=$ 11 h.

POZNÁMKA. Za neznámé by bylo možno také zvolit doby t_1 a t_2, které potřebuje cyklista a auto k dojetí do B. Je to však asi pro žáky méně obvyklé.

3. Je daná sústava troch rovníc

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= a\,, \\ 3x + y + 2z &= 2a - 11\,, \\ 2x + 3y + z &= a + 1 \end{aligned}$$

s neznámymi x, y, z a parametrom a. Určite všetky hodnoty parametra a, pre ktoré má daná sústava riešenie týchto vlastností: x, y, z sú celé čísla a žiadne dve z nich nedávajú pri delení troma ten istý zvyšok.

RIEŠENIE. Danú sústavu budeme riešiť obvyklým spôsobom: z druhej a tretej rovnice a potom z prvej a tretej rovnice vylúčime z. Dostaneme

$$x + 5y = 13\,,$$
$$5x + 7y = 2a + 3\,. \tag{1}$$

Z rovníc (1) vypočítame

$$y = \frac{1}{9}(31 - a), \qquad x = \frac{1}{9}(5a - 38). \tag{2}$$

Ak dosadíme z (2) do tretej rovnice danej sústavy, dostaneme

$$z = \frac{1}{9}(2a - 8)\,. \tag{3}$$

Skúškou sa presvedčíme, že čísla x, y, z dané vzťahmi (2) a (3) sú v obore reálnych čísel skutočne riešením danej sústavy.

Ak hľadáme riešenie sústavy v obore celých čísel, musí byť zrejme a tiež číslo celé a z prvého vzťahu (2) vidíme, že musí byť číslo $31 - a$ násobkom deviatich. Ako je známe, číslo a sa dá vyjadriť práve v jednom z nasledujúcich tvarov

$$9k,\ 9k + 1,\ 9k + 2,\ 9k + 3,\ 9k + 4,\ 9k + 5,\ 9k + 6,$$
$$9k + 7,\ 9k + 8, \tag{4}$$

kde k je vhodné celé číslo. Ak dosadíme zo (4) do vzťahu (2) pre y, zistíme, že y je celé jedine v prípade, keď platí

$$a = 9k + 4\,. \tag{5}$$

[Napr. pre $k = 1$ má daná sústava riešenie $x = 3$, $y = z = 2$.]

Po dosadení z (5) do (2) a (3) vypočítame

$$x = 5k - 2,\ y = 3 - k,\ z = 2k\,. \tag{6}$$

Zo (6) však vyplýva $y - z = 3 - 3k = 3(1 - k)$, čo znamená, že číslo $y - z$ je deliteľné troma, čiže čísla y a z dávajú pre každé celé k, a teda aj pre každé prípustné celé a ten istý zvyšok pri delení troma.

Neexistuje teda žiadne a, ktoré by vyhovovalo podmienkam úlohy.

4. Je dána úsečka AB a její vnitřní bod C. Nad průměrem AC je sestrojena kružnice k_0, bodem B je vedena přímka p kolmá k AB. Budiž k kružnice, která protíná kružnici k_0 v bodech X, Y a přímku p v bodech X', Y'.

Leží-li body A, X, X' v přímce, leží také body A, Y, Y' v přímce; dokažte. (7 bodů)

ŘEŠENÍ (obr. 43). Nechť body A, X, X' leží v přímce. Označme Y'' průsečík přímek AY, p. Je-li $X \equiv C$, je $X' \equiv B$ a platí

$$AX\,.\,AX' = AB\,.\,AC \tag{1}$$

Je-li $X \not\equiv C$, vznikne $\triangle\ ACX$ ($\triangle\ ABX'$) a podle Thaletovy věty je $\sphericalangle\ AXC$ pravý. Proto platí

$$\triangle\ AXC \sim \triangle\ ABX' \quad (uuu)$$

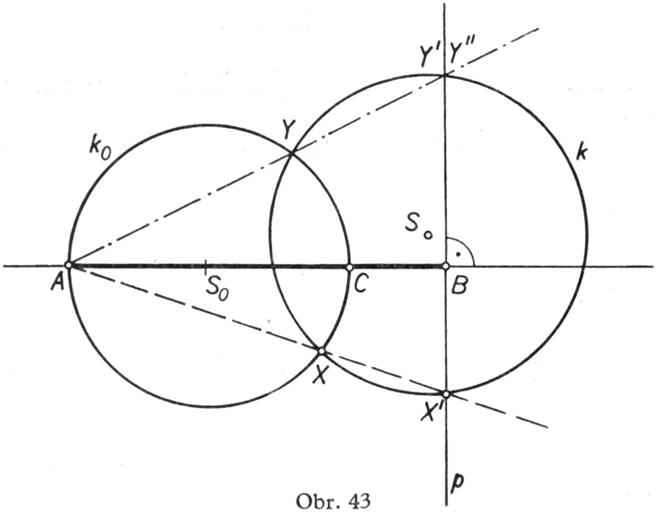
a odtud

$$\frac{AX}{AC} = \frac{AB}{AX'}$$

čili opět platí (1). Z obdobného důvodu platí

$$AY\,.\,AY'' = AB\,.\,AC. \tag{2}$$

Porovnáním (1), (2) dostaneme $AX\,.\,AX' = AY\,.\,AY''$,



Obr. 43

neboli
$$\frac{AX}{AY} = \frac{AY''}{AX'} \,. \tag{3}$$

Z (3) vyplývá
$$\triangle AXY'' \sim \triangle AYX' \qquad \left(\frac{s}{s}\ u\ \frac{s}{s}\right)$$

a odtud
$$\sphericalangle AY''X = \sphericalangle AX'Y \,,$$

neboli
$$\sphericalangle YY''X = \sphericalangle XX'Y \,. \tag{4}$$

Protože oba body X', Y'' leží *vně* k_0 (na přímce p), a tedy v téže polorovině určené přímkou XY, plyne z obrácení věty o obvodových úhlech, že bod Y'' leží na k. Je tedy $Y'' \in k \cap p$, tj. $Y'' = Y'$.

Tím je věta dokázána, neboť body A, Y, Y' leží v přímce.

4. *KATEGORIE D*

1. Určete všechny dvojice celých čísel x, y, pro které platí

$$4x^2 - 4x - y^2 = 20 \,. \tag{1}$$

ŘEŠENÍ. Rovnici (1) upravíme na tvar

$$(2x - 1)^2 - y^2 = 21 \,. \tag{2}$$

Levou stranu poslední rovnice rozložíme pomocí vzorce pro rozdíl čtverců. Dostáváme

$$(2x + y - 1)(2x - y - 1) = 21 \,.$$

Číslo 21 lze rozložit v tyto součiny celých čísel:

$$1 \,.\, 21 = 3 \,.\, 7 = (-1) \,.\, (-21) = (-3) \,.\, (-7).$$

Sestavíme tabulku:

$2x + y - 1$	1	21	−1	−21	3	7	−3	−7
$2x - y - 1$	21	1	−21	−1	7	3	−7	−3
x	6	6	−5	−5	3	3	−2	−2
y	−10	10	10	−10	−2	2	2	−2

Každá z 8 dvojic čísel x, y je řešením úlohy, jak se přesvědčíme *zkouškou.*

2. Určite všetky čísla a, pre ktoré koreň rovnice

$$a(x - 2) + x - 5 = 0 \tag{1}$$

s neznámou x vyhovuje rovnici

$$x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0\,. \tag{2}$$

RIEŠENIE. Najprv riešme rovnicu (1). Po úprave dostaneme

$$(a + 1)x = 2a + 5\,.$$

Ak $a \neq -1$, potom má rovnica (1) riešenie

$$x = \frac{2a + 5}{a + 1}\,, \tag{3}$$

ako sa presvedčíme skúškou. Pre $a = -1$ rovnica riešenie nemá.

Číslo x dané vzorcom (3) za predpokladu $a \neq -1$ má vyhovovať tiež rovnici (2), t. j. má platiť

$$\left(\frac{2a + 5}{a + 1}\right)^3 - 7\left(\frac{2a + 5}{a + 1}\right)^2 + 7 \,.\, \frac{2a + 5}{a + 1} + 15 = 0\,. \tag{4}$$

Tým sme dostali rovnicu pre neznámu a.

Z rovnice (4) po vynásobení výrazom $(a + 1)^3 \neq 0$ a úprave dostaneme rovnicu

$$a^3 - 4a = 0\,,$$

ktorú možno písať v tvare

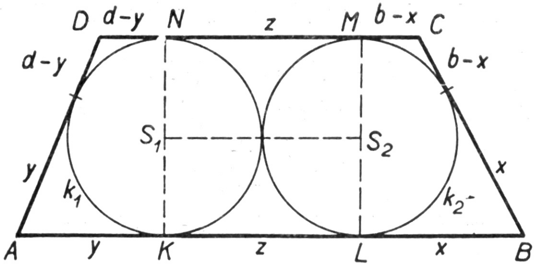
$$a(a - 2)(a + 2) = 0\,,$$

z čoho vyplýva, že je buď $a = 0$, alebo $a = 2$, alebo $a = -2$. *Skúškou* sa presvedčíme, že danej úlohe vyhovujú všetky tri tieto čísla, t. j. úloha má tri riešenia: $a = -2$, $a = 0$, $a = 2$.

3. Do lichobežníka $ABCD$ sú vpísané kružnice k_1, k_2, ktoré sa dotýkajú strán a, c, d a a, c, b (pozri obr. 44). Pre dĺžky strán lichobežníka platí: $a + c > b + d$.

Dokážte vetu: Ak má výška lichobežníka dĺžku

$\frac{1}{2}(a + c - b - d)$, potom majú kružnice k_1, k_2 vonkajší dotyk.



Obr. 44

RIEŠENIE. Body a dĺžky úsečiek označme podľa obrázku (úsečky ohraničené daným a dotykovým bodom na dotýčniciach vedených z bodu mimo kružnice ku kružnici majú totiž rovnaké dĺžky). Potom je $KLMN$ pravouholník. Ďalej platí

$$a = x + y + z, \quad c = b + d - x - y + z\,.$$

Sčítaním oboch týchto rovností dostaneme

$$a + c = b + d + 2z\,,$$

čiže

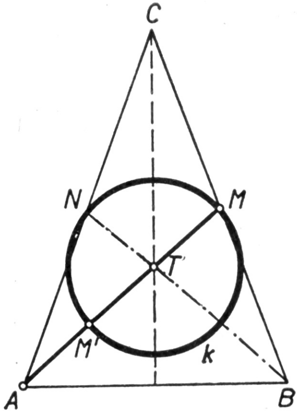
$$z = \frac{1}{2}(a + c - b - d)\,.$$

Pravouholník $KLMN$ je teda štvorec, vzdialenosť S_1S_2 sa rovná súčtu polomerov kružníc k_1,k_2 a obe kružnice majú vonkajší dotyk.

4. V rovině je dána úsečka AM. Určete geometrické místo středů ramen AC všech rovnoramenných trojúhelníků ABC se základnou AB, v nichž je úsečka AM těžnicí.

ŘEŠENÍ. a) Budiž T těžiště trojúhelníků ABC, tj. T je bod úsečky AM, pro který platí $AT = 2TM$. Označme N střed ramene AC (obr. 45), pak BN je těžnice trojúhelníka ABC. Poněvadž trojúhelník ABC je rovnoramenný, je $AM = BN$, a tedy $TM = TN$. Bod N leží tedy na kružnici k se středem T a poloměrem TM.

b) Nyní ještě musíme zjistit, zda ke každému bodu kružnice k existuje rovnoramenný trojúhelník požadovaných vlastností.



Obr. 45

Označme M' střed úsečky AT (který je také bodem kružnice k). Zvolme libovolný bod N kružnice k, různý od M, M'. Dokážeme, že existuje rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB a těžnicemi AM, BN. Na polopřímce opačné k polopřímce TN sestrojíme bod B, aby platilo $TB = 2TN$. Dále sestrojíme bod C souměrně sdružený s bodem B podle bodu M. Poněvadž $N \neq M, M'$, leží bod B mimo přímku AM, body B, C jsou odděleny přímkou AM, a tudíž body A, B, C neleží v přímce a jsou vrcholy trojúhelníka ABC.

Protože AM je těžnice trojúhelníka ABC (neboť $BM = CM$) a protože $AT = 2TM$, je T těžiště trojúhelníka ABC. Protože T je těžiště trojúhelníka ABC, leží jeho těžnice z vrcholu B v přímce BT, a protože $BT = 2TN$, je N středem strany AC. Protože těžnice AM, BN trojúhelníka ABC mají touž délku, je trojúhelník ABC rovnoramenný se základnou AB.

Odpověď. Hledané geometrické místo bodů je kružnice k bez bodů M, M'.

POZN. 1. Kdyby $N \equiv M$, nebo $N \equiv M'$, ležely by sestrojené body A, B, C v přímce.

POZN. 2. Trojúhelník ABC je rovnostranný, právě když $\sphericalangle MTN = 120°$.