19. ročník matematické olympiády

IV. Soutěžní úlohy II. kola

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor): 19. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1969-1970. 12. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1971. pp. 88–123.

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/404600`

IV. Soutěžní úlohy II. kola

1. KATEGORIE A

1a. Dokažte, že pro každé liché přirozené číslo a je výraz $(2a + 1)^{12} - (2a + 1)^8 - (2a + 1)^4 + 1$ dělitelný číslem $512\,a^2$. (5 bodů)

ŘEŠENÍ. Nechť $2a + 1 = n$, pak postupně dostaneme

$$(2a + 1)^{12} - (2a + 1)^8 - (2a + 1)^4 + 1 =$$
$$= n^{12} - n^8 - n^4 + 1 = n^8(n^4 - 1) - (n^4 - 1) =$$
$$= (n^4 - 1)(n^8 - 1) = (n^4 - 1)(n^4 - 1)(n^4 + 1) =$$
$$= (n^4 - 1)^2 (n^4 + 1) = (n^2 - 1)^2 (n^2 + 1)^2 (n^4 + 1) =$$
$$= (n + 1)^2 (n - 1)^2 (n^2 + 1)^2 (n^4 + 1) =$$
$$= (n + 1)(n - 1)(n + 1)(n - 1)(n^2 + 1)(n^2 + 1)\,.$$
$$.\,(n^4 + 1) = 2a2(a + 1)\,2a2(a + 1)\,2(2a^2 + 2a + 1)\,.$$
$$.\,2(2a^2 + 2a + 1)\,2(8a^4 + 16a^3 + 12a^2 + 4a + 1) =$$
$$= 128a^2(a + 1)^2 (2a^2 + 2a + 1)^2\,.$$
$$.\,(8a^4 + 16a^3 + 12a^2 + 4a + 1)\,.$$

Poněvadž a je liché, je $a + 1$ sudé číslo čili $a + 1 = 2k$; pak

$$128a^2(a + 1)^2 (2a^2 + 2a + 1)^2\,.$$
$$.\,(8a^4 + 16a^3 + 12a^2 + 4a + 1) = 512a^2k^2\,.$$
$$.\,(2a^2 + 2a + 1)^2 (8a^4 + 16a^3 + 12a^2 + 4a + 1) =$$
$$= 512a^2N\,,$$

kde

$$N = k^2(2a^2 + 2a + 1)^2(8a^4 + 16a^3 + 12a^2 + 4a + 1)\,.$$

Jiná možná úprava je:

$$(2a + 1)^{12} - (2a + 1)^8 - (2a + 1)^4 + 1 =$$
$$= (2a + 1)^8\,[(2a + 1)^4 - 1] - [(2a + 1)^4 - 1] =$$
$$= [(2a + 1)^8 - 1]\,.\,[(2a + 1)^4 - 1] =$$
$$= [(2a + 1)^4 + 1]\,[(2a + 1)^4 - 1]^2 =$$
$$= [(2a + 1)^4 + 1]\,[(2a + 1)^2 - 1]^2\,[(2a + 1)^2 + 1]^2 =$$
$$= [(2a + 1)^4 + 1]\,.\,[2a\,.\,2(a + 1)]^2\,.\,[(2a + 1)^2 + 1]^2 =$$

$= 2m\,.\,16a^2\,.\,(a + 1)^2\,.\,4\,.\,p$ a protože a je liché, je $a + 1 = 2k$, takže celkem dostaneme $512a^2mk^2p$.

JINÉ ŘEŠENÍ. Daný mnohočlen N lze rozložit takto:

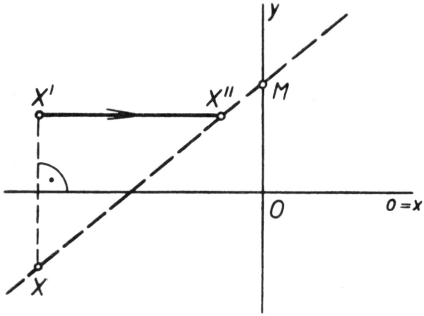
$$N = [(2a + 1)^4 - 1]\,.\,[(2a + 1)^8 - 1] =$$
$$= [(2a + 1)^2 + 1]\,.\,[(2a + 1) + 1]\,.$$
$$.\,[(2a + 1) - 1]\,.\,[(2a + 1)^4 + 1]\,.$$
$$.\,[(2a + 1)^2 + 1]\,.\,[(2a + 1) + 1]\,.$$
$$.\,[(2a + 1) - 1] = 2\,.\,(2a^2 + 2a + 1)\,.$$
$$.\,2(a + 1)\,.\,2a\,.\,2\,.\,(8a^4 + 16a^3 + 12a^2 + 4a + 1)\,.$$
$$.\,2(2a^2 + 2a + 1)\,.\,2(a + 1)\,.\,2a\,.$$

N je tedy dělitelný číslem $2^9\,.\,a^2 = 512a^2$, protože $(a + 1)$ je číslo sudé, $q\,.\,e\,.\,d.$

Řešil Pavel Pudlák,
3. D, SVVŠ, Nad štolou, Praha 7

1b. V rovině ϱ je dána přímka o, bod M a posunutí $\boldsymbol{P}$ ve směru přímky o. Souměrnost podle osy o převede bod X roviny ϱ v bod X', posunutí $\boldsymbol{P}$ převede X' v bod X''. Určete množinu všech takových bodů X roviny ϱ, pro něž leží body M, X, X'' v přímce. (5 bodů)

ŘEŠENÍ. Samo znění textu svádí k použití metody souřadnic. Přímku o zvolíme za osu x, a to tak, aby smysl kladné poloosy x byl souhlasný se smyslem posunutí **P**.



Obr. 22

Osu y zvolíme tak, aby bod M ležel na kladné poloose y (obr. 22). Souřadnice bodu M jsou pak $M = [0; b]$, kde $b \geqq 0$. Dále označme $X = [x, y]$, $X' = [x', y']$, $X'' = [x'', y'']$. Z textu úlohy plyne pro souměrnost podle osy o:

$$\begin{aligned} x' &= x\,, \\ y' &= -y\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Pro posunutí **P** pak platí

$$\begin{aligned} x'' &= x' + a\,, \\ y'' &= y'\,, \end{aligned} \tag{2}$$

kde $a > 0$. Spojením (1) a (2) dostaneme

$$\begin{aligned} x'' &= x + a\,, \\ y'' &= -y\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Podle (3) je vždy $X \neq X''$, neboť $a > 0$. Existuje tedy přímka XX'' a má rovnici

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma = 0\,. \tag{4}$$

Z (4) plyne podle (3)

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 ,$$
$$\alpha(x + a) - \beta y + \gamma = 0 \tag{5}$$

a odtud

$$a\alpha - 2y\beta = 0 . \tag{6}$$

V rovnici (6) můžeme volit $\alpha = 2y$, $\beta = a$, neboť $a > 0$. Z první rovnice (5) vypočteme $\gamma = -ay - 2xy$. Rovnice přímky XX'' tedy zní

$$2y\xi + a\eta - (ay + 2xy) = 0 . \tag{7}$$

Prochází-li přímka XX'' bodem M, vyhovují rovnici (7) čísla $\xi = 0$, $\eta = b$. Ze (7) pak plyne

$$2xy + ay = ab ,$$

neboli

$$y\left(x + \frac{a}{2}\right) = \frac{a}{2}\, b . \tag{8}$$

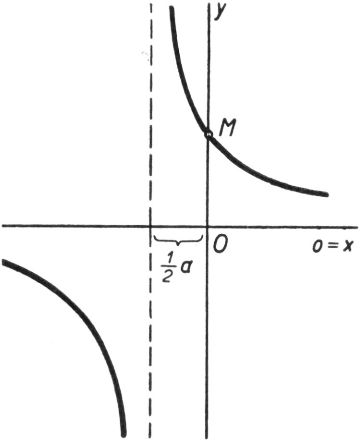
Obráceně, když souřadnice $[x; y]$ vyhovují rovnici (8), pak přímka (7) obsahuje bod $M(\xi = 0,\ \eta = b)$, bod $X(\xi = x,\ \eta = y)$ a podle (3) i bod $X''(\xi = x + a,\ \eta = -y)$. Je tedy rovnice (8) analytickým vyjádřením hledané množiny bodů.

Pro $b > 0$ rovnice (8) však vyjadřuje rovnoosou hyperbolu, jejíž asymptoty jsou přímky $x + \frac{a}{2} = 0$, $y = 0$ a která prochází bodem M (obr. 23a). Pro $b = 0$ vyjadřuje rovnice (8) dvojici kolmých přímek (obr. 23b).

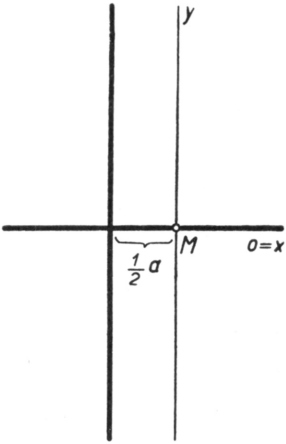
2a. Určte všetky hodnoty parametra a, pre ktoré má rovnica

$$\cos(x + a) = \cos x + \cos a \tag{1}$$

riešenie. (6 bodov)



Obr. 23a



Obr. 23b

RIEŠENIE. Rovnica (1) je ekvivalentná s rovnicou

$$\cos(x + a) - \cos x = \cos a\,,$$

a teda tiež s rovnicou

$$-2 \sin\left(x + \frac{a}{2}\right) . \sin\frac{a}{2} = \cos a\,. \tag{2}$$

Nutnou podmienkou riešiteľnosti rovnice (2) je

$$\sin\frac{a}{2} \neq 0\,. \tag{3}$$

Ak by totiž bolo $\sin\frac{a}{2} = 0$, potom by rovnica (2) mala riešenie len vtedy, keď by zároveň platilo $\cos a = 0$, čo však nie je možné.

Rovnica (1) má teda riešenie práve vtedy, keď má riešenie rovnica

$$\sin\left(x + \frac{a}{2}\right) = -\frac{\cos a}{2\sin\frac{a}{2}}, \tag{4}$$

čiže práve vtedy, keď platí

$$\left|\frac{\cos a}{2\sin\frac{a}{2}}\right| \leqq 1\,. \tag{5}$$

Pritom je zrejmé, že podmienka (3) je už zahrnutá v (5).

Úloha prešla teda na riešenie nerovnice (5). Nerovnica (5) je ekvivalentná s nerovnicou

$$|\cos a| \leqq 2\left|\sin\frac{a}{2}\right|, \tag{6}$$

pretože a, pre ktoré platí $\sin\frac{a}{2} = 0$, nemôže byť riešením (6), lebo by zároveň muselo platiť $\cos a = 0$.

Nerovnica (6) je ekvivalentná s nerovnicou

$$\cos^2 a \leqq 4\sin^2\frac{a}{2}\,.$$

Ak použijeme vzťah $2\sin^2\frac{a}{2} = 1 - \cos a$, dostaneme

$$\cos^2 a \leqq 2 - 2\cos a$$

čiže

$$(\cos a + 1)^2 \leqq 3\,,$$

z čoho po odmocnení máme

$$\cos a \leqq \sqrt{3} - 1\,. \tag{7}$$

Ak označíme α veľkosť ostrého uhla, pre ktorý platí $\cos\alpha = \sqrt{3} - 1$, t. j. $\alpha \doteq 42°56'$, dostávame, že riešením nerovnice (7), a teda tiež (5), sú všetky a, ktoré vyhovujú nerovnostiam

$$\alpha + 2k\pi \leqq a \leqq (2\pi - \alpha) + 2k\pi\,, \tag{8}$$

kde k je celé číslo.

Nerovnosti (8) spolu s podmienkou $\cos\alpha = \sqrt{3} - 1$ určujú množinu všetkých hodnôt parametra a, pre ktoré má rovnica (1) riešenie. Pri zvolenom a, ktoré vyhovuje podmienkam (8) sa x určí z rovnice (4).

INÉ RIEŠENIE. Rovnica (1) je ekvivalentná s rovnicou

$$\cos x \,.\, \cos a - \sin x \,.\, \sin a = \cos x + \cos a\,,$$

ktorú možno upraviť na tvar

$$\sin a \,.\, \sin x + (1 - \cos a)\cos x = -\cos a\,. \tag{9}$$

Ak položíme $\sin a = A$, $1 - \cos a = B$, $-\cos a = C$, dostaneme goniometrickú rovnicu

$$A \sin x + B \cos x = C\,. \tag{10}$$

Riešenie goniometrickej rovnice typu (10) je podrobne rozobrané v knižke autorov *B. Budinského a S. Šmakala*: Goniometrické funkce, ktorá vyšla v nakladateľstve *Mladá fronta* r. 1968 ako 20. zväzok edície *Škola mladých matematikov*. V knižke sú vysvetlené tri spôsoby riešenia rovníc typu (10). Je tam tiež odvodené, že rovnica (10) má riešenie práve vtedy, keď $C^2 \leqq A^2 + B^2$. Pre rovnicu (9) má táto podmienka tvar

$$\cos^2 a \leqq \sin^2 a + (1 - \cos a)^2\,,$$

z čoho po jednoduchej úprave dostaneme

$$(\cos a + 1)^2 \leqq 3\,,$$

odkiaľ po odmocnení dostávame nerovnicu (7).

2b. Je daný štvorsten $ABCD$ taký, že päta P výšky v vedenej z bodu D na stenu ABC leží v trojuholníku ABC. Nech $v \geqq \max(a, b, c)$, kde $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ a $c = \overline{AB}$. Dokážte, že potom

$$P_{ABC} < \frac{\sqrt{2}}{2} (P_{BCD} + P_{ACD} + P_{ABD}),$$

kde P_{XYZ} znamená plochu trojuholníka XYZ. (6 bodov)

RIEŠENIE. Označme vzdialenosti bodu P od strán BC, AC, AB v uvedenom poradí v_a, v_b, v_c (ak P leží na strane BC, kladieme $v_a = 0$, podobne v prípade iných strán trojuholníka ABC). Ľahko sa presvedčíme, že $v_a \leqq v_A$, kde v_A je výška na stranu BC v trojuholníku ABC. Z vlastností pravouhlého trojuholníka však vyplýva, že platí

$$v_A \leqq b, \tag{1}$$

z čoho vzhľadom na predchádzajúcu nerovnosť vyplýva, že $v_a \leqq b$. Podobne zistíme, že $v_b \leqq c$, $v_c \leqq a$, a keďže vždy platí

$$a \leqq \max(a, b, c), \quad b \leqq \max(a, b, c), \quad c \leqq \max(a, b, c), \tag{2}$$

dostávame

$$v_a \leqq \max(a, b, c), \quad v_b \leqq \max(a, b, c), \quad v_c \leqq \max(a, b, c). \tag{3}$$

Dokážeme teraz, že z nerovností (3) je vždy aspoň jedna ostrá. Ak by totiž v (3) všade platila rovnosť, musela by platiť všade rovnosť aj v (2), z čoho vyplýva, že $a = b = c$, a teda aj v (1), čo však nie je možné, pretože v rovnostrannom trojuholníku je určite $v_A < b$. Tento spor dokazuje naše tvrdenie. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme teraz predpokladať, že v (3) je ostrá prvá nerovnosť. Potom platí

$$v_a < v, \quad v_b \leqq v, \quad v_c \leqq v.$$

Označme päty kolmíc spustených z bodu P na strany BC, CA, AB v uvedenom poradí A_1, B_1, C_1 (čiže $v_a = \overline{PA_1}$, $v_b = \overline{PB_1}$, $v_c = \overline{PC_1}$). Potom je $DP \perp BC, CA, AB$; $PA_1 \perp BC$, $PB_1 \perp CA$, $PC_1 \perp AB$ čiže roviny DPA_1, DPB_1, DPC_1 sú kolmé v uvedenom poradí na priamky BC, CA, AB a teda DA_1, DB_1, DC_1 sú v uvedenom poradí výškami trojuholníkov BCD, ACD, ABD (spustenými z vrcholu D).

Teraz si dokážeme *vetu*: V pravouhlom trojuholníku s odvesnami x, y ($x \leqq y$) a s preponou z platí

$$z > \sqrt{2}x \quad \text{pre} \quad x < y; \qquad z = \sqrt{2}x \quad \text{pre} \quad x = y.$$

Pythagorova veta dáva totiž

pre $x < y$ je

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} > \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}x \quad \text{čiže} \quad z > \sqrt{2}x;$$

pre $x = y$ je

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}x \quad \text{čiže} \quad z = \sqrt{2}x.$$

Podľa tejto dokázanej vety máme

$$\overline{DA_1} > \sqrt{2}\,\overline{PA_1} = \sqrt{2}\,v_a, \quad \overline{DB_1} \geqq \sqrt{2}\,\overline{PB_1} = \sqrt{2}\,v_b,$$
$$\overline{DC_1} \geqq \sqrt{2}\,\overline{PC_1} = \sqrt{2}\,v_c,$$

pričom tieto vzťahy zostanú zrejme v platnosti aj v prípade, keď niektoré z čísel v_a, v_b, v_c sa rovná nule. Keďže bod P leží podľa predpokladu v trojuholníku ABC, platí

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}(\overline{BC} \,.\, v_a + \overline{AC} \,.\, v_b + \overline{AB} \,.\, v_c)$$

a ďalej tiež

$$P_{BCD} = \frac{1}{2}\,\overline{BC} \,.\, \overline{DA_1} > \frac{1}{2}\,\overline{BC} \,.\, \sqrt{2}\,v_a,$$

$$P_{ACD} = \frac{1}{2}\,\overline{AC}\,.\,\overline{DB_1} \geqq \frac{1}{2}\,\overline{AC}\,.\,\sqrt{2}\,v_b\,,$$

$$P_{ABD} = \frac{1}{2}\,\overline{AB}\,.\,\overline{DC_1} \geqq \frac{1}{2}\,\overline{AB}\,.\,\sqrt{2}\,v_c\,.$$

Sčítaním posledných troch nerovností dostaneme

$$P_{BCD} + P_{ACD} + P_{ABD} > \sqrt{2}\,.\,\frac{1}{2}\,(\overline{BC}\,.\,v_a + \overline{AC}\,.\,v_b + \\ + \overline{AB}\,.\,v_c) = \sqrt{2}\,.\,P_{ABC}\,,$$

z čoho už priamo dostaneme nerovnosť, ktorej správnosť sme mali dokázať.

JINÉ ŘEŠENÍ. Platí

$$P_{ABC} \leqq \frac{1}{2}\,ab\,,$$

$$P_{ABC} \leqq \frac{1}{2}\,bc\,,$$

$$P_{ABC} \leqq \frac{1}{2}\,ca\,,$$

přičemž rovnost může nastat pouze v jednom případě. Sečtením a užitím nerovnosti $v \geqq \max(a, b, c)$ plyne

$$3\,.\,P_{ABC} < \frac{1}{2}\,v(a + b + c)\,. \tag{1}$$

Dále platí

$$P_{ABD} \geqq \frac{1}{2}\,c\,.\,v,$$

$$P_{ACD} \geqq \frac{1}{2}\,b\,.\,v,$$

$$P_{BCD} \geqq \frac{1}{2} a \cdot v,$$

z čehož sečtením plyne

$$P_{ABD} + P_{ACD} + P_{BCD} \geqq \frac{1}{2} v(a + b + c). \qquad (2)$$

Z (1), (2) dostáváme

$$P_{ABC} < \frac{1}{3} (P_{ABD} + P_{ACD} + P_{BCD}),$$

což je dokonce silnější nerovnost než ta, kterou jsme měli dokázat $\left(\text{je totiž } \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Řešil Zbyšek Stýblo,
3. roč. SVVŠ, Arabská ul., Praha 6

3a. Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby menší z kořenů rovnice

$$qx^2 + px + 1 = 0,$$

kde p, q jsou reálná čísla, $q < 0$, splňoval nerovnost

$$x^2 + px + q < 0$$

je, aby platilo $p > q + 1$. Dokažte. (8 bodů)

ŘEŠENÍ. Rovnice

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (1)$$

i daná rovnice

$$qx^2 + px + 1 = 0 \qquad (2)$$

mají týž diskriminant

$$D = \frac{p^2}{4} - q > 0. \qquad (3)$$

Proto každá z rovnic (1), (2) má dva navzájem různé reálné kořeny. Označme x_1, x_2 kořeny rovnice (1); pak je

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D}, \qquad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{D}. \tag{4}$$

Označme dále x_3, x_4 kořeny rovnice (2); snadno vypočteme, že je

$$x_3 = \frac{1}{q} x_1, \qquad x_4 = \frac{1}{q} x_2. \tag{5}$$

Z (4) je patrné, že platí

$$x_1 > x_2. \tag{6}$$

Dále je $\left(\frac{p}{2}\right)^2 < \frac{p^2}{4} - q = D$, tj. $\left|\frac{p}{2}\right| < \sqrt{D}$;

protože je $\frac{p}{2} \leqq \left|\frac{p}{2}\right|$, je $\frac{p}{2} < \sqrt{D}$, tj. podle (4)

$$x_1 > 0. \tag{7}$$

Znásobíme-li (4) záporným číslem $\frac{1}{q}$, dostaneme vzhledem k (5) a (6) nerovnost $x_3 < x_4$. Úloha tedy žádá, aby byly splněny nerovnice

$$x_2 < x_3 < x_1. \tag{8}$$

Platí-li $x_3 < x_1$, je podle (4), (5) $\frac{x_1}{q} < x_1$ neboli $x_1 > qx_1$

neboli $x_1(1 - q) > 0$. Protože $1 - q > 0$ a protože platí (7), je poslední nerovnice splněna. Obrácením postupu zjistíme, že druhá nerovnice (8) je splněna pro každé p, q ($q < 0$), stačí tedy zabývat se první nerovnicí (8).

Nerovnici $x_2 < x_3$ přepíšeme podle (4), (5)

$$-\frac{p}{2} - \sqrt{D} < \frac{1}{q}\left(-\frac{p}{2} + \sqrt{D}\right).$$

Po znásobení záporným číslem $2q$ dostaneme

$$-pq - 2q\sqrt{D} > -p + 2\sqrt{D},$$

tj.

$$p(1 - q) > 2\sqrt{D}(q + 1). \tag{9}$$

Nyní rozlišíme dva případy: a) $q + 1 \geqq 0$, b) $q + 1 < 0$.

V případě a) plyne z (9) $p \geqq 0$. Umocníme (9) dvěma a dostaneme po úpravě

$$0 > -4q(q^2 + 2q + 1) + 4p^2q.$$

Dělíme tuto nerovnici kladným číslem $-4q$ a po další úpravě vyjde

$$p > q + 1. \tag{10}$$

Případ b): Je-li $p \geqq 0$, je (10) evidentní. Je-li $p < 0$, umocníme (9) dvěma a dostaneme

$$p^2(1 - q)^2 < (p^2 - 4q)(q + 1)^2;$$

po úpravě jako v případě a) vyjde $p^2 < (q + 1)^2$, tj. $-p < -(q + 1)$, neboť v případě b) je $|q + 1| = -(q + 1)$ a ještě $p < 0$, je $|p| = -p$. Z nerovnice $-p < -(q + 1)$ plyne (10).

Tím je dokázáno, že (10) je *nutná podmínka* pro požadovanou vlastnost. *Obráceně*, nechť platí (10); rozlišíme opět případy: a) $q + 1 \geqq 0$, b) $q + 1 < 0$. V případě a) plyne z (10) vztah $p > 0$; obrácením postupu odtud dospějeme k (9) a odtud k (8). Případ b): Je-li $q + 1 < 0$ a $p \geqq 0$, je (9) evidentní a z (9) dospějeme obrácením postupu k (8). Je-li $q + 1 < 0$, $p < 0$, je $-p < -(q+1)$; odtud umocněním a obrácením postupu vyjde (9) a konečně (8).

Je tedy (10) také *postačující podmínkou* pro požadovanou vlastnost.

JINÉ ŘEŠENÍ. Kořeny rovnice $qx^2 + px + 1 = 0$ jsou

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2q}, \quad x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2q}.$$

(Protože $q < 0$, $p^2 \geqq 0$, je $p^2 - 4q > 0$.) Menší z kořenů x_1, x_2 je kořen x_1, neboť $q < 0$. Řešením nerovnosti $x^2 + px + q < 0$ je interval

$$x \in \left(\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \right).$$

Má-li x_1 splňovat nerovnost $x^2 + px + q < 0$, musí být

$$x_1 \in \left(\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \right), \quad \text{tedy}$$

$$\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} < \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2q} <$$

$$< \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Protože $q < 0$, je $-4q > 0$, $p^2 - 4q > p^2$, $\sqrt{p^2 - 4q} > |p|$, takže $-p + \sqrt{p^2 - 4q} > 0$. Nerovnost

$$\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2q} < \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

tedy vždy platí, takže nedostáváme z ní žádný nový vztah pro čísla p, q.

Budu řešit nerovnost

$$\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} < \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2q},$$

jež je ekvivalentní s nerovností

$$q(p + \sqrt{p^2 - 4q}) < p - \sqrt{p^2 - 4q}, \qquad (1)$$

neboť $q < 0$.

Nerovnost (1) je ovšem ekvivalentní s nerovností

$$pq - p < -(q+1)\sqrt{p^2 - 4q}\,,$$

$$(q+1)\sqrt{p^2 - 4q} < p(1-q)\,. \tag{2}$$

Rozliším nyní tři případy:

1. $q \in (-\infty; -1)$, pak levá strana nerovnosti (2) je záporná, $1 - q$ je číslo kladné. Je-li

a) $p \geqq 0$, je $p(1-q) \geqq 0 > (q+1)\sqrt{p^2 - 4q}$, takže nerovnost (2) je splněna. Protože $q < -1$, je $q + 1 < 0$, $p \geqq 0$, takže $\underline{p > q + 1}$.

b) $p < 0$, je $p(1-q) < 0$, tedy

$$(q+1)\sqrt{p^2 - 4q} < p(1-q) < 0\,.$$

Pak je ovšem nerovnost (2) ekvivalentní s nerovností $(q+1)^2(p^2 - 4q) > p^2(1-q)^2$, z níž dostávám postupně

$$p^2 - 4q > p^2\,\frac{(1-q)^2}{(1+q)^2}\,,$$

$$-4q > p^2\,\frac{(1-q)^2 - (1+q)^2}{(1+q)^2}\,,$$

$$-4q > p^2\,\frac{-4q}{(1+q)^2}\,,$$

$$(1+q)^2 > p^2\,, \quad \text{neboť} \quad q < 0, \text{ takže } -4q > 0,$$

$$|1+q| > |p|\,. \tag{3}$$

Avšak $p < 0$, $1 + q < 0$, takže $|p| = -p$, $|1+q| = -1 - q$ a z nerovnosti (3) dostávám

$$-1 - q > -p\,,$$

$$\underline{p > q + 1}$$

2. $q = -1$, pak z nerovnosti (2) dostávám

$$0 < 2p, \quad \text{tedy}$$

$$p > 0\,. \tag{4}$$

Pro $q = -1$ je $q + 1 = 0$, což dosazeno do (4) dává

$$\underline{p > q + 1\,.}$$

3. $q \in (-1; 0)$; pak levá strana nerovnosti (2) je kladná, dále $1 - q > 0$, takže nutně musí být $p > 0$. Kdyby totiž bylo $p \leqq 0$, bylo by $p(1 - q) \leqq 0$, ale $(q + 1) \cdot \sqrt{p^2 - 4q} > 0$, takže by nemohlo být $(1 + q)\sqrt{p^2 - 4q} < p(1 - q)$. Je tedy

$$0 < (q + 1)\sqrt{p^2 - 4q} < p(1 - q)$$

a tato nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$(q + 1)^2 (p^2 - 4q) < p^2(1 - q)^2, \text{ kterou upravíme}$$

$$p^2 - 4q < p^2 \frac{(1 - q)^2}{(1 + q)^2},$$

$$-4q < p^2 \frac{(1 - q)^2 - (1 + q)^2}{(1 + q)^2},$$

$$-4q < p^2 \frac{-4q}{(1 + q)^2},$$

$$(1 + q)^2 < p^2, \quad \text{neboť} \quad -4q > 0, \quad \text{dále}$$

$$|1 + q| < |p|, \text{ a protože } 1 + q > 0, p > 0, \text{ je}$$

$$|1 + q| = 1 + q, |p| = p, \quad \text{takže}$$

$$\underline{q + 1 < p\,.}$$

Postup lze obrátit (upravovat nerovnost $1 + q < p$ pro $q \in (-\infty; -1)$, $q = -1$, $q \in (-1; 0)$ až do tvaru (2), pak do tvaru

$$\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} < \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2q},$$

takže platí

$$\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} < \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2q} <$$

$$< \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

a kořen $x_1 < x_2$ rovnice $qx^2 + px + 1 = 0$ tedy skutečně splňuje nerovnost $x^2 + px + q < 0$. Tím je důkaz proveden.

Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby menší z kořenů rovnice $qx^2 + px + 1 = 0$, kde p, q jsou reálná čísla, $q < 0$, splňoval nerovnost $x^2 + px + q < 0$ je tedy, aby platilo $p > q + 1$.

POZNÁMKA. Nejprve jsem dokázal, že má-li pro menší kořen rovnice $qx^2 + px + 1 = 0$ platit $x^2 + px + q < 0$, musí být $q + 1 < p$. Obrácením postupu jsem dokázal větu obrácenou, že totiž pro $p > q + 1$ pro menší kořen rovnice $qx^2 + px + 1 = 0$ platí $x^2 + px + q < 0$. Podle zákonů matematické logiky jsem tím dokázal, že $p > q + 1$ je nutná a postačující podmínka pro to, aby menší kořen rovnice $qx^2 + px + 1 = 0$ splňoval nerovnost $x^2 + px + q < 0$.

Řešil Rudolf Švarc,
3. F SVVŠ J. Fučíka, Plzeň

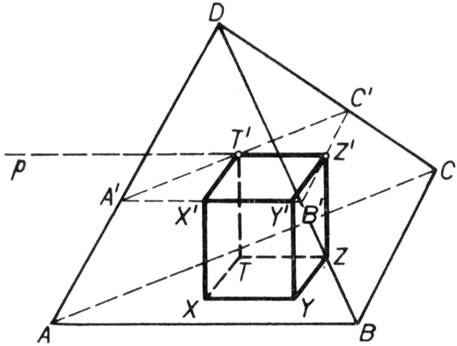
3b. Je dán čtyřstěn *ABCD*, jehož stěna *ABC* je ostroúhlý trojúhelník a jehož výška spuštěná z vrcholu *D* má patu uvnitř stěny *ABC*. Vyšetřte geometrické místo průsečíků tělesových úhlopříček takových kvádrů, které leží v čtyřstěnu *ABCD*, jejichž jedna stěna leží v rovině *ABC*, jedna hrana v rovině *ABD* a zbývající dva vrcholy v rovinách *BCD*, *CAD*. (8 bodů)

ŘEŠENÍ. Nejdříve uvedeme konstrukci jednoho z kvádrů $XYZTX'Y'Z'T'$, který má žádané vlastnosti.

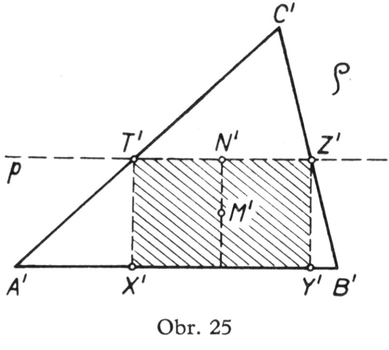
Nechť jeho stěna $XYZT$ leží v rovině ABC, jeho hrana $X'Y'$ v rovině ABD a vrcholy Z', T' po řadě v rovinách BCD, CAD. Rovina $\varrho = (X'Y'Z')$ protne čtyřstěn v trojúhelníku $A'B'C'$ (A' na AD, B' na BD, C' na CD) a platí

$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC . \tag{1}$$

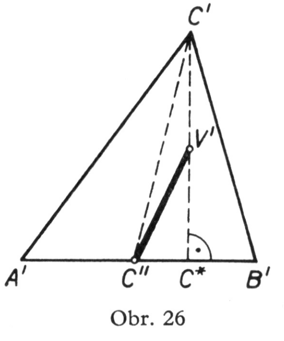
Vzhledem k (1) je $\triangle A'B'C'$ ostroúhlý, $X'Y' \subset A'B'$, Z', T' leží po řadě na stranách $B'C'$, $C'A'$. Situace v prostoru je znázorněna na obr. 24, situace v rovině ϱ na obr. 25.



Obr. 24



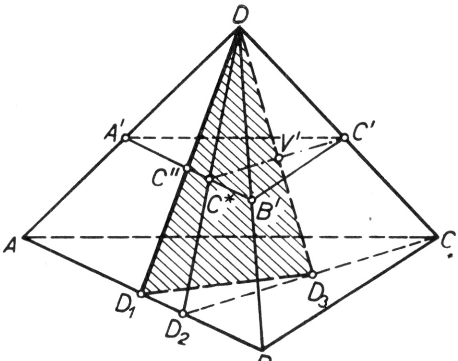
Obr. 25



Obr. 26

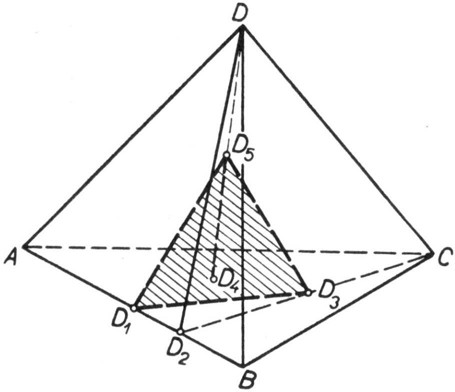
Pravoúhelník $X'Y'Z'T'$ sestrojíme tak, že vedeme vhodnou přímku $p \parallel A'B' \parallel AB$ v rovině ϱ, určíme její průsečíky Z', T' s vnitřky úseček $B'C'$, $C'A'$ a z bodů Z', T' spustíme kolmice na $A'B'$; jejich paty jsou body X' Y'. Geometrické místo průsečíků S tělesových úhlopříček všech kvádrů daných vlastností najdeme takto: Zjistíme geometrické místo průsečíků M' úhlopříček pravoúhelníků $X'Y'Z'T'$; určíme patu M kolmice spuštěné z každého takového bodu M' na rovinu ABC; S je pak zřejmě střed úsečky MM' (M je průsečík úhlopříček stěny $XYZT$).

Označme N' střed úsečky $Z'T'$ (obr. 25); všecky body N' ležící v rovině ϱ vyplní vnitřek těžnice $C'C''$ trojúhelníka $A'B'C'$. Všecky tyto body M' vyplní tedy vnitřek úsečky, jejichž krajní body jsou C'' a střed V' výšky $C'C^*$ spuštěné z vrcholu C' na stranu $A'B'$ (obr. 26). Všecky body C'' vyplní vnitřek těžnice DD_1 stěny ABD (viz obr. 27). Všecky body C^* vyplní vnitřek úsečky DD_2, kde $CD_2 \perp AB$, $D_2 \in AB$. Protože je $C''V' \parallel (ABC)$, vy-



Obr. 27

plní všecky body V' vnitřek těžnice DD_3 trojúhelníka CDD_2 (viz obr. 27). Všecky úsečky $C'' V'$ vyplní vnitřek trojúhelníka $\triangle DD_1D_3$. Tento vnitřek je tedy geometrické místo bodů M' (průsečíků úhlopříček stěn $X'Y'Z'T'$). Označme nyní D_4 patu výšky DD_4 čtyřstěnu $ABCD$. Body S vyplní vnitřek trojúhelníka $D_1D_3D_5$, kde D_5 je střed výšky DD_4 (obr. 28); to snadno zjistíme, vedeme-li v libovolném pravoúhlém trojúhelníku XD_4D (X na D_1D_3) všecky příčky rovnoběžné s odvěsnou D_4D a zjistíme-li jejich středy S. (Ve zvláštním případě, leží-li bod D_4 na úsečce D_1D_3 a je-li $X = D_4$, se redukuje $\triangle XD_4D$ na úsečku D_4D).



Obr. 28

ZÁVĚR. Geometrické místo středů S „vepsaných" kvádrů $XYZTX'Y'Z'T'$ je vnitřek trojúhelníka $D_1D_3D_5$ (viz obr. 28), neboť je i možno ke každému bodu vnitřku trojúhelníka $D_1D_3D_5$ sestrojit kvádr požadovaných vlastností.

1a. Určite všetky prirodzené čísla k, pre ktoré je číslo $3^k + 1$ deliteľné a) dvoma, b) štyrmi, c) ôsmimi.

RIEŠENIE. Tabuľka

k	1	2	3	4	5	...
$3^k + 1$	4	10	28	82	244	...

nám napovedá, že pre nepárne k je $3^k + 1$ násobkom štyroch, pre párne k len násobkom dvoch, ale nie štyroch.

Platí

$$3^{k+1} + 1 = 3^k \,.\, 3 + 1 = 2 \,.\, 3^k + (3^k + 1)\,. \qquad (1)$$

Číslo $2 \,.\, 3^k$ je zrejme pre každé prirodzené k len násobkom dvoch, ale nie štyroch. Ak je číslo $3^k + 1$ tiež len násobkom dvoch, je podľa (1) $3^{k+1} + 1$ násobkom štyroch. Ak je $3^k + 1$ násobkom štyroch, potom je podľa (1) $3^{k+1} + 1$ násobkom dvoch, ale nie štyroch. Pretože $3^1 + 1 = 4$ je násobkom štyroch, je tým prvá a druhá časť úlohy vyriešená, a to tak, že je potvrdená naša domnienka:

a, b) Číslo $3^k + 1$, kde k je prirodzené číslo, je vždy párne, ale je deliteľné štyrmi vtedy a len vtedy, keď k je nepárne.

c) Platí

$$3^k + 1 = 9 \,.\, 3^{k-2} + 1 = 9 \,.\, 3^{k-2} + 9 - 8 = \\ = 9 \,.\, (3^{k-2} + 1) - 8\,. \qquad (2)$$

Ak by bolo číslo $3^k + 1$ pre niektoré prirodzené číslo k násobkom ôsmich, potom by to podľa (2) muselo platiť tiež o čísle $3^{k-2} + 1$. Opakovaním tejto úvahy dospejeme k záveru, že buď $3^1 + 1 = 4$ alebo $3^2 + 1 = 10$ je násobkom ôsmich. Toto protirečenie ukazuje, že číslo $3^k + 1$ nie je deliteľné ôsmimi pre žiadne prirodzené k.

1b. Součet druhých mocnin tří po sobě následujících celých lichých čísel je menší než 10^7 a jeho dekadický zápis má všechny číslice stejné. Najděte všechny takové trojice čísel.

ŘEŠENÍ. Označíme-li x prostřední ze tří hledaných čísel, pak součet čtverců je

$$s = (x - 2)^2 + x^2 + (x + 2)^2 ,$$

tj.

$$s = 3x^2 + 8 . \qquad (1)$$

Poněvadž x je liché číslo, končí x^2 některou z číslic

$$1,\ 5,\ 9 .$$

Číslo s pak končí některou z číslic

$$1,\ 3,\ 5 .$$

Z (1) plyne, že s není dělitelné třemi, takže číslice 3 nepřichází v úvahu. Vzhledem k tomu, že podle (1) číslo s má při dělení třemi dávat zbytek 2, zbývají pro s již jen tyto možnosti

$$11,\quad 11\,111 ,$$

$$5,\quad 5\,555,\quad 5\,555\,555 .$$

Dosadíme-li tyto možnosti postupně do (1), zjistíme, že číslo 11 vede ke trojicím

$$[-1,\ 1,\ 3] ,\quad [-3,\ -1,\ 1] ,$$

číslo 5 555 ke trojicím

$$[41,\ 43,\ 45] ,\quad [-45,\ -43,\ -41] ,$$

zatímco pro ostatní tři čísla s nemá rovnice (1) celočíselné řešení x.

Snadno se ověří, že nalezené čtyři trojice skutečně splňují podmínky úlohy. Úloha má tedy čtyři řešení.

2a. Určete reálná čísla a, b, c, d tak, aby platilo

$$\frac{x+1}{x^2+x-2} = \frac{a}{x+b} + \frac{c}{x+d} \tag{1}$$

pro všecka reálná x, pro něž není žádný z jmenovatelů roven nule.

ŘEŠENÍ. Existují nejvýše čtyři čísla x, která anulují některý ze jmenovatelů zlomků v (1). Pro *všecka ostatní reálná* x platí

$$\frac{x+1}{x^2+x-2} = \frac{a(x+d)+c(x+b)}{(x+b)(x+d)},$$

tj.

$$(x+1)(x+b)(x+d) =$$
$$= (x^2+x-2)[(a+c)x+(ad+bc)] .$$

Po úpravě dostaneme

$$x^3 + x^2(1+b+d) + x(bd+b+d) + bd =$$
$$= x^3(a+c) + x^2(a+c+ad+bc) +$$
$$+ x(ad+bc-2a-2c) - 2(ad+bc) .$$

Porovnáním koeficientů u týchž mocnin x dostaneme

$$a + c = 1 \tag{2a}$$

$$1 + b + d = a + c + (ad+bc) \tag{2b}$$

$$bd + b + d = (ad+bc) - 2(a+c) \tag{2c}$$

$$bd = -2(ad+bc) . \tag{2b}$$

Užijeme-li (2a) v (2b) a dále (2a) i (2b) v (2c), vyjde

$$a + c = 1 , \tag{3a}$$

$$b + d = ad + bc , \tag{3b}$$

$$bd = -2 , \tag{3c}$$

$$bd = -2(ad+bc) . \tag{3d}$$

Z (3c), (3d) dostaneme

$$ad + bc = 1 \tag{4}$$

a dosazením (4) do (3b)

$$b + d = 1\,. \tag{5}$$

Z (3c), (5) vyplývá, že b, d jsou kořeny kvadratické rovnice $t^2 - t - 2 = 0$; to jsou čísla 2, -1. Zvolme označení tak, aby bylo

$$b = 2\,, \quad d = -1\,; \tag{6}$$

pak (4) zní

$$-a + 2c = 1\,. \tag{7}$$

Spojením (3a), (7) vyjde

$$c = \frac{2}{3}\,, \quad a = \frac{1}{3}\,. \tag{8}$$

Vzorce (6), (8) dávají řešení úlohy. *Zkouškou* se snadno přesvědčíme, že je skutečně

$$\frac{x+1}{x^2+x-2} = \frac{\frac{1}{3}}{x+2} + \frac{\frac{2}{3}}{x-1}\,.$$

2b. Nájdite všetky hodnoty parametra a, pre ktoré je v kartézskej súradnicovej sústave so súradnicami x, y graf rovnice

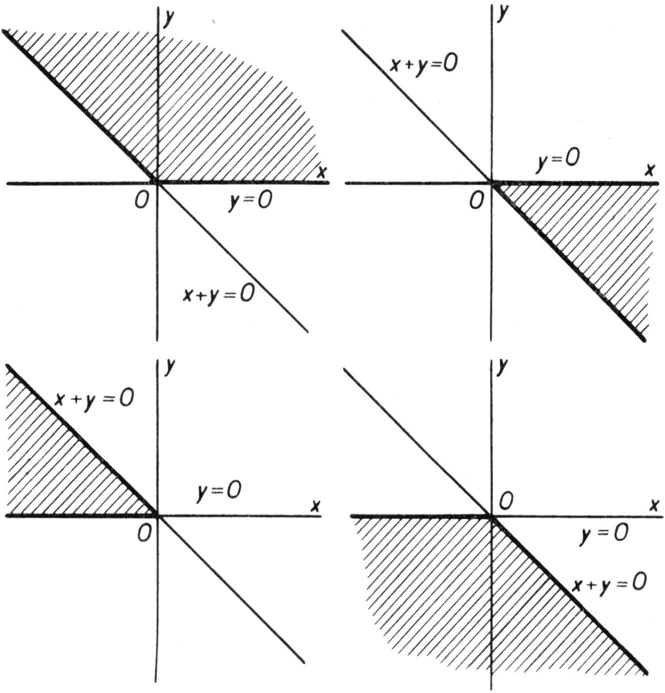
$$|x + y| + a|y| = 1 \tag{1}$$

obvodom pravouholníka.

RIEŠENIE. Graf rovnice (1) zostrojíme zo štyroch častí, ktoré dostaneme uvažovaním o štyroch prípadoch:

$$\begin{aligned} &\text{a) } x + y \geqq 0,\ y \geqq 0; \quad \text{b) } x + y \geqq 0,\ y \leqq 0; \\ &\text{c) } x + y \leqq 0,\ y \geqq 0; \quad \text{d) } x + y \leqq 0,\ y \leqq 0\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Na obr. 29abcd sú načrtnuté a vyšrafované uhly, ktoré sú grafickým znázornením štyroch dvojíc nerovností (2).



Obr. 29abcd

V prípadoch a)—d) nahradíme rovnicu (1) v uvedenom poradí rovnicami

$$x + (1 + a)y = 1\,, \tag{2a}$$

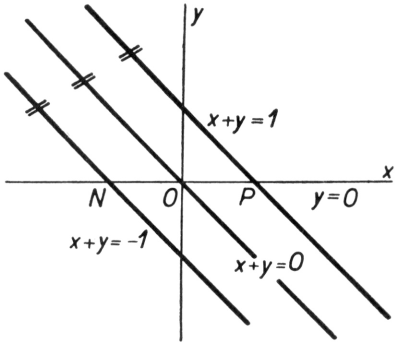
$$x + (1 - a)y = 1\,, \tag{2b}$$

$$x + (1 - a)y = -1\,, \tag{2c}$$

$$x + (1 + a)y = -1\,. \tag{2d}$$

Každá z rovníc (2a)—(2d) je rovnicou priamky. Prvé dve z týchto priamok pretínajú priamku $y = 0$ v bode $P = [1; 0]$, druhé dve v bode $N = [-1; 0]$.

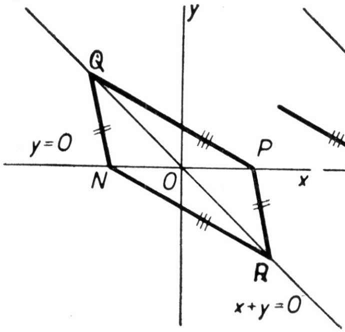
Uvažujme zvlášť o prípade $a = 0$. V tomto prípade dávajú štyri grafy spolu dve rovnobežky $x + y = \pm 1$ prechádzajúce bodmi P, N (obr. 30).



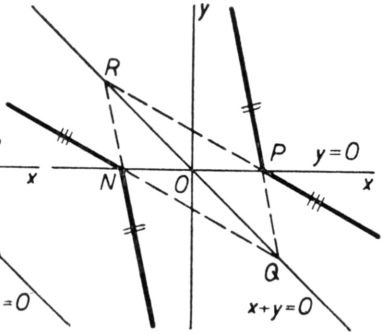
Obr. 30

Ak je $a \neq 0$, pretína každá z priamok (2a) — (2d) priamku $x + y = 0$ v určitom bode, a to priamky (2a) a (2c) v bode $Q = \left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right]$ a priamky (2b), (2d) v bode $R = \left[\frac{1}{a}, -\frac{1}{a}\right]$. Body Q, R patria do vyšrafovaných uhlov práve vtedy, keď je $a > 0$. Pre $a > 0$ je teda grafom rovnice (1) obvod rovnobežníka $PQNR$ (obr. 31), pre $a < 0$ je týmto grafom štvorica polpriamok (obr. 32). Rovnobežník $PQNR$ je však pravouholníkom práve vtedy, keď je $NP = QR$. Platí však: $NP = 2$, $QR =$

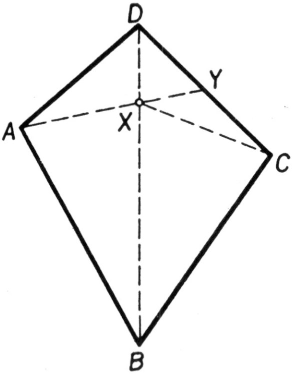
$= 2\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a^2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{a}$. Graf rovnice (1) je teda obvodom pravouholníka práve vtedy, keď $a = \sqrt{2}$.



Obr. 31



Obr. 32



Obr. 33

3a. Je dán vypuklý čtyřúhelník $ABCD$ a bod X úhlopříčky BD tak, že přímka AX protíná stranu CD v jejím vnitřním bodě. Pak platí

$$AX + BX + CX < AD + BD + CD\,. \qquad (1)$$

Dokažte. Platí vztah (1) i v případě, že přímka AX prochází vrcholem C nebo protíná stranu BC?

ŘEŠENÍ (obr. 33). a) Označíme Y průsečík přímek AX, CD. Podle trojúhelníkové nerovnosti pak platí

$$AD + DY > AX + XY \ (= AY),$$
$$XY + CY > CX, \qquad (2)$$
$$BD > BX.$$

Sečtením těchto tří nerovnic dostaneme nerovnici (1), neboť $DY + CY = CD$.

b) V případě, že přímka AX obsahuje bod C, je $Y = C$; nerovnice (2) se změní jen v tom, že druhá z nich přejde v rovnici $XY = CX$.

Platnost (1) tedy zůstává beze změny.

c) Obr. 34 ukazuje na deltoidu $ABCD$, vepsaném kružnici k o středu X, že vztah (1) neplatí. Zde je totiž

$$AX = BX = CX = DX = r, \quad BD = 2r. \qquad (3)$$

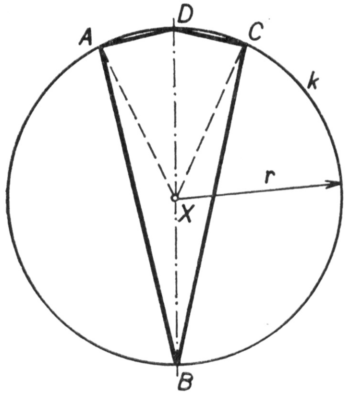
Body A, C jsou zvoleny tak, aby platilo

$$AD + CD < r. \qquad (4)$$

Je tedy podle (3) a (4)

$$AX + BX + CX = 3r,$$
$$AD + BD + CD = 2r + AD + CD < 3r,$$

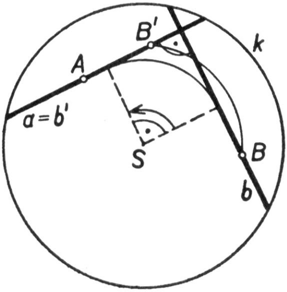
tj. (1) neplatí.



Obr. 34

3b. Uvnitř kružnice k se středem S a poloměrem r jsou dány dva body A, B tak, že A, B, S neleží v přímce. Sestrojte dvě navzájem kolmé tětivy kružnice k, které mají tutéž délku a obsahují po řadě body A, B.

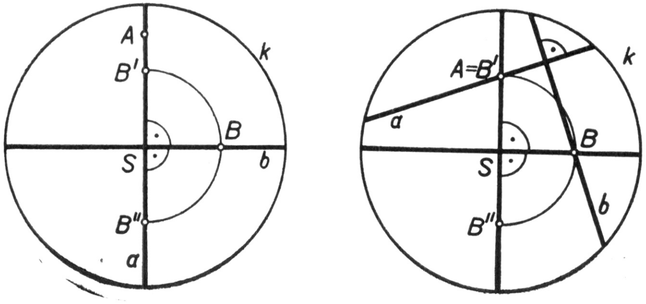
ŘEŠENÍ. Rozbor. Předpokládejme, že tětivy $a \perp b$ na obr. 35 splňují podmínky úlohy. Je tedy možno např. rotací v kladném smyslu otáčení přenést tětivu b v tětivu $a = b'$; bod B po otočení pak přejde v bod B' ležící na přímce a. Pro $B' \neq A$ tak dospějeme k jednoduché konstrukci tětivy $a = AB'$. Protože o vzájemné poloze bodů A, B' nemůžeme předem rozhodnout, provedeme diskusi:



Obr. 35

I. Vyšetříme nejprve případ, kdy $\sphericalangle ASB$ je pravý. Otočíme-li tětivu b procházející bodem B kolem středu S o pravý úhel v kladném nebo záporném smyslu, přejde v tětivu a procházející bodem A (obě mají totiž tutéž délku). Otočený bod B' leží tedy také na tětivě a. A tu je třeba rozeznávat dva případy:

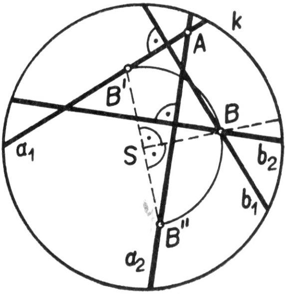
a) $B' \neq A$, b) $B' = A$ (obr. 36ab).



Obr. 36ab

V případě b) má úloha nekonečně mnoho řešení: je to libovolná tětiva a procházející bodem $A = B'$ a k ní kolmá tětiva b procházející bodem B. V případě a) má úloha jediné řešení: jsou to tětivy $SA = a$, $SB = b$.

II. Nyní vyšetříme případ, kdy $\sphericalangle ASB$ není pravý (obr. 36c). Postupujeme jako v případě I. V tomto případě neleží bod B' na přímce AS, proto je vždy $B' \neq A$. Sestrojíme tětivy $a_1 = AB'$ a $a_2 = AB''$; k nim vedeme bodem B tětivy kolmé: $b_1 \perp a_1$; $b_2 \perp a_2$. Úloha má v tomto případě dvě řešení (obr. 36c).



Obr. 36c

3. KATEGÓRIA Z

1. Zlomok $\frac{178}{39}$ vyjadrite ako súčet dvoch kladných zlomkov s menovateľmi 3, 13 a s celočíselnými čitateľmi. Nájdite všetky riešenia úlohy.

RIEŠENIE. Podľa textu úlohy má platiť

$$\frac{178}{39} = \frac{x}{3} + \frac{y}{13},$$

t. j.

$$13x + 3y = 178,$$

kde x, y sú prirodzené čísla. Upravme túto rovnicu na tvar

$$y = 59 + \frac{1 - 13x}{3}.$$

Pretože hľadáme celočíselné a kladné riešenia, musíme určiť číslo x tak, aby zlomok

$$V = \frac{1 - 13x}{3}$$

bolo celé číslo väčšie než -59.

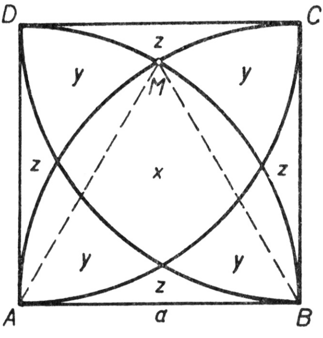
Pre $x = 1, 4, 7, 10, 13$ nadobúda výraz V hodnoty -4; -17; -30; -43; -56, takže

x	1	4	7	10	13
y	55	42	29	16	3

iných možností niet. Výpočtom sa ľahko presvedčíme, že daný zlomok možno teda rozložiť takto:

$$\frac{178}{39} = \frac{1}{3} + \frac{55}{13} = \frac{4}{3} + \frac{42}{13} = \frac{7}{3} + \frac{29}{13} =$$

$$= \frac{10}{3} + \frac{16}{13} = \frac{13}{3} + \frac{3}{13}.$$



Obr. 37

2. Je dán čtverec, jehož strana má velikost a. Z jeho vrcholů jsou opsány dovnitř čtverce čtvrtkružnice s poloměrem a. Tím se rozdělí čtverec na 9 částí tří různých tvarů (viz obr. 37). Vypočtěte obsahy těchto částí.

ŘEŠENÍ. Průsečík oblouků opsaných z bodů A, B označme M. Písmeny x, y, z označme obsahy vzniklých ploch tak, jak je uvedeno na obr. 37. Potom platí

$$z = P - (P_1 + 2P_2)\,,$$

kde P je obsah čtverce $ABCD$ o straně a, P_1 obsah rovnostranného $\triangle ABM$ o straně a a P_2 obsah kruhové výseče o poloměru a a středovém úhlu $30°$ (tj. $2P_2$ je součet obsahů výsečí AMD a BCM). Tudíž

$$z = a^2 - \frac{1}{4}\,a^2 \,.\, \sqrt{3} - 2\pi a^2 \,.\, \frac{30}{360}\,,$$

tj.

$$z = \frac{a^2}{12}\,(12 - 2\pi - 3\sqrt{3}) \doteq 0{,}043a^2\,. \qquad (1)$$

Dále platí

$$y = P - (P_3 + 2z)\,,$$

kde P_3 je obsah čtvrtkruhu ABD o poloměru a, tj.

$$y = \frac{a^2}{12}\,(\pi + 6\sqrt{3} - 12) \doteq 0{,}128a^2\,. \qquad (2)$$

Pro x platí

$$x = P - (4y + 4z)\,,$$

tj.

$$x = \frac{a^2}{3}\,(3 + \pi - 3\sqrt{3}) \doteq 0{,}315a^2\,. \qquad (3)$$

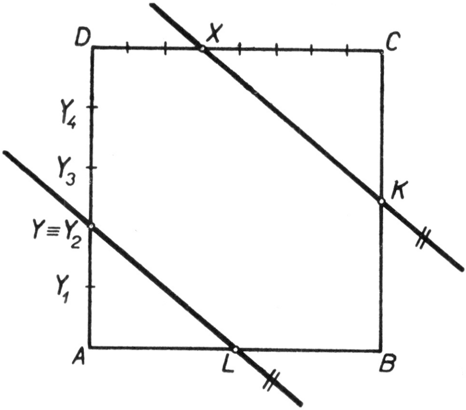
Řešení úlohy je dáno vztahy (1), (2) a (3).

3. Je dán čtverec $ABCD$. Stranu CD rozdělte na n shodných dílů tak, aby na ní existoval dělicí bod X takový, že

$$KX \parallel YL\,, \qquad (1)$$

kde K je střed strany BC, L je střed strany AB a Y je dělicí bod na straně AD, která je rozdělena na 5 shodných dílů.

Určete nejmenší n této vlastnosti.



Obr. 38

ŘEŠENÍ (obr. 38). Ze vztahu (1) plyne

$$\triangle ALY \sim \triangle CXK,$$

tj.

$$\frac{AY}{AL} = \frac{CK}{CX}. \tag{2}$$

Označíme-li délku strany čtverce a, potom rovnost (2) nabývá tvaru

$$\frac{r \cdot \dfrac{a}{5}}{\dfrac{a}{2}} = \frac{\dfrac{a}{2}}{s \cdot \dfrac{a}{n}}, \tag{3}$$

kde r, s jsou přirozená čísla vyhovující nerovnostem

$$1 \leqq r < 5, \quad 1 \leqq s < n. \tag{4}$$

Vztah (3) po úpravě zní

$$4rs = 5n\,. \tag{5}$$

Z poslední rovnosti je zřejmé, že n je násobkem 4. Nejmenší takové n je 4. Pro $n = 4$ dává (5)

$$rs = 5\,,$$

což však nelze splnit čísly r, s vyhovujícími nerovnostem (4). Pro $n = 8$ rovnost (5) zní

$$rs = 10\,.$$

Této nerovnosti vyhovují čísla $r = 2$, $s = 5$, která také splňují nerovnosti (4). Potom $AY = \dfrac{2}{5}\,a$, $CX = \dfrac{5}{8}\,a$. V tomto případě skutečně platí (1).

ZÁVĚR. Nejmenší n požadované vlastnosti je $n = 8$.

JINÉ ŘEŠENÍ. Označme Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 dělicí body na straně AD (viz obr. 38). Ze vztahu (2) plyne

$$CX = \frac{CK\,.\,AL}{AY} = \frac{a^2}{4}\,.\,\frac{1}{AY}\,.$$

Pro Y_1 platí

$CX = \dfrac{a^2}{4}\,.\,\dfrac{5}{a} = \dfrac{5}{4}\,a$, tj. X by nebyl bodem úsečky DC;

pro Y_2 je

$$CX = \frac{a^2}{4}\,.\,\frac{5}{2a} = \frac{5}{8}\,a, \quad \text{tj.} \quad n = 8;$$

pro Y_3 je

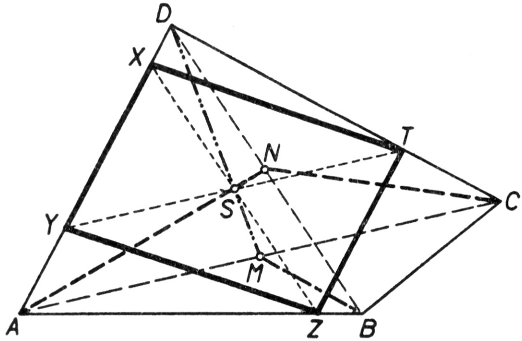
$$CX = \frac{a^2}{4}\,.\,\frac{5}{3a} = \frac{5}{12}\,a, \quad \text{tj.} \quad n = 12;$$

pro Y_4 je

$$CX = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{5}{4a} = \frac{5}{16}\,a, \quad \text{tj.} \quad n = 16.$$

Nejmenší n požadované vlastnosti je tedy $n = 8$.

4. Je daný štvoruholník $ABCD$, ktorého strany majú dĺžky $AB = 70$ mm, $BC = 35$ mm, $CD = 75$ mm, $DA = 65$ mm a uhlopriečka BD má dĺžku 70 mm. Zostrojte štvoruholník $ABCD$ a potom zostrojte rovnobežník, ktorého všetky štyri vrcholy ležia na obvode štvoruholníka $ABCD$ a jeho uhlopriečky sú rovnobežné s uhlopriečkami daného štvoruholníka. Zostrojte najskôr stred hľadaného rovnobežníka.



Obr. 39

RIEŠENIE. Zostrojíme najskôr $\triangle ABD$ a potom v polrovine opačnej ku BDA zostrojíme $\triangle BCD$ (obr. 39). Stred S hľadaného rovnobežníka patrí do dvoch geometrických miest bodov: do geometrického miesta $\mathbf{\Gamma}_1$ stredov všetkých priečok štvoruholníka $ABCD$ rovnobežných s priamkou AC a do geometrického miesta $\mathbf{\Gamma}_2$ stredov všetkých priečok štvoruholníka $ABCD$ rovnobežných s priamkou BD. Geometrické miesto Γ_1 je zjednotením ťažníc BM, DM trojuholníkov ACB, ACD bez bodov B, D, geometrické miesto Γ_2 je zjednotením ťažníc AN, CN trojuholníkov BDA, BDC bez bodov A, C. Body M, N sú teda v uvedenom poradí stredmi uhlopriečok AC, BD. Geometrické miestá Γ_1, Γ_2 majú jediný spoločný bod. Je to priesečník S ťažníc AN, DM. Bodom S vedieme rovnobežky s priamkami AC, BD. Tieto rovnobežky pretnú obvod štvoruholníka $ABCD$ v bodoch X, Y, Z, T, ktoré sú vrcholmi hľadaného rovnobežníka.

Skúška konštrukcie vyplýva z vety: Vypuklý štvoruholník je rovnobežníkom práve vtedy, keď sa jeho uhlopriečky navzájom delia na dve zhodné časti.

Z vrcholov X, Y, Z, T výsledného rovnobežníka ležia X, Y na strane AD, Z na strane AB a T na strane CD.