19. ročník matematické olympiády

V. Soutěžní úlohy III. kola kategorie A

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor): 19. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1969-1970. 12. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1971. pp. 124–142.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404601

V. Soutěžní úlohy III. kola kategorie A

1. Nechť pro přirozená čísla a, b platí

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1},$$

kde p je prvočíslo větší než 2. Potom p je dělitelem čísla a. Dokažte.

ŘEŠENÍ. DŮKAZ. Uvedením na společného jmenovatele $(p-1)!$ vyjde v čitateli $2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots (p-1) + 1 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots (p-1) + 1 \,.\, 2 \,.\, 4 \ldots (p-1) + \ldots$ $\ldots + 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (p-2)$, tj. součet součinů prvků v kombinacích $(p-2)$ třídy z $(p-1)$ prvků $1, 2, 3, \ldots$ $\ldots (p-1)$.

Označme tento součet písmenem s.

Utvořme nyní mnohočleny $(p-2)$ho stupně

$$(p-2)(p-3)(p-4)\ldots[p-(p-1)],$$
$$(p-1)(p-3)(p-4)\,.\,[p-(p-1)],$$
$$(p-1)(p-2)(p-4)\ldots[p-(p-1)],\ldots$$
$$\ldots,(p-1)(p-2)(p-3)\ldots[p-(p-2)]$$

a sečtěme je. Je to zřejmě zase součet s, jen jsou sčítanci v obráceném pořádku [např. první mnohočlen $(p-2)\,.$ $.\,(p-3)(p-4) \ldots [p-(p-1)]$ je roven součinu $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (p-2)$].

Prostý člen *výsledného* mnohočlenu v p, totiž $(-2)(-3)\ldots[-(p-1)]+(-1)(-3)\ldots[-(p-1)]+$ $+(-1)(-2)(-4)\ldots[-(p-1)]$ atd. až $(-1)(-2)\,.$ $.\,(-3)\ldots[-(p-2)]$ je zase, avšak záporně vzatý součet s (počet záporných činitelů v každém součinu je $(p-2)$, tedy lichý).

Ze všech ostatních členů výsledného mnohočlenu lze vytknout p. Dostáváme tak rovnici

$$s = p\,.\,M - s\,,$$

kde M je mnohočlen v p s celistvými součiniteli.

Z toho plyne $2s = p\,.\,M$ a $s = p\,\dfrac{M}{2} = pM_1\,,$

položíme-li $M = 2M_1$. (M je totiž sudé číslo.)

Celkem tedy součet prvních $(p-1)$ členů harmonické řady je $\dfrac{pM_1}{(p-1)!}$. Jelikož p je prvočíslo, zůstává jako činitel v čitateli, ať lze zlomek krátit nebo ne.

POZNÁMKA. Úlohu lze řešit také pomocí kongruencí modulu p.

JINÉ ŘEŠENÍ. Protože je p prvočíslo větší než 2, je p liché a počet sčítanců je sudý. Upravíme

$$\frac{a}{b} = \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p-2}\right) + \ldots + \\ + \left(\frac{1}{\frac{p-1}{2}} + \frac{1}{\frac{p+1}{2}}\right) \tag{1}$$

a sečteme jednotlivé dvojice v závorkách takto:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p-n} = \frac{p-n+n}{n(p-n)} = \frac{p}{n(p-n)}\,.$$

Celý součet potom je

$$\frac{p}{1(p-1)}+\frac{p}{2(p-2)}+\ldots+\frac{p}{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}}=$$

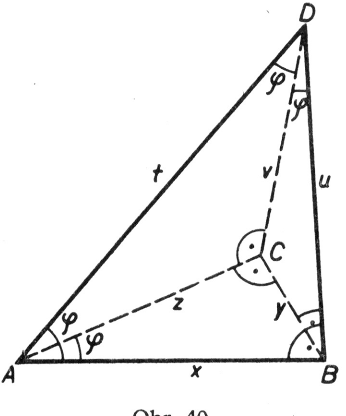
$$=p\left(\frac{č}{1\,.\,2\ldots\frac{p-1}{2}\,.\left(\frac{p-1}{2}+1\right)\ldots.(p-1)}\right)=$$

$$=\frac{p\,.\,č}{(p-1)!}\,. \qquad (2)$$

Čitatel $č$ je přirozené číslo, není nutno ho vyčíslovat. Nyní upravím rovnost (1) s použitím (2) a dostáváme: $a\,.\,(p-1)!=p\,.\,č\,.\,b$.

$(p-1)!$ však podle zadání nemůže být dělitelno p, tudíž je a dělitelno p, což jsme měli dokázat.

Řešil Pavel Pudlák,
3. D, SVVŠ Praha



Obr. 40

2. Stěny čtyřstěnu $ABCD$ jsou čtyři navzájem podobné pravoúhlé trojúhelníky s pravými úhly při vrcholech B, C. Nejdelší hrana čtyřstěnu má délku 1. Zjistěte, zda takový čtyřstěn existuje. Určete, která jeho hrana je nejdelší, která hrana je nejkratší a jakou má délku.

ŘEŠENÍ. Předpokládejme, že existuje čtyřstěn žádaných vlastností. Nechť stěny, které mají pravé úhly při vrcholu B, jsou ABD a BCD (obr. 40). Protože každá stěna má právě jeden pravý úhel, jsou pravé úhly $\sphericalangle ACB$ a $\sphericalangle ACD$. Označme délky hran podle obr. 40 ($x = AB$, $y = BC$, $z = CA$, $t = AD$, $u = BD$, $v = CD$) a dále označme φ velikost ostrého úhlu $\sphericalangle DAB$. Pak plyne z $\triangle ABD$

$$u = t \sin \varphi \,, \quad x = t \cos \varphi \,. \tag{1}$$

Pro trojúhelník $\triangle ACD$ máme dvě možnosti: a) $\sphericalangle CAD = \varphi$, b) $\sphericalangle ADC = \varphi$. V případě a) dostaneme

$$z = t \cos \varphi \,, \quad v = t \sin \varphi \,. \tag{2}$$

Z (1) a (2) plyne $x = z$, což je spor, neboť v pravoúhlém trojúhelníku ABC je x délka přepony a z délka odvěsny. Případ a) je tedy nemožný a nastane případ b). Je tedy

$$v = t \cos \varphi \,, \quad z = t \sin \varphi \,. \tag{3}$$

Z (1) a (3) plyne

$$u = z \,, \quad v = x \,. \tag{4}$$

Z (1) a (3) plyne dále $\frac{z}{x} = \operatorname{tg} \varphi$; podle textu úlohy je buď $\frac{z}{x} = \cos \varphi$, nebo $\frac{z}{x} = \sin \varphi$. Ze vztahu $\frac{z}{x} = \sin \varphi$ dostaneme vzhledem k vztahu $\frac{z}{x} = \operatorname{tg} \varphi$ vztah $\cos \varphi = 1$, což je nemožné. Je tedy $\frac{z}{x} = \cos \varphi$, tj. podle (1)

$$z = t \cos^2 \varphi \,. \tag{5}$$

Z $\triangle ABC$ pak plyne $\frac{y}{x} = \sin \varphi$ (neboť $\sphericalangle ACB$ je pravý a $\frac{z}{x} = \cos \varphi$), tj. podle (1)

$$y = t \sin \varphi \cos \varphi \,. \tag{6}$$

Z (3) a (5) vyjde $\sin \varphi = \cos^2 \varphi$, neboli

$$\sin^2 \varphi + \sin \varphi - 1 = 0$$

a odtud ($\sin \varphi > 0$)

$$\sin \varphi = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \doteq 0{,}618\,. \tag{7}$$

Podle (7) je $\varphi < \frac{\pi}{4}$ $\left(\sin \varphi < \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, tj.

$$\sin \varphi < \cos \varphi\,. \tag{8}$$

Tak dostaneme z (1), (3), (4), (5) a (6) vzhledem k (8) uspořádání délek hran podle velikosti:

$$y < u = z < x = v < t\,.$$

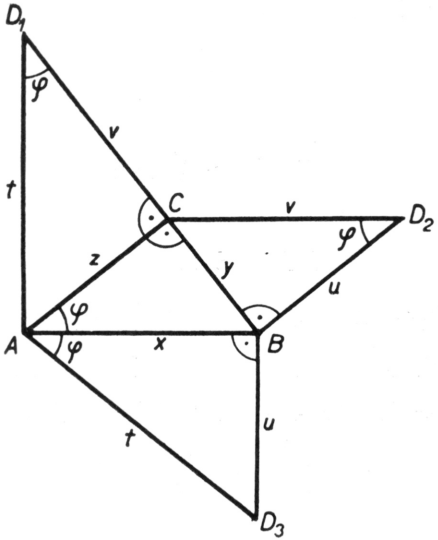
Podle textu úlohy je $t = 1$; nejkratší hrana je BC; její délka je vzhledem k (7), (6)

$$BC = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

neboť $\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$; numericky $BC \doteq 0{,}486$. Ze vztahu (7) zjistíme, že je $\varphi \doteq 38°10'$.

Existence čtyřstěnu je prokázána sestrojením sítě, která je na obr. 41. Vyjde se z $\triangle ACD$ ($\varphi \doteq 38°10'$), sestrojí se $\triangle ABC$ a bod D leží na kolmici vztyčené k rovině ABC tak, že $BD = u = z$.

JINÉ ŘEŠENÍ. Předpokládejme, že takový čtyřstěn **Z** existuje a promítněme ho pravoúhle do roviny ABC. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\triangle ABC$ má pravý úhel při vrcholu C. Trojúhelník ACD má pravý úhel při vrcholu C a tento úhel se při promítnutí zachová. Obraz D_1 bodu D musí tedy ležet na přímce BC. Obdobně $\triangle ABD$ má pravý úhel při vrcholu B a ten se při



Obr. 41

promítnutí opět zachová. Bod D_1 musí proto ležet i na přímce $r \perp AB$, $B \in r$. Z toho plyne, že $B \equiv D_1$, tudíž BD je kolmé na rovinu ABC a $\triangle BCD$ má pravý úhel při vrcholu B.

Poněvadž AB je odvěsnou v $\triangle ABD$, je

$$AD > AB > AC\,.$$

Obdobně je

$$AD > CD > BD\,,$$

$$AD > CD > BC\,.$$

Nejdelší je tedy hrana $AD = 1$.

Z podobnosti $\triangle ABD \sim \triangle DBC$ plyne

$$\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{CD},$$

takže

$$\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{CD} > 1,$$

tudíž

$$BD > BC.$$

(Nemůže být $\frac{BD}{AD} = \frac{BD}{CD}$, neboť by potom bylo $AD = CD$, což by byl spor s již dokázaným $AD > CD$.) Obdobně se dokáže, že platí $\triangle ACD \sim \triangle BCA$ a odtud

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{AB},$$

takže

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{AB} > 1,$$

proto

$$AC > BC.$$

Nejkratší hranou tedy bude BC.

Poněvadž $\triangle ABC$, $\triangle BCD$ mají být podobné, musí pro jejich odvěsny ($AC > BC$, $BD > BC$) platit

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BD}{BC},$$

tedy

$$AC = BD.$$

Podobně z $\triangle ACB \sim \triangle DBC$ vyplývá

$$AB = CD.$$

Ve čtyřstěnu **Z** tedy máme

$AD = 1, \quad BC = a, \quad AC = BD = b, \quad AB = CD = c\,.$

Z podobnosti $\triangle\, DBA \sim \triangle\, CBD$ plyne

$$\frac{b}{c} = \frac{a}{b},$$

tedy

$$b^2 = ac\,.$$

Podle Pythagorovy věty máme

$$b^2 + c^2 = 1\,,$$
$$b^2 + a^2 = c^2\,.$$

Z posledních tří rovností plyne

$$ac + c^2 = 1\,,$$
$$ac + a^2 = c^2\,,$$

čili

$$ac = 1 - c^2\,,$$
$$ac = c^2 - a^2\,.$$

Srovnáním dostaneme

$$c^2 = \frac{1 + a^2}{2},$$

což dosadíme do rovnice $ac + c^2 = 1$:

$$a\sqrt{\frac{1 + a^2}{2}} = 1 - \frac{1 + a^2}{2};$$

odtud po úpravě přichází v úvahu jediný kořen

$$a = \sqrt{\sqrt{5} - 2} \tag{1}$$

a pak můžeme též vypočítat

$$c = \sqrt{\frac{1 + a^2}{2}} > a\,. \tag{2}$$

Dokážeme nyní, že náš čtyřstěn **Z** existuje. Z předchozího je jasné, že pravoúhlý trojúhelník ABC s $\sphericalangle C = 90^\circ$ je jednoznačně určen odvěsnou $BC = a$ a přeponou $AB = c$ (viz vzorce (1), (2)). K rovině ABC pak vztyčíme kolmici v bodě B a sestrojíme na ní úsečku $BD = b$. Z Pythagorovy věty pak $CD = c$. Poněvadž $AC \perp BC$, $AC \perp BD$, je také $AC \perp CD$, takže i trojúhelník ACD je pravoúhlý ($\sphericalangle C = 90^\circ$) a platí

$$\begin{aligned} AD^2 &= b^2 + c^2 = (c^2 - a^2) + c^2 = \\ &= 2c^2 - a^2 = 1 + a^2 - a^2 = 1\,. \end{aligned}$$

Podobnost všech čtyř stěn je pak zajištěna vzájemným poměrem hran.

Tím je úloha vyřešena; čtyřstěn existuje, nejdelší hrana je $AD = 1$ a nejkratší $BC = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$.

Řešil Jiří Tůma,
III. roč. SVVŠ, Písek

3. Nájdite všetky reálne čísla x, pre ktoré platí

$$\frac{1}{x + \sqrt{p - x^2}} + \frac{1}{x - \sqrt{p - x^2}} \geqq \frac{1}{p}, \qquad (1)$$

kde p je dané kladné číslo. Urobte diskusiu.

RIEŠENIE. Ak reálne číslo x vyhovuje nerovnosti (1), potom musí preň platiť $p - x^2 \geqq 0$ čiže

$$-\sqrt{p} \leqq x \leqq \sqrt{p} \qquad (2)$$

a súčasne $(x + \sqrt{p - x^2})(x - \sqrt{p - x^2}) \neq 0$ čiže

$$x \neq -\sqrt{\frac{p}{2}}, \qquad x \neq \sqrt{\frac{p}{2}}. \qquad (3)$$

Nech platia vzťahy (2) a (3). Po zlúčení zlomkov na ľavej strane nerovnosti (1) dostaneme

$$\frac{2x}{2x^2 - p} \geqq \frac{1}{p}. \tag{4}$$

a) Nech $2x^2 - p > 0$ čiže

$$\text{buď } x < -\sqrt{\frac{p}{2}}, \quad \text{anebo} \quad x > \sqrt{\frac{p}{2}}. \tag{5}$$

Potom je nerovnosť (4) ekvivalentná s nerovnosťou $2x^2 - 2px - p \leqq 0$, z čoho postupne dostaneme

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 \leqq \frac{1}{4} p (p + 2),$$

$$\frac{1}{2} (p - \sqrt{p(p + 2)}) \leqq x \leqq \frac{1}{2} (p + \sqrt{p(p + 2)}). \tag{6}$$

Pre $p > 0$ zrejme platí $\left(\sqrt{\frac{p}{2}} + 1\right)^2 > \frac{p}{2} + 1$, z čoho postupne dostaneme

$$\sqrt{\frac{p}{2}} + 1 > \sqrt{\frac{p}{2} + 1},$$

$$\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p}{2}} > \frac{1}{2} \sqrt{p(p + 2)},$$

$$-\sqrt{\frac{p}{2}} < \frac{1}{2} (p - \sqrt{p(p + 2)}), \tag{7}$$

z čoho vyplýva, že žiadne z čísel vyhovujúcich ľavej nerovnosti vo vzťahu (6) nesplňuje prvú z nerovností (5). Pretože pre $p > 0$ zrejme platí

$$\sqrt{\frac{p}{2}} < \frac{1}{2} (p + \sqrt{p(p + 2)}),$$

nerovnostiam (5) a (6) súčasne vyhovujú všetky tie x, pre ktoré platí

$$\sqrt{\frac{p}{2}} < x \leqq \frac{1}{2}\left(p + \sqrt{p(p+2)}\right). \tag{8}$$

Čísla určené vzťahom (8) splňujú však podmienku (2) vtedy a len vtedy, keď platí

$$\frac{1}{2}\left(p + \sqrt{p(p+2)}\right) \leqq \sqrt{p} \tag{9}$$

čiže $\sqrt{p(p+2)} \leqq 2\sqrt{p} - p$, z čoho postupne dostaneme

$$p^2 + 2p \leqq 4p - 4p\sqrt{p} + p^2\,,$$

$$\sqrt{p} \leqq \frac{1}{2},$$

$$0 < p \leqq \frac{1}{4}; \tag{10}$$

obrátením postupu sa však ľahko presvedčíme, že každé číslo určené nerovnosťou (10) vyhovuje tiež nerovnosti (9).

Zistili sme teda, že ak x vyhovuje nerovnosti (1) za podmienky a), potom musí platiť:

$$\text{Ak} \quad 0 < p \leqq \frac{1}{4}, \quad \text{je}$$

$$\sqrt{\frac{p}{2}} < x \leqq \frac{1}{2}\left(p + \sqrt{p(p+2)}\right), \tag{8'}$$

$$\text{ak} \quad p > \frac{1}{4}, \quad \text{je} \quad \sqrt{\frac{p}{2}} < x \leqq \sqrt{p}\,. \tag{11}$$

Obrátením postupu ľahko zistíme, že pre čísla x určené vzťahmi (8'), resp. (11), platí: $\left(x - \dfrac{p}{2}\right)^2 \leqq \dfrac{1}{4}\,p(p+2)$,

$$2x^2 - 2px - p \leqq 0\,,$$

čo je za podmienky a) ekvivalentné s nerovnosťou (4) a teda aj s nerovnosťou (1) pričom podmienky (2) a (3) sú zrejme splnené.

b) Nech $2x^2 - p < 0$ čiže

$$-\sqrt{\frac{p}{2}} < x < \sqrt{\frac{p}{2}}. \tag{12}$$

Čísla určené vzťahom (12) zrejme splňujú podmienky (2) a (3) a za uvedeného predpokladu je nerovnosť (4) ekvivalentná s nerovnosťou

$$2x^2 - 2px - p \geqq 0, \quad \text{z ktorej postupne máme}$$

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 \geqq \frac{1}{4}p(p+2) \quad \text{čiže buď}$$

$$x \leqq \frac{1}{2}\left(p - \sqrt{p(p+2)}\right) \tag{13}$$

alebo

$$x \geqq \frac{1}{2}\left(p + \sqrt{p(p+2)}\right). \tag{14}$$

Vzhľadom na (7) je množina čísel súčasne splňujúcich (12) a (13) vždy neprázdna a určená vzťahom

$$-\sqrt{\frac{p}{2}} < x \leqq \frac{1}{2}\left(p - \sqrt{p(p+2)}\right), \tag{15}$$

zatiaľ čo množina čísel súčasne vyhovujúcich vzťahom (12) a (14) je pre každé $p > 0$ zrejme prázdna.

Obrátením postupu sa opäť ľahko presvedčíme, že čísla určené vzťahom (15) za podmienky (12) vyhovujú nerovnosti (4) a teda aj nerovnosti (1).

ZÁVER. Nerovnosti (1) vyhovujú pre $0 < p \leqq \frac{1}{4}$ všetky čísla x určené vzťahmi (8′) a (15) a pre $p > \frac{1}{4}$ všetky čísla x určené vzťahmi (11) a (15).

4. Po moři (jeho hladina je považována za rovinu) pluly dvě lodi stálými rychlostmi při stálých kursech. Jejich vzájemná vzdálenost činila v 9.00 h 20 námořních mil, v 9.35 h 15 mil a v 9.55 h 13 mil.

a) Zjistěte, jakou funkcí času je druhá mocnina jejich vzdálenosti.

b) Zjistěte, kdy si byly lodi nejblíže a jaká byla přitom jejich vzdálenost.

ŘEŠENÍ. a) Snadno se ukáže, že čtverec vzdálenosti obou lodí je kvadratickou funkcí času.

Buďte A, B polohy lodí v okamžiku $t = 0$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektory jejich rychlostí. Polohy v okamžiku t tedy budou $A + t\mathbf{u}$, $B + t\mathbf{v}$. Čtverec vzdálenosti $d^2(t)$ je skalární čtverec vektoru

$$(A - B) + t\mathbf{u} - t\mathbf{v} \,,$$

tedy

$$d^2(t) = (A - B, A - B) + 2t(\mathbf{u} - \mathbf{v}, A - B) + \\ + t^2(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}) \,,$$

což je skutečně kvadratická funkce času t.

b) Zvolíme-li za začátek časové osy čas 9.00 h a za jednotku času 5 minut, máme najít minimum kvadratické funkce

$$d^2(t) = at^2 + bt + c \,,$$

známe-li její hodnoty

t	0	7	11
$d(t)$	20	15	13
$d^2(t)$	400	225	169

Máme tedy $c = 400$

a pro a, b soustavu rovnic

$$49a + 7b = -175$$

$$121a + 11b = -231\,,$$

jejímž řešením je $a = 1$, $b = -32$.

Je tedy

$$d^2(t) = t^2 - 32t + 400\,.$$

Hledané minimum nastane pro $t = 16$ a činí

$$d^2(16) = 256 - 512 + 400 = 144\,,$$

$$\text{tzn. } d(16) = 12\,.$$

Obě lodi si tedy byly navzájem nejblíže v

$$9^{00} + 16.0^{05} = 10^{20}$$

hodin a byly od sebe vzdáleny 12 námořních mil.

5. V rovine sú dané dva rôzne body S, A tak, že $\overline{SA} = 1$, a je dané reálne číslo k. Bod A otočíme okolo stredu S o orientovaný uhol veľkosti φ do polohy A', k bodu A' zostrojíme jeho obraz A'' v rovnoľahlosti so stredom S a s koeficientom rovnoľahlosti $\dfrac{1}{\cos\varphi - k\sin\varphi}$. Keď nadobúda φ všetky hodnoty, pre ktoré $\cos\varphi - k\sin\varphi \neq 0$, vyplnia body A'' priamku prechádzajúcu bodom A. Dokážte.

RIEŠENIE. Označme x', y' kartézske súradnice bodu A', x'', y'' kartézske súradnice bodu A'' v súradnicovej sústave, ktorá má počiatok v bode S a bod A má v nej súradnice $[1; 0]$. Potom platí

$$x' = \cos\varphi\,, \quad y' = \sin\varphi\,,$$

$$x'' = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi - k\sin\varphi}\,, \quad y'' = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi - k\sin\varphi}\,. \tag{1}$$

Vyšetrujme najskôr tie hodnoty φ, pre ktoré je $\cos\varphi \neq 0$, $\sin\varphi \neq 0$, $\cos\varphi - k\sin\varphi \neq 0$. Z (1) vyplýva

$$x'' = \frac{1}{1 - k\,\mathrm{tg}\,\varphi}, \qquad y'' = \frac{1}{\mathrm{cotg}\,\varphi - k}. \tag{2}$$

Za uvedených predpokladov pre φ je podľa (1) $x'' \neq 0$, $y'' \neq 0$ a z (2) dostaneme

$$k\,.\,\mathrm{tg}\,\varphi = 1 - \frac{1}{x''}, \quad \mathrm{cotg}\,\varphi = k + \frac{1}{y''}. \tag{3}$$

Po vynásobení oboch rovníc zo vzťahu (3) a jednoduchej úprave dostaneme

$$ky'' - x'' + 1 = 0, \tag{4}$$

čo je rovnica priamky prechádzajúcej bodom $A = [1; 0]$.

Zo vzťahu (1) je vidieť, že aj v prípade, keď buď $\cos\varphi = 0$ alebo $\sin\varphi = 0$, leží príslušný bod A'' na (4).

Obrátene zvoľme bod $[x'', y'']$ priamky (4), pre ktorý je $x'' \neq 0$, $y'' \neq 0$. Z druhej rovnice (3) určíme φ. Platí preň $\mathrm{cotg}\,\varphi \neq 0$, pretože inak by z druhej rovnice (3) vyplývalo $ky'' + 1 = 0$ a v dôsledku toho zo (4) $x'' = 0$. Pretože podľa druhej rovnice (3) je $\mathrm{cotg}\,\varphi - k \neq 0$, je tiež $\cos\varphi - k\sin\varphi \neq 0$. Z existencie $\mathrm{cotg}\,\varphi$ a z nerovnosti $\mathrm{cotg}\,\varphi \neq 0$ vyplýva $\sin\varphi \neq 0$, $\cos\varphi \neq 0$. Tým sme našli hodnotu φ, ku ktorej prislúcha zvolený bod $[x'', y'']$ priamky (4).

Zostávajú ešte tie body priamky (4), pre ktoré je buď $x'' = 0$ alebo $y'' = 0$. Pre $y'' = 0$ dostaneme $x'' = 1$, t. j. bod A'', ktorý zodpovedá hodnotám $\varphi = 2n\pi$ alebo $\varphi = \pi + 2n\pi$. Keďže $k \neq 0$ (inak by nemohlo byť $x'' = 0$), dostaneme pre $x'' = 0$ zo (4) $y'' = -\dfrac{1}{k}$. Bod

$\left[0, -\frac{1}{k}\right]$ zodpovedá hodnotám $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ alebo $\varphi = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$.

Tým je veta úplne dokázaná.

INÉ RIEŠENIE. Zvoľme kartézsku súradnicovú sústavu tak, aby $S = [0, 0]$ a $A = [1, 0]$. Bodu S priradíme komplexné číslo $s = 0$ a bodu A komplexné číslo $a = 1$. Bodu A' priradíme číslo a', bodu A'' číslo a''.

Keďže otočeniu o uhol φ odpovedá násobenie čísla $a = 1$ komplexnou jednotkou s amplitúdou φ, dostaneme

$$a' = \cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi .$$

Číslo a'' dostaneme tak, keď číslo a' vynásobíme reálnym číslom $\dfrac{1}{\cos \varphi - k \sin \varphi}$ čiže

$$a'' = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi - k \sin \varphi} + \mathrm{i}\, \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - k \sin \varphi} .$$

Ak označíme $a'' = a_1'' + \mathrm{i}a_2''$, kde a_1'', a_2'' sú reálne súradnice bodu A'' v nami zvolenej súradnicovej sústave, dostaneme

$$a_1'' - ka_2'' = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi - k \sin \varphi} - k\, \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - k \sin \varphi} = 1$$

čiže
$$a_1'' - ka_2'' = 1 .$$

Body A'' prislúchajúce jednotlivým hodnotám φ ležia teda na priamke určenej rovnicou $x - ky = 1$. Na tejto priamke leží však aj bod A, pretože jeho súradnice vyhovujú danej rovnici.

Dokážme teraz, že aj obrátene každý bod tejto priamky je nejakým bodom A''. Ľubovoľný bod tejto priamky má súradnice $[1 + ky_0, y_0]$. Musíme dokázať, že existuje taký uhol φ_0, že

$$y_0 = \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi_0 - k \sin \varphi_0},$$

t. j. $y_0 \cos \varphi_0 - ky_0 \sin \varphi_0 = \sin \varphi_0$ a $\cos \varphi_0 - k \sin \varphi_0 \neq$ $\neq 0$. Pre $y_0 = 0$ existuje $\varphi_0 = 0$. Ak $y_0 \neq 0$, musí byť aj $\sin \varphi_0 \neq 0$ a pre hľadané φ_0 máme rovnicu

$$y_0 \operatorname{cotg} \varphi_0 - ky_0 = 1 \quad \text{čiže}$$

$$\operatorname{cotg} \varphi_0 = \frac{1}{y_0} + k. \tag{5}$$

Pretože funkcia $\operatorname{cotg} \varphi$ nadobúda všetky reálne hodnoty, uhol φ_0 existuje pre každú hodnotu $y_0 \neq 0$. Pretože $\operatorname{cotg} \varphi_0 \neq k$, dostaneme z rovnosti (5) obráteným postupom, že

$$y_0 = \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi_0 - k \sin \varphi_0}.$$

Potom však

$$x_0 = 1 + ky_0 = 1 + \frac{k \sin \varphi_0}{\cos \varphi_0 - k \sin \varphi_0} =$$

$$= \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_0 - k \sin \varphi_0}.$$

Tým je úloha vyriešená.

Riešil Štefan Sakáloš,
2. D, SVŠ Prievidza

6. Najděte všechna reálná x, pro něž platí

$$\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}\,[\log_{\operatorname{tg} x}(2 + 4 \cos^2 x) - 2] \geqq 0. \tag{1}$$

ŘEŠENÍ. Levá strana nerovnice (1) má podle definic druhé odmocniny a logaritmické funkce smysl pro všechna x, pro něž současně platí

$$\operatorname{tg} x - 1 \geqq 0\,,$$
$$\operatorname{tg} x > 0, \quad \operatorname{tg} x \neq 1\,,$$
$$2 + 4\cos^2 x > 0\,.$$

Všechny tyto nerovnosti jsou současně splněny, právě když je

$$\operatorname{tg} x > 1\,. \tag{2}$$

Za toho předpokladu je nerovnice (1) ekvivalentní nerovnici

$$\log_{\operatorname{tg} x}(2 + 4\cos^2 x) \geqq 2\,. \tag{3}$$

Nerovnice (1) je tedy ekvivalentní soustavě tvořené nerovnicemi (2) a (3). Podle (2) je základ logaritmu v nerovnici (3) větší než 1, a proto soustava nerovnic (2) a (3) je ekvivalentní soustavě nerovnic

$$\operatorname{tg} x > 1\,,$$
$$2 + 4\cos^2 x \geqq \operatorname{tg}^2 x\,. \tag{4}$$

Dosadíme-li do druhé nerovnice soustavy (4)

$$\cos^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1}\,,$$

což platí pro všechna x, pro něž je definována funkce $\operatorname{tg} x$, dostáváme následující soustavu nerovnic

$$\operatorname{tg} x > 1\,, \tag{5}$$
$$\operatorname{tg}^4 x - \operatorname{tg}^2 x - 6 \leqq 0\,,$$

která je ekvivalentní soustavě (4).

Upravujme postupně druhou nerovnici soustavy (5). Dostáváme

$$\left(\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{2}\right)^2 \leqq \frac{25}{4}\,.$$

Vzhledem k tomu, že $\operatorname{tg} x > 1$, je tedy

$$\operatorname{tg}^2 x \leqq 3\,,$$

tj.

$$-\sqrt{3} \leqq \operatorname{tg} x \leqq \sqrt{3} \, .$$

Přihlédneme-li k první nerovnici soustavy (5), máme

$$1 < \operatorname{tg} x \leqq \sqrt{3} \, ,$$

odkud již plyne řešení soustavy nerovnic (5), a tedy také nerovnice (1):

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x \leqq \frac{\pi}{3} + k\pi \, .$$

kde k je libovolné celé číslo.