21. ročník matematické olympiády

II. Prípravné úlohy I. kola

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 21. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1971-1972. 14. mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1973. pp. 32–69.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404623

II. Prípravné úlohy I. kola

1. *KATEGÓRIA A*

A–P–1

1. Pre všetky kladné čísla a, b a všetky prirodzené čísla n platí

$$n.a.b^{n-1} \leqq a^n + (n-1)b^n.$$

Dokážte.

RIEŠENIE. Je známe, že geometrický priemer kladných čísel nie je väčší ako ich priemer aritmetický. Špeciálne pre čísla

$$\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}, \underbrace{\frac{b}{a}, \frac{b}{a}, \ldots, \frac{b}{a}}_{(n-1)\text{–krát}}$$

to znamená, že platí

$$\sqrt[n]{\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} \cdot \frac{b}{a} \cdot \ldots \cdot \frac{b}{a}} \leqq \frac{1}{n}\left[\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + \frac{b}{a} + \ldots + \frac{b}{a}\right]$$

čiže

$$1 \leqq \frac{a^{n-1}}{nb^{n-1}} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{b}{a},$$

z čoho už máme

$$n.a.b^{n-1} \leqq a^n + (n-1)b^n.$$

2. Buďte α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, označme $V = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$. Trojúhelník ABC je ostroúhlý (pravoúhlý, tupoúhlý), právě když $V < 1$ ($V = 1$, $V > 1$).

Dokažte.

ŘEŠENÍ. Podle kosinové věty v trojúhelníku platí

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \tag{1}$$

Podle sinové věty je $a = k\sin\alpha$, $b = k\sin\beta$, $c = k\sin\gamma$ (k je konst.). (2)

Dosazením (2) a (1) dostaneme po zjednodušení

$$\sin^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma,$$

tj.

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$

a cyklickou záměnou

$$\left.\begin{aligned} \sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha &= 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha, \\ \sin^2\gamma + \sin^2\alpha - \sin^2\beta &= 2\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Sečtením těchto rovností dostaneme

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2[\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha + \\ + \sin\alpha\sin\gamma\cos\beta].$$

Poněvadž

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - (\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \\ + \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha + \sin\alpha\sin\gamma\cos\beta),$$

můžeme předcházející rovnost vzhledem k tomu, že

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) = -1$$

psát

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2\,(1 + \cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma).$$

Nahradíme-li siny kosiny, dostaneme

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma = V. \qquad (4)$$

Odtud plyne:

Je-li trojúhelník ostroúhlý, je $\cos\alpha . \cos\beta . \cos\gamma > 0$ a $V < 1$,
je-li trojúhelník pravoúhlý, je $\cos\alpha . \cos\beta . \cos\gamma = 0$ a $V = 1$,
je-li trojúhelník tupoúhlý, je $\cos\alpha . \cos\beta . \cos\gamma < 0$ a $V > 1$.

Obráceně:

Je-li $V > 1$, musí být $-2\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma > 0$, což nastane, je-li jeden z úhlů α, β, γ tupý; je-li $V = 1$, pak musí být právě jeden z úhlů α, β, γ pravý (vzhledem, že $\alpha + \beta + \gamma = \pi$) a trojúhelník je pravoúhlý; je-li $0 < V < 1$, je $\cos\alpha . \cos\beta . \cos\gamma > 0$ a všechny úhly jsou ostré.

JINÉ ŘEŠENÍ (bez užití věty sinové a kosinové)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 + \cos 2\beta}{2} +$$
$$+ \frac{1 + \cos 2\gamma}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma) =$$
$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1 - 4\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma) =$$
$$= 1 - 2\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma,$$

neboť

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 2\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) +$$
$$+ \cos^2\gamma - \sin^2\gamma = -2\cos\gamma[\cos(\alpha - \beta) - \cos\gamma] - 1 =$$
$$= -2\cos\gamma[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] - 1 =$$
$$= -1 - 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

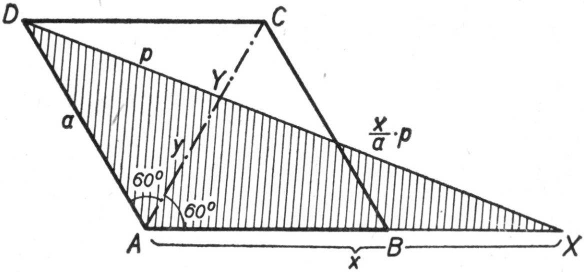
takže

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma$$

a dále jako v prvém řešení.

3. Je dán kosočtverec $ABCD$ o straně délky a s úhlem $\sphericalangle\ ABC = 60°$. Označme X libovolný bod polopřímky AB a Y průsečík přímky AC s přímkou DX. Vyjádřete délku y úsečky AY pomocí délky x úsečky AX. Řešte aspoň dvěma různými způsoby.

ŘEŠENÍ TRIGONOMETRICKÉ (obr. 1).



Obr. 1

Polopřímka $\overrightarrow{AC}$ je osou úhlu $\sphericalangle\ DAX$; podle známé věty je

$$XY = \frac{x}{a} \,.\, DY = \frac{px}{a} \,.$$

Dále použijeme kosinové věty na $\triangle\ ADY$ a $\triangle\ AXY$; vyjde

$$\begin{aligned} p^2 &= a^2 + y^2 - ay, \\ \frac{x^2}{a^2}\, p^2 &= x^2 + y^2 - xy \,. \end{aligned} \tag{1}$$

První rovnici (1) znásobíme číslem $\dfrac{x^2}{a^2}$ a porovnáme s druhou rovnicí; dostaneme

$$x^2 + \frac{x^2y^2}{a^2} - \frac{x^2y}{a} = x^2 + y^2 - xy\,. \tag{2}$$

Rovnici (2) znásobíme číslem $\dfrac{a^2}{y}$:

$$x^2y - ax^2 = a^2y - a^2x\,.$$

A odtud za předpokladu $y \neq 0$, $x \neq a$ vyjde

$$y = \frac{ax}{a + x}\,. \tag{3}$$

Dodatečně ověříme, že vzorec (3) platí i pro $x = 0, a$.

ŘEŠENÍ METODOU SOUŘADNIC

Zvolíme polopřímku $\overrightarrow{AB}$ za kladnou poloosu x soustavy ortonormálních souřadnic; pak je $A = [0; 0]$, $X = [x; 0]$,

$D = \left[-\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}\sqrt{3}\right]$, $Y = [t; t\sqrt{3}]$, $y = 2t$. Číslo t vypočteme z podmínky, že body D, X, Y leží v přímce. Vyjde

$$t = \frac{ax}{2(a + x)}$$

a odtud pro y opět vzorec (3).

Úloha A–P–3 je celkem nezajímavá; její řešení nevyžaduje žádný zvláštní vtip.

A–P–4

4. V prostoru jsou dány body $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n = A_0$. Zvolme bod B_0, k němuž sestrojme další body $B_1, B_2, \ldots, B_n$

tak, aby pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$ střed dvojice $B_{k-1} B_k$ splynul se středem dvojice $A_{k-1} A_k$.
Určete nutné a postačující podmínky pro to, aby $B_n = B_0$.

ŘEŠENÍ. Nejlépe snad analyticky. Označme a_k, resp. b_k radiusvektor bodu A_k, resp. B_k pro $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Podle konstrukce bodů B_k je vždy

$$b_{k-1} + b_k = a_{k-1} + a_k \,.$$

Tyto rovnosti napíšeme pro $k = 1, 2, \ldots, n$, opatříme střídavými znaménky a sečteme. Dostaneme

$$\left.\begin{array}{rcl} b_0 + b_1 & = & a_0 + a_1 \\ -b_1 - b_2 & = & -a_1 - a_2 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ b_{n-1} + b_n & = & a_{n-1} + a_n \end{array}\right\} \begin{array}{l} n \\ \text{liché} \end{array}$$
$$\overline{\quad b_0 + b_n = a_0 + a_n = 2a_0 \quad}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} b_0 + b_1 & = & a_0 + a_1 \\ -b_1 - b_2 & = & -a_1 - a_2 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ -b_{n-1} - b_n & = & -a_{n-1} - a_n \end{array}\right\} \begin{array}{l} n \\ \text{sudé} \end{array}$$
$$\overline{\quad b_0 - b_n = a_0 - a_n = 0 \quad}$$

Při n lichém je $b_0 = b_n$ právě tehdy, jestliže $b_0 = a_0$, tj.

$$(B_n = B_0) \Longleftrightarrow (B_0 = A_0).$$

Při n sudém je *vždy* $b_n = b_0$, tj. $B_n = B_0$.

POZNÁMKA. Slovem prostor rozumíme eukleidovský prostor dimenze $n \geqq 1$.

B–P–1

1. Je daná kubická rovnica

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0\,. \tag{1}$$

Určte vzťah medzi koeficientami a_0, a_1, a_2, ktorý je nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby dva korene rovnice (1) boli dve reálne opačné čísla, obidve rôzne od nuly.

RIEŠENIE. Predpokladajme, že dva korene danej rovnice sú α, $-\alpha$, $\alpha \neq 0$. Potom platí

$$\alpha^3 + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0\,,$$

$$-\alpha^3 + a_2\alpha^2 - a_1\alpha + a_0 = 0\,.$$

Po sčítaní a odčítaní týchto rovníc dostaneme

$$2a_2\alpha^2 + 2a_0 = 0\,, \quad 2\alpha^3 + 2a_1\alpha = 0\,,$$

z čoho po krátení oboch rovníc máme

$$a_2\alpha^2 + a_0 = 0\,, \quad \alpha^2 + a_1 = 0\,. \tag{2}$$

Vylúčením α^2 z (2) dostaneme

$$a_2(-a_1) + a_0 = 0 \quad \text{čiže} \quad a_0 = a_1a_2.$$

Nech je $a_0 = a_1a_2$. Potom rovnica (1) bude mať tvar

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_1a_2 = 0\,,$$

z ktorého postupne dostaneme

$$x^2(x + a_2) + a_1(x + a_2) = 0\,,$$

$$(x + a_2)(x^2 + a_1) = 0\,. \tag{3}$$

Z rozkladu (3) je zrejmé, že nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby rovnica (1) mala dva nenulové navzájom opačné reálne korene je, aby platilo

$$a_0 = a_1 a_2 \quad \text{a} \quad a_1 < 0 \,.$$

$\boxed{\text{B–P–2}}$

2. Ak je prirodzené číslo $m = 2^n - 7$ prvočíslo, kde n je prirodzené číslo, potom je $n > 3$ a n dáva pri delení štyrmi zvyšok 3. Obrátene, ak vyhovuje prirodzené číslo n uvedeným podmienkam, nemusí byť $m = 2^n - 7$ prvočíslo. Dokážte obidve vety.

RIEŠENIE. Pre prirodzené čísla $n = 1, 2, 3$ nájdeme z rovnice $m = 2^n - 7$ príslušné funkčné hodnoty $m = -5, -3, 1$, z ktorých žiadna nie je kladné prvočíslo. K tomu, aby prirodzené číslo m bolo kladným prvočíslom je teda nutné, aby platilo $n > 3$ čiže $n \geqq 4$. To však znamená, že $m \geqq 9$.

Každé prirodzené číslo n, ktoré je väčšie než 3, možno zapísať práve v jednom z tvarov $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$, $4k + 3$, kde k je číslo prirodzené. K tomu, aby sme dokázali vetu uvedenú v úlohe, stačí dokázať, že v prípadoch, keď $n = 4k$, $n = 4k + 1$ a $n = 4k + 2$, je m číslo zložené. To však ľahko dokážeme buď priamym použitím vzorca pre rozklad dvojčlena $a^n - b^n$ alebo použitím vety, ktorú pomocou tohto vzorca ľahko odvodíme:

(V) Pre každé zložené číslo $n = rs$, kde $r > 1$ a $s > 1$ sú prirodzené čísla, je $a^n - 1$, kde a je prirodzené číslo, deliteľné jednak číslom $a^r - 1$ a jednak číslom $a^s - 1$. Ak je $a > 1$, je tiež $a^r - 1 > 1$, $a^s - 1 > 1$.

a) Ak je $n = 4k$, potom $m = 2^{4k} - 7 = 2^{2.2k} - 1 - 6$. Pretože číslo $2^{2.2k} - 1$ je podľa vety (V) deliteľné číslom $2^2 - 1 = 3$ a aj číslo 6 je deliteľné číslom 3, je číslom 3 deliteľný aj ich rozdiel, t. j. číslo m. Ak však $m > 3$ je deliteľné číslom 3, nemôže byť prvočíslom.

b) Ak je $n = 4k + 1$, potom $m = 2^{4k+1} - 7 = 2(2^{4k} - 1) - 5$. Pretože podľa vety ($V$) je číslo $2^{4k} - 1$ deliteľné číslom $2^4 - 1 = 15 = 3.5$, je číslo $2^{4k} - 1$ vždy deliteľné číslom 5. Potom je však číslom 5 deliteľný nielen jeho dvojnásobok, ale aj jeho dvojnásobok zmenšený o 5 čiže číslo m. Vzhľadom na to, že $m > 5$ a je deliteľné číslom 5, nie je prvočíslom.

c) Ak je $n = 4k + 2$, potom $m = 2^{4k+2} - 7 = 2^{2(2k+1)} - 1 - 6$. Pretože číslo $2^{2(2k+1)} - 1$ je deliteľné číslom $2^2 - 1 = 3$, rovnakou úvahou ako v a) dostaneme, že m je deliteľné číslom 3 a vzhľadom na to, že je väčšie než 3, nemôže byť prvočíslom.

K tomu, aby prirodzené číslo $m = 2^n - 7$ bolo prvočíslom, nestačí, aby pre n boli splnené podmienky $n > 3$ a $n = 4k + 3$, kde k je prirodzené číslo. K dôkazu tohto tvrdenia nám stačí nájsť príklad čísla m uvedených vlastností, ktoré bude zložené. Ak zvolíme $n = 7$, dostaneme $m = 2^7 - 7 = 121 = 11^2$. Podobne pre $n = 11$ dostaneme $m = 2^{11} - 7 = 2041 = 13.157$, čo je taktiež číslo zložené.

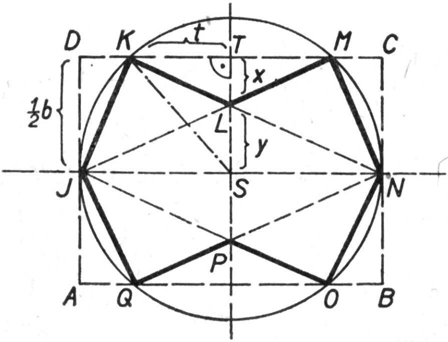
POZNÁMKA. Vzorce pre rozklad dvojčlena $a^n - b^n$, resp. $a^n + b^n$ sú žiakom škôl druhého cyklu iste známe. Sú uvedené tiež v zv. 14 Školy mladých matematikov (*Fr. Veselý*: *O dělitelnosti čísel celých*) na str. 16 a veta (V) na str. 93. Ďalšie vety o deliteľnosti prirodzených čísel sú obsiahnuté v učive aritmetiky pre 7. triedu *ZDŠ*.

B–P–3

3. Do daného obdélníka $ABCD$, kde $AB > BC$, je vepsán osmiúhelník $JKLMNOPQ$, jak je naznačeno na obrázku 2; osmiúhelník vznikl ze dvou obdélníků $JKNO$, $JMNQ$ o společné úhlopříčce JN, přičemž bod J je středem úsečky AD a N středem úsečky BC.

Vypočtěte obsah osmiúhelníka pomocí rozměrů $a = AB$, $b = BC$ daného obdélníka.

ŘEŠENÍ. Konstrukce osmiúhelníka je patrná z obr. 2. Při označení z obr. 2 položme $LT = x$, $LS = y$, $KT = t$. Obsah p obdélníka $JKNO$ je $p = JN . JD$ neboli



Obr. 2

$$p = \frac{1}{2}\, ab\,.$$

Obsah r kosočtverce $JLNP$ je

$$r = ay\,,$$

takže obsah s osmiúhelníka je $s = 2p - r$ neboli

$$s = a(b - y). \tag{1}$$

Vypočítáme y. V trojúhelníku SKT je $\sphericalangle\, T = 90°$, $SK = \dfrac{1}{2}\, a$; podle Pythagorovy věty dostaneme

$$t^2 = SK^2 - ST^2$$

neboli

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2}\,. \tag{2}$$

Ze stejnolehlosti o středu L trojúhelníků LNS, LKT plyne

$$\frac{TL}{TK} = \frac{SL}{SN}$$

neboli

$$\frac{x}{t} = \frac{y}{\frac{1}{2}a}.$$

Po dosazení ze (2) a snadné úpravě obdržíme

$$x = \frac{2yt}{a} = \frac{y\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

neboli

$$x = \frac{y\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \tag{3}$$

Vedle toho platí $TL + LS = \frac{1}{2}b$ neboli

$$x + y = \frac{b}{2};$$

dosadíme-li sem ze vztahu (3), dostáváme postupně

$$y\left(1 + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right) = \frac{b}{2},$$

$$y \,.\, \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{b}{2},$$

$$y = \frac{ab}{2(a + \sqrt{a^2 - b^2})}.$$

Po dosazení do (1) dostaneme

$$s = a\left(b - \frac{ab}{2(a + \sqrt{a^2 - b^2})}\right)$$

neboli

$$s = \frac{ab(a + 2\sqrt{a^2 - b^2})}{2(a + \sqrt{a^2 - b^2})},$$

což lze popřípadě násobením $a - \sqrt{a^2 - b^2}$ v čitateli i jmenovateli upravit na tvar

$$s = \frac{a(2b^2 - a^2 + a\sqrt{a^2 - b^2})}{2b}.$$

Tím je řešení provedeno.

B–P–4

4. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky 1. Na polopřímce opačné k BA je zvolen bod M, pro který platí $0 < BM < \frac{1}{2}$.

a) Na straně BC určete body E, F ($BE < BF$) tak, aby přímky ME, MF rozdělily čtverec $ABCD$ na tři obrazce: trojúhelník, čtyřúhelník a pětiúhelník téhož obsahu. Vyjádřete délky BE, CF jako funkce délky BM.

b) Zjistěte, zda podmínka $BM < \frac{1}{2}$ není zbytečná a zda při jejím splnění je úloha řešitelná.

ŘEŠENÍ. a) Má-li jedna z částí (a to prostřední) být pětiúhelník, musí protnout přímka ME ještě stranu AD v bodě $G \neq D$ a přímka MF ještě stranu CD v bodě $H \neq D$. Části jsou pak lichoběžník $BEGA$, pětiúhelník $EFHDG$ a trojúhelník FCH (obr. 3). Označme podle obr. 3: $BM = x$, $BE = t$, $CF = y$, $AG = u$, $CH = z$. Podle podmínky úlohy o obsazích je pak

$$\frac{1}{2}(t + u) = \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{2}yz = \frac{1}{3}. \qquad (1)$$

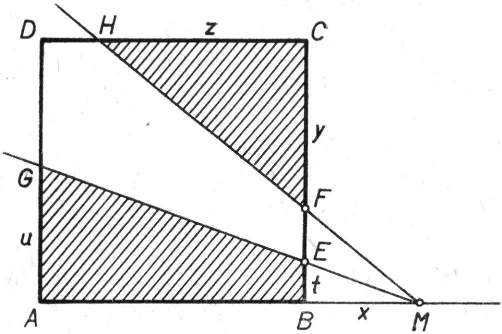
Mimoto plyne z podobnosti $\triangle MBE \sim \triangle MAG$ a $\triangle CHF \sim$
$\sim \triangle BMF$

$$\frac{t}{x} = \frac{u}{1 + x}, \tag{2}$$

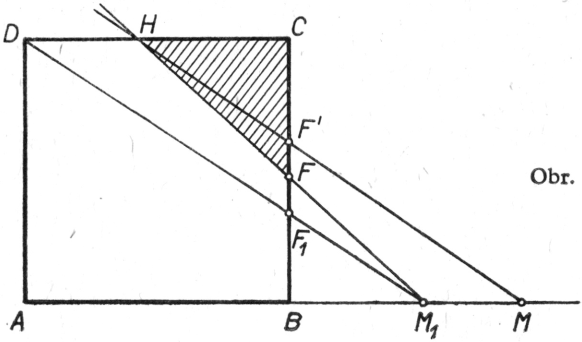
$$\frac{y}{z} = \frac{1 - y}{x}.$$

Z první rovnice (1) a z první rovnice (2) dostaneme po vyloučení u

$$t = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{1 + 2x}. \tag{3}$$



Obr. 3



Obr. 4

Z druhé rovnice (1) a druhé rovnice (2) dostaneme po vyloučení z kvadratickou rovnici pro y

$$3xy^2 + 2y - 2 = 0\,, \tag{4}$$

která má jediný kladný kořen (při daném x)

$$y = \frac{1}{3x}\left(\sqrt{1 + 6x} - 1\right). \tag{5}$$

b) Podmínka $x < \frac{1}{2}$ není zbytečná. Je-li totiž $x = \frac{1}{2}$, pak přímka M_1D oddělí trojúhelník F_1DC, jehož obsah je (viz obr.4) roven $\frac{1}{3}$, neboť $CD = 1$, $CF_1 = \frac{2}{3}$, $BF_1 = \frac{1}{3}$, $BM_1 = \frac{1}{2}$.

V tomto případě však nevznikne pětiúhelník $EFHDG$. Přímka M_1F, kde $BF > BF_1$, oddělí trojúhelník FCH o obsahu menším než $\frac{1}{3}$. Tím spíše to platí o trojúhelníku $F'CH$, který oddělí přímka MF', kde $BM > \frac{1}{2}$.

c) Je-li $x < \frac{1}{2}$, plyne z (3) $t < \frac{1}{3}$, neboť $2x < 1 + 2x$, $\frac{2x}{1 + 2x} < 1$, $\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{1 + 2x} < \frac{1}{3}$. Z prvé rovnice (1) pak máme $u = \frac{2}{3} - t$, takže platí $u < 1$. Dále dokážeme, že pro y vypočtené podle vzorce (5) platí

$$y > \frac{2}{3}\,. \tag{6}$$

Kdyby totiž bylo $y \leqq \frac{2}{3}$, platilo by

$$3xy^2 + 2y - 2 \leqq 3x \, . \, \frac{4}{9} + \frac{4}{3} - 2 = \frac{2}{3}(2x - 1) < 0 \,,$$ což by bylo ve sporu se (4). Z (6) však plyne podle druhé rovnice (1)

$$z = \frac{2}{3y} < 1 \, .$$

Bod H tedy skutečně leží mezi C, D.

3. *KATEGORIE C*

C–P–1

1. Z letiště odlétá letadlo na lince I každý třetí den, na lince II každý pátý den a na lince III každou neděli a středu. Dne 4. ledna startovala letadla na všech třech linkách. Kolikrát ještě do konce roku budou letadla na všech třech linkách odlétat v týž den?

KOMENTÁŘ A ŘEŠENÍ. Jde o tzv. „*slovní úlohu*“ — prvním úkolem je sestavit matematickou formulaci úlohy. Vzhledem k textu bude asi třeba rozlišit dva případy:

(a) 4. ledna je neděle;
(b) 4. ledna je středa.

Každý z případů budeme řešit jako samostatnou úlohu.

(a) Zavedeme jakousi „*soustavu souřadnic*“. Pokládáme čtvrtého ledna za nultý den a označíme přirozeným číslem x den, kdy nastane společný start letadel všech tří linek.

- ● buď je číslo x násobkem čísel 3, 5, 7, tedy i čísla 105 (odlety v neděli);
- ●● nebo je číslo x násobkem čísel 3, 5, tedy i čísla 15, a zároveň je číslo x–3 násobkem sedmi (odlety ve středu).

Mimoto je $x \leqq 361$ ($= 365 - 4$) pro rok obyčejný, resp. $x \leqq 362$ ($= 366 - 4$) pro rok přestupný.

Matematická formulace úlohy (a) zní:
Máme určit všecka přirozená čísla $x \leqq 361$ (resp. 362), která splňují jednu z podmínek: x je násobkem 105 nebo x je násobkem 15 a zároveň $x - 3$ je násobkem 7.

Důrazně upozorňujeme, že je vždy třeba sestavit nejdříve matematickou formulaci slovní úlohy, než tuto úlohu začneme řešit. Tato formulace se může skládat z několika rovnic a nerovnic, ale může znít také tak, jak jsme výše uvedli.

ŘEŠENÍ matematické úlohy: Hledané násobky čísla 105 jsou tři: 105, 210, 315. Je-li x násobek 15 a x–3 násobkem 7, je $x = 15a$, $x - 3 = 7b$, kde a, b jsou nezáporná celá čísla. Čísla a, b vyhovují rovnici:

$$15a = 7b + 3\,. \tag{1}$$

I když jste se naučili řešit takovéto rovnice, můžete se zde snadno seznámit s principem jejich řešení (dáváme tomu přednost před experimentálním řešením, které bychom doporučovali pro kategorii Z). Z (1) plyne

$$14a - 7b = 3 - a\,.$$

Číslo $3 - a$ musí tedy být násobkem sedmi, tj. $a = 3, 10, 17, 24, 31, \ldots$. Protože $x = 15a$, dostaneme $x = 45, 150, 255, 360, 465, \ldots$. Naší úloze vyhovují jen první čtyři čísla. Úloha (a) má tudíž sedm řešení x

$$105, 210, 315, 45, 150, 255, 360. \tag{2}$$

Obdobně formulujeme a řešíme úlohu (b). Dostaneme opět řešení $x = 105, 210, 315$ a soustavu rovnic

$$x = 15a, \quad x - 4 = 7b\,,$$

odtud

$$15a = 7b + 4$$

čili

$$7(2a - b) = 4 - a$$

a dále $a = 4, 11, 18, \ldots$, $x = 60, 165, 270$. Úloha (b) má tedy jen šest řešení:

$$105, 210, 315, 60, 165, 270. \qquad (3)$$

POZNÁMKY. 1. Je třeba překontrolovat, že nalezená možná řešení (2), (3) skutečně splňují podmínky úlohy. (2) a (3) jsme získali rozborem, ke kterému musíme připojit zkoušku.

2. Ukázalo se, že počet řešení nezáležel na tom, zda rok byl přestupný či obyčejný. Řešení (2) však ukazují, že kdybychom o málo posunuli výchozí den (6. ledna místo 4. ledna) byla by přestupnost roku rozhodující.

Můžete si snadno sestavit varianty úlohy C–P–1. Místo letadel můžete uvést vlaky (mezinárodní spoje), místo čísel 3, 5 u linek I, II zvolit čísla 2, 3, místo neděle a středy zvolit třeba úterý a čtvrtek. Velmi doporučujeme:

- ● znázornit situaci na číselné ose pomocí milimetrového měřítka,
- ●● zopakovat některé vlastnosti dělitelnosti, které se potřebují při řešení rovnice (1).

C–P–2

2. Jsou-li p, q prvočísla větší než 3, pak $p^2 - q^2$ je dělitelné číslem 24. Dokažte.

KOMENTÁŘ A ŘEŠENÍ. Tematika této úlohy je z aritmetiky přirozených čísel. K tomu podotýkáme: je naprosto nezbytné cvičit se v tzv. algebraických úpravách; bez rutiny v tomto matematickém „řemesle" ani nejvtipnější a nejnápaditější řešitel nedořeší řadu úloh. Je však nesympatické cvičit takovéto úpravy samoúčelně; číselná teorie je jeden z úseků matematiky, který poskytuje dosti příležitostí k „algebraickému počítání" a navíc dává dosti zajímavé výsledky.

Nyní k naší úloze: Obě prvočísla p, q jsou větší než 3 a tedy lichá. Nabízí se rozklad

$$p^2 - q^2 = (p + q)(p - q). \qquad (1)$$

Čísla $p + q$ i $p - q$ jsou sudá, proto z (1) plyne

$$\frac{p^2 - q^2}{4} = \frac{p+q}{2} \cdot \frac{p-q}{2} \,. \tag{2}$$

Číslo na levé straně (2) i oba činitelé na pravé straně jsou celá. Dokážeme-li, že $\frac{p^2 - q^2}{4}$ je násobek šesti, bude úloha rozřešena. Je dobré uvědomit si větu, která se často v teorii čísel užívá: Jsou-li p, q dvě nesoudělná lichá čísla, jsou i celá čísla $\frac{p+q}{2}$, $\frac{p-q}{2}$ nesoudělná. Věta se dokáže sporem: kdyby platilo $\frac{p+q}{2} = ka$, $\frac{p-q}{2} = kb$ ($k > 1$ celé), bylo by $p = k \,.\, (a + b)$, $q = k\,(a - b)$, tj. čísla p, q by měla společného dělitele k.

Budeme-li se pokoušet dokázat dělitelnost čísla $\frac{p^2 - q^2}{4}$ šesti, musíme dokázat, že jedno z čísel $\frac{p+q}{2}$, $\frac{p-q}{2}$ je násobek tří, druhé, třeba totéž, je násobkem dvou. Je však zřejmé, že obě čísla $\frac{p+q}{2}$, $\frac{p-q}{2}$ nemohou být sudá nebo lichá, neboť by jejich součet a rozdíl, tj. čísla p, q, byla dvě sudá čísla. Obdobně nahlédneme, že při dělení třemi nemohou tato čísla dávat zbytky 1; 1 nebo 1; 2 nebo 2; 2; v každém z těchto případů by totiž jejich součet nebo rozdíl byl násobkem tří, a to je nemožné (p, q jsou prvočísla větší než 3). Z toho plyne, že aspoň jedno z čísel $\frac{p+q}{2}$, $\frac{p-q}{2}$ je násobkem tří. Je vidět, že při dokazování jsme pomocnou větu vůbec nepotřebovali.

Naše úloha má však i jiná řešení. Víme, že každé prvočíslo větší než 3 se dá vyjádřit ve tvaru $6x \pm 1$, x je přirozené číslo.

Důkaz je snadný; prvočíslo dává při dělení šesti některý ze zbytků 1, 2, 3, 4, 5. Avšak
$6x + 2 = 2(3x + 1), 6x + 3 = 3(2x + 1), 6x + 4 = (3x + 2).2$ nejsou prvočísla. Zbývá tedy jen $6x + 1, 6x + 5 = 6(x + 1) - 1$.

Použijeme-li této *pomocné věty*, je

$$p^2 - q^2 = (6a \pm 1)^2 - (6b \pm 1)^2 = 36a^2 \pm 12a \mp 12b - 36b^2 =$$
$$= 12[(3a^2 \pm a) - (3b^2 \pm b)] = 12[a(3a \pm 1) - b(3b \pm 1)]\,. \quad (3)$$

Snadno nahlédneme, že pro libovolné celé číslo t je $t.(3t \pm 1)$ sudé. Je tedy

$$a(3a \pm 1) - b(3b \pm 1)$$

sudé a podle (3) je $p^2 - q^2$ násobkem čísla 24.

Uvedeme ještě jedno řešení, v němž se užívá pojmu kongruence. (Viz brožura č. 21 z edice *Škola mladých matematiků* od *Al. Apfelbecka*.)

Připomeňme *definici*:

Celé číslo a je kongruentní s celým číslem b podle modulu m, kde m je celé číslo, právě když m je dělitelem rozdílu $a - b$. Tuto relaci zapisujeme

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Platí

$$p^2 - q^2 = (p - q)(p + q).$$

Je-li $p \equiv q \pmod 3$, pak $3/p - q$; není-li $p \equiv q \pmod 3$, je např. $p = 3k + 1$, $q = 3l + 2$ (nebo obráceně), takže $3/p+q$. Vždy tedy platí $3/p^2 - q^2$.

Obě čísla $p - q$, $p + q$ jsou sudá. Kdyby žádné z nich nebylo dělitelné čtyřmi, bylo by $p - q \equiv p + q \equiv 2 \pmod 4$, takže číslo $(p + q) - (p - q) = 2q$ bylo by dělitelné 4, což není možné. Tedy vždy platí $8/p^2 - q^2$.

Poněvadž čísla 3 a 8 jsou nesoudělná, je tím dokázáno, že pro libovolná dvě prvočísla p, q větší než tři platí

$$24/p^2 - q^2.$$

Přípravnou úlohou k úloze č. 2 je např. tato *úloha*: Dokažte, že rozdíl druhých mocnin libovolných dvou lichých čísel je násobkem čísla 8. (Zde nelze tvrdit, že je násobkem 24, neboť např. $7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40$.) *Důkaz* tvrzení této úlohy je zcela elementární:

$$(2n_1 + 1)^2 - (2n_2 + 1)^2 = 4n_1^2 + 4n_1 - 4n_2^2 - 4n_2 = \\ = 4[n_1(n_1 + 1) - n_2(n_2 + 1)] .$$

Každé z čísel $n_1(n_1 + 1)$, $n_2(n_2 + 1)$ je sudé.
Pravděpodobně by bylo vhodnější formulovat místo *důkazové úlohy* raději *úlohu určovací* asi takto: určete největší násobek čtyř, kterým je dělitelný rozdíl druhých mocnin dvou prvočísel větších než 3.

C–P–3

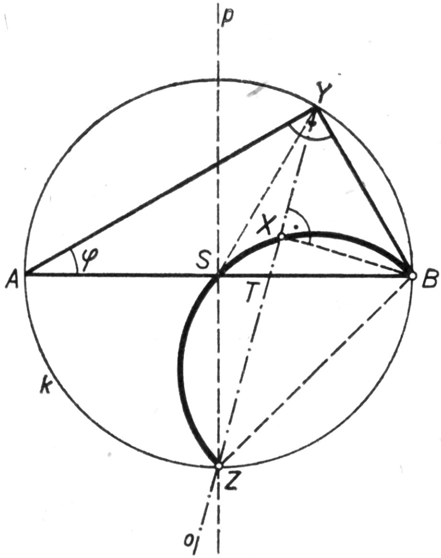
3. V rovine je daná úsečka AB. V jednej z polrovín vyťatých priamkou AB uvažujme všetky pravouhlé trojuholníky ABC s preponou AB. Označme X pätu kolmice vedenej bodom B k osi uhla $\sphericalangle\ BCA$.

Dokážte, že všetky takéto osi uhlov BCA prechádzajú pevným bodom a vyšetrite množinu všetkých bodov X.

KOMENTÁŘ. Tato úloha se skládá ze dvou částí, z nichž druhá navazuje na první. První část je zvláštním případem obecnější úlohy; ta se opírá o jednu vlastnost osy úhlu trojúhelníka a dokazuje se pomocí obvodových úhlů. Domníváme se, že je pro olympioniky užitečné přiučit se těmto poznatkům.

První část úlohy se dá řešit bez obvodových úhlů. Budiž ABY nerovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB (obr. 5). Označme S střed úsečky AB, p osu přepony AB, o osu úhlu $\sphericalangle\ AYB$, Z průsečík přímky p s polopřímkou o (bod Z leží v polorovině opačné k ABY) a označme konečně T průsečík úseček AB, YZ. Zvolíme označení bodů A, B tak, aby platilo $\sphericalangle\ BAY = \varphi < 45°$. Pak se z příslušných trojúhelníků vypočte

$\sphericalangle\ ABY = 90° - \varphi$, $\sphericalangle\ BTY = \sphericalangle\ ATZ = 45° + \varphi$, $\sphericalangle\ SZT = 45° - \varphi$, $\sphericalangle\ AYS = \varphi$, $\sphericalangle\ AYT = 45°$, $\sphericalangle\ SYT = 45° - \varphi$.



Obr. 5

Odtud odvodíme, že trojúhelník YZS je rovnoramenný. Bod Z je tedy průsečík kružnice k se středem S a poloměrem SA s přímkou p. Tak se dokáže tvrzení první části úlohy.

Druhá část je téměř evidentní. Body X vyplní podle *obrácení Thaletovy věty* polokružnici nad průměrem BZ, která prochází bodem S. Krajní body B, Z nepatří množině všech bodů X (obr. 5).

Úlohu lze zobecnit tak, že se požaduje, aby $\sphericalangle\ AYB$ byl konstantní, třeba ostrý nebo tupý. Přitom budeme užívat *věty*:

Je-li k kružnice opsaná trojúhelníku ABY a je-li $AY \neq BY$, pak osa úhlu $\sphericalangle\ AYB$ protíná osu p úsečky AB v tom průsečíku C přímky p s kružnicí k, který náleží polorovině opačné k ABY.

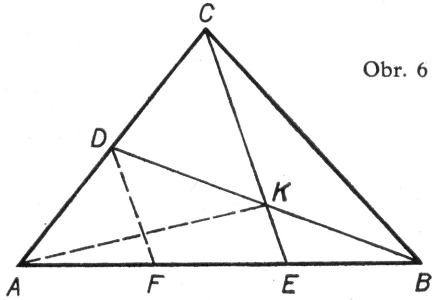
Odůvodnění pomocí obvodových úhlů: oblouky AC, BC ležící v polorovině opačné k ABY jsou shodné, proto jsou shodné i příslušné středové úhly $\sphericalangle\ ASC$, $\sphericalangle\ BSC$ (S je střed kružnice k) i příslušné obvodové úhly $\sphericalangle\ AYC$, $\sphericalangle\ CYB$, tj. polopřímka YC je osa úhlu $\sphericalangle\ AYB$.

Úlohu lze doplnit dodatečnou otázkou: Proběhne-li bod Y oblouk Y_1Y_2, proběhne bod X oblouk X_1X_2; jaký je podíl délek obou těchto oblouků?

Zřejmě stačí zabývat se obloukem BY_1 a příslušným obloukem BX_1. Protože je $\sphericalangle\ BAY_1 = \sphericalangle\ BZY_1 = \sphericalangle\ BZX_1$, je i $\sphericalangle\ BSY_1 = \sphericalangle\ BRX_1$, kde R je střed úsečky BZ. Z toho vyplývá, že podíl délek oblouků BY_1, BX_1 je týž, jako je podíl poloměrů příslušných kružnic, tj. $BS : BR = \sqrt{2}$.

C–P–4

4. V trojúhelníku ABC označíme D střed strany AC a E ten bod strany AB, pro který platí $AE = 2 . BE$. Průsečík příček BD a CE označíme K (obr. 6).



Obr. 6

a) Vypočtěte, v jakém poměru dělí bod K úsečky BD, CE.

b) Vypočtěte, jaké části obsahu daného trojúhelníku jsou obsahy čtyř obrazců, na něž dělí úsečky BD, CE daný trojúhelník ABC.

KOMENTÁŘ. Je to typová úloha, s jejímiž metodami řešení by se měli řešitelé seznámit; její jednodušší verze je přípravná úloha č. 3 kategorie Z XXI. ročníku MO. V komentáři k přípravným úlohám kategorie Z je analyzována nejen úloha č. 3, ale i její složitější verze, obdobná úloze č. 4 kategorie C.

Kdyby šlo jen o část a) (dělení úseček), mohla by se úloha řešit pomocí příček trojúhelníků, což je v podstatě použití podobnosti trojúhelníků. Protože však část b) se týká obsahů trojúhelníků a čtyřúhelníka, bude snad výhodnější řešit celou úlohu C–P–4 pomocí obsahů. Ostatně víme, že téměř každá úloha, která se dá řešit pomocí podobnosti, se dá řešit také pomocí obsahů.

Při řešení naší úlohy a) označme obsahy trojúhelníků ABC, BCK, CDK, BEK, DAK, EAK po řadě P, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5. Dále označme x, y podíly délek úseček:

$$DK = x.BK, \quad EK = y.CK. \tag{1}$$

Z (1) plyne

$$P_2 = xP_1, \quad P_3 = yP_1, \tag{2}$$

neboť trojúhelníky BKC, DKC mají společnou výšku na strany BK, DK; obdobně se dostane druhá rovnost (2).

Dále je

$$P_1 + P_2 = \frac{1}{2} P, \quad P_1 + P_3 = \frac{1}{3} P, \tag{3}$$

tj.

$$2P_1 + 2P_2 = 3P_1 + 3P_3,$$

tj. podle (2)

$$2xP_1 = P_1 + 3yP_1$$

a odtud

$$2x = 1 + 3y\,. \tag{4}$$

Obdobně dostaneme

$$P_4 = P_2, \quad P_5 = 2P_3\,, \tag{5}$$

tj.

$$P_4 = xP_1\,, \quad P_5 = 2yP_1\,,$$

$$P_1 + P_2 = \frac{1}{2}P\,,\; P_3 + P_4 + P_5 = \frac{1}{2}P\,,$$

$$P_1 + xP_1 = yP_1 + xP_1 + 2yP_1\,,$$

a tedy

$$1 + x = y + x + 2y\,,$$

odtud

$$y = \frac{1}{3}\,. \tag{6}$$

Po dosazení z (6) do (4) vyjde

$$x = 1\,. \tag{7}$$

b) Nyní vypočteme P_1, P_2, P_3, $P_4 + P_5$. Z (2), (5), (6), (7) dostaneme

$$P_1 = \frac{1}{4}P\,,\; P_2 = \frac{1}{4}P\,,\; P_3 = \frac{1}{12}P\,,\; P_4 + P_5 = \frac{5}{12}P\,.$$

Pokud jde jen o podíly délek úseček, je výhodné užít aparátu trochu obecnějšího — *věty Menelaovy*. Pro ekonomické vyslovení Menelaovy věty ovšem potřebujeme pojem dělicího poměru, který je jedním ze základních pojmů afinní geometrie. Označíme-li (XYZ) dělicí poměr tří různých kolineárních bodů $\left[(XYZ) = \frac{XZ}{YZ}\right.$, když bod Z neleží mezi X, Y, $(XYZ) = -\frac{XZ}{YZ}$, když bod Z leží mezi X, $\left.Y\right]$, pak můžeme vyslovit Menelaovu větu takto:

Budiž PQR trojúhelník, m přímka jeho roviny, která neprochází žádným z vrcholů P, Q, R a protíná přímky PQ, QR, RP po řadě v bodech R', P', Q'. Pak pro dělicí poměry (cyklicky tvořené) platí

$$(PQR').(QRP').(RPQ') = 1 .$$

V úloze č. 4 aplikujeme Menelaovu větu nejprve na trojúhelník ABD a na přímku CE; dostaneme

$$(ABE).(BDK)(DAC) = 1 ,$$

neboli

$$(-2).(BDK) . \frac{1}{2} = 1 ,$$

odtud

$$(BDK) = -1, \quad BK = DK .$$

Za druhé aplikujeme Menelaovu větu na trojúhelník AEC a přímku BD; dostaneme

$$(AEB).(ECK).(CAD) = 1 ,$$

neboli

$$3.(ECK).(-1) = 1 ,$$

odtud

$$(ECK) = -\frac{1}{3}, \quad EK = \frac{1}{3} CK .$$

Poměry obsahů je pak ovšem třeba počítat zvlášť.

4. *KATEGORIE Z*

Z–P–1

1. Ciferný součet kladného trojciferného prvočísla p_1 je dvojciferné prvočíslo p_2. Ciferný součet prvočísla p_2 je jednociferné prvočíslo $p_3 > 2$. Najděte všecky takové trojice prvočísel p_1, p_2, p_3.

KOMENTÁŘ A ŘEŠENÍ. První úloha je typický příklad úlohy, která se dá sice neobratně řešit experimentálně, ale která zároveň ukazuje význam matematické dedukce. Řešitelé by se měli seznámit s tabulkou prvočísel; v této tabulce najdou 143 trojciferných prvočísel. Vypočtou-li jejich ciferné součty, vyberou-li mezi těmito součty všecka dvojciferná prvočísla a vypočtou opět ciferné součty a mezi nimi zjistí ty, které jsou prvočísla, je úloha řešena. Můžeme vypočítat, kolik času by asi na tento postup potřebovali.

Ukáže se tak, že bude výhodné pomoci si několika jednoduchými úsudky:

(1) Ciferný součet trojciferného čísla je nejvýše $3.9 = 27$. Mezi přirozenými čísly do 27 je jen pět dvojciferných prvočísel; jejich ciferné součty ukazuje tabulka:

Prvočíslo	11	13	17	19	23
Jeho ciferný součet	2	4	8	10	5

Mezi nimi je jen jedno prvočíslo větší než 2; je to 5. Hledané prvočíslo p_2 je tedy 23.

(2) Nyní musí řešitel v určitém systému rozložit číslo 23 v součet tří celočíselných kladných sčítanců, z nichž žádný není větší než 9 (23 je ciferný součet trojciferného čísla!). Rozklady jsou čtyři:

$$
\begin{gathered}
9 + 9 + 5 \\
9 + 8 + 6 \\
9 + 7 + 7 \\
8 + 8 + 7.
\end{gathered}
$$

Zde je plno příležitostí k drobným dedukcím: Aspoň jeden ze sčítanců je 8 nebo 9 (proč?); nejvýše dva sčítanci jsou $\geqq 8$ (proč?); všecky tři sčítance si nejsou rovny (proč?). Zdůrazňujeme, že v této fázi řešení nezáleží na pořádku sčítanců; teprve v další fázi, až z nich budeme tvořit trojciferná čísla, budeme musit přihlížet k jejich uspořádání.

(3) Také při tvoření trojciferných čísel se učí řešitel systematickému postupu. Systém zaručuje, že žádné číslo nevynecháváme a že žádné nebude uvedeno více než jednou.

Následující *tabulka* uvádí přehledně všecka možná řešení:

Rozklad čísla 23	Trojciferná čísla
9 + 9 + 5	~~995~~, 959, 599
9 + 8 + 6	~~986~~, ~~968~~, ~~896~~, 869, 689, ~~698~~
9 + 7 + 7	977, 797, 779
8 + 8 + 7	887, ~~878~~, ~~788~~

Tato tabulka je opět sestavena podle zásad kombinatoriky (v prvním, třetím a čtvrtém řádku jsou to tzv. permutace s opakováním, v druhém řádku permutace bez opakování). Z uvedených 15 čísel odpadají všecka škrtnutá, která zřejmě nejsou prvočísly. Ostatní přezkoumáme buď podle tabulky prvočísel, nebo výpočtem. Při výpočtu užíváme *věty*, kterou je vhodné si připomenout:

Je-li přirozené číslo n složené, pak existuje aspoň jedno prvočíslo $p \leqq \sqrt{n}$, které je dělitelem čísla n.

Této věty užijeme takto: Zjistíme-li např., že žádné prvočíslo $p \leqq \sqrt{599} < 25$ není dělitelem čísla 599, je 599 prvočíslo. K tomu účelu stačí tedy jen přezkoumat dělitelnost čísla 599 prvočísly 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

Jedním z uvedených způsobů zjistíme, že úloha má čtyři řešení: 599, 977, 797, 887.

Obměna úlohy může být např. tato: Určete všechna trojciferná prvočísla, jejichž ciferný součet je dělitelný číslem 21.

2. Dokažte, že výraz

$$V = a^2 - ab + b^2 - a + b + 1$$

nabývá pro každá dvě čísla a, b kladné hodnoty.

KOMENTÁŘ A ŘEŠENÍ. Tato úloha je příkladem na složitější úpravu algebraického výrazu, tj. celistvé racionální funkce o dvou proměnných a, b. Bylo by třeba vysvětlit, že obvykle se snažíme dokázat „nezápornost" takového výrazu tím, že jej upravíme na součet, v němž každý sčítanec je buď druhá (sudá) mocnina reálného čísla, nebo součin činitelů, který je nezáporný, nebo určité kladné číslo. Jako příklad můžeme uvést třeba tuto *úlohu*: Pro všecka reálná čísla a, b, c je

$$s = (a-b)(a-c) + (b-a)(b-c) + (c-a)(c-b) \geqq 0. \qquad \text{(x)}$$

Protože levá strana dokazované nerovnosti je symetrická funkce proměnných a, b, c, můžeme volit označení tak, že je

$$a \geqq b \geqq c\,. \qquad \text{(xx)}$$

Toto je pro mladé řešitele velmi obtížný myšlenkový proces, usnadní se jim konkrétními numerickými příklady, z nichž dedukují, že „nezáleží na tom", které z čísel je označeno a, které b a které c. Přes obtížnost úvahy bychom se jí neměli vyhýbat, neboť jde o důležitý prvek matematické erudice. Rozhodně volba označení proměnných a, b, c představuje vyšší nivó myšlení než fráze: dokážeme větu za předpokladu (xx), obdobně by se dokázala, kdyby platilo např. $b \geqq a \geqq c$ apod.

Upravíme (x):

$$s = (a-b)[(a-c) - (b-c)] + (c-a)(c-b) = (a-b)^2 + \\ + (c-a)(c-b)\,.$$

Podle (xx) je však $c - a \leqq 0$, $c - b \leqq 0$, tj. $(c-a)(c-b) \geqq 0$, a tedy i $s \geqq 0$.

Přípravná úloha vyžaduje jistý trik: pokusíme se zahrnout do jednoho nezáporného členu všecky členy obsahující např. proměnnou a; zbývající členy — které obsahují jen proměnnou b — se pokusíme také upravit v součet dvou nezáporných členů. Konkrétně:

$$V = a^2 + b^2 - ab - a + b + 1\,,$$

$$V = \left(a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 + \frac{1}{2}b + \frac{3}{4}\,. \qquad (1)$$

Člen $\left(a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}\right)^2$ je nezáporný a obsahuje skutečně členy a^2, $-ab$, $-a$ z výrazu V. Zbývající tři členy (1) upravíme takto:

$$\frac{3}{4}b^2 + \frac{1}{2}b + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(b + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\,. \qquad (2)$$

Spojíme-li (1), (2), vyjde

$$V = \left(a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(b + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} > 0$$

pro všecka a, b.

Doplníme-li tento trik ještě malým kouzlem, tj. budeme-li zkoumat výraz $2V$, dostaneme řešení, které šokuje svou krátkostí a elegancí, ale také svou smělostí. Takováto řešení nedoporučujeme.

$$2V = 2a^2 + 2b^2 - 2ab - 2a + 2b + 2\,,$$

$$2V = (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 + 2b + 1)\,,$$

$$2V = (a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b + 1)^2.$$

Čtenáři, kteří znají aspoň trochu afinní geometrii kuželoseček, mohou nahlédnout důkladněji do kuchyně, kde se úlohy připravují, a mohou si podle obecného receptu sestavit jiné obdobné úlohy.

Pokládáme-li a, b za afinní souřadnice bodu v rovině, je rovnice

$$k_{11}a^2 + 2k_{12}ab + k_{22}b^2 + 2k_{13}a + 2k_{23}b + k_{33} = 0 \tag{3}$$

rovnicí kuželosečky, jejíž diskriminant je

$$\Delta = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{vmatrix} . \tag{4}$$

Přitom k_{ij} jsou pevná reálná čísla, z nichž aspoň jedno je různé od nuly. Levá strana (3) je tzv. pozitivně definitní funkcí proměnných a, b, tj. nabývá jen kladných hodnot, právě když rovnice (3) vyjadřuje regulární imaginární elipsu a když je $k_{33} > 0$. Algebraická geometrie nás učí, že rovnice (3) vyjadřuje regulární imaginární elipsu, právě když platí

$$\Delta \neq 0, \ \Delta_{33} > 0 \ , \ \Delta_{22}\Delta_{33} - \Delta_{23}{}^2 > 0 \ , \tag{5}$$

kde Δ_{22}, Δ_{23} a Δ_{33} jsou tzv. minory determinantu (4):

$$\Delta_{22} = k_{11}k_{33} - k_{13}{}^2, \ \Delta_{23} = k_{11}k_{23} - k_{12}k_{13},$$
$$\Delta_{33} = k_{11}k_{22} - k_{12}{}^2. \tag{6}$$

Determinant Δ se počítá podle vzorce

$$\Delta = k_{11}k_{22}k_{33} + 2k_{12}k_{13}k_{23} - k_{11}k_{23}{}^2 - k_{22}k_{13}{}^2 - k_{33}k_{12}{}^2. \tag{7}$$

Přezkoumejme tímto „vyšším aparátem“ znovu součet

$$V = a^2 - ab + b^2 - a + b + 1 \ ,$$

kde je $k_{11} = k_{22} = k_{33} = 1$, $k_{12} = k_{13} = -\dfrac{1}{2}$, $k_{23} = \dfrac{1}{2}$, a tedy podle (6), (7): $\Delta = \dfrac{1}{2}$, $\Delta_{22} = \dfrac{3}{4}$, $\Delta_{23} = \dfrac{1}{4}$, $\Delta_{33} = \dfrac{3}{4}$.

Jsou tedy splněny podmínky (5) a zároveň je $k_{33} = 1 > 0$. Tím je dokázáno, že pro všecka a, b platí $V > 0$.

Jak můžeme sestrojit podle (5) jinou obdobnou úlohu, ukazuje tento příklad: Zvolíme $k_{11} = 2$, $k_{23} = 0$, $k_{22} = k_{12} = k_{13} = 1$; podle (6), (7) vyjde

$$\Delta = k_{33} - 1,\ \Delta_{22} = 2k_{33} - 1,\ \Delta_{23} = -1,\ \Delta_{33} = 1,$$

tj.

$$\Delta_{22}\Delta_{33} - \Delta_{23}^2 = 2(k_{33} - 1)\,.$$

Zvolíme-li $k_{33} > 1$ (např. $k_{33} = 3$), jsou splněny podmínky (5) i $k_{33} > 0$ a funkce

$$s' = 2a^2 + 2ab + b^2 + 2a + 3$$

nabývá jen kladných hodnot. Skutečně je

$$s' = (a + b)^2 + a^2 + 2a + 3 = (a + b)^2 + (a + 1)^2 + 2 > 0$$

pro všecka a, b.

Z–P–3

3. Nechť A, B, C, D jsou po řadě vrcholy vypuklého čtyřúhelníka a nechť X, Y, Z, U jsou po řadě středy stran AB, BC, CD, DA. Nechť R je průsečík přímek AZ a UC, T průsečík přímek AY a XC.

Vypočítejte poměr obsahů čtyřúhelníků $ABCD$ a $ATCR$.

KOMENTÁŘ A ŘEŠENÍ. Tato úloha je téměř běžná školská úloha, která nevyžaduje zvláštní vtip. Je nepodstatné, že čtyřúhelník $ABCD$ je konvexní, místo čtyřúhelníka $ABCD$ se můžeme zabývat odděleně trojúhelníky ABC a CDA. Úsečky AY a CX jsou těžnice trojúhelníka ABC, jejich průsečík T je jeho těžiště. Pokládáme-li za známou větu, že těžiště dělí každou těžnici v poměru 2 : 1, je $AT = 2TY$ a pro obsahy trojúhelníků platí tedy

$$\triangle\, ATC = 2\, \triangle\, YTC\,, \tag{1}$$

neboť tyto dva trojúhelníky mají společný vrchol C. Protože $BY = CY$, je

$$\triangle BYA = \triangle CYA = \frac{1}{2} P, \tag{2}$$

kde P značí obsah $\triangle ABC$. (Také trojúhelníky BYA, CYA mají společný vrchol A). Protože dále

$$\triangle CYA = \triangle ATC + \triangle YTC,$$

dostaneme z (1), (2)

$$\frac{1}{2} P = \triangle ATC + \frac{1}{2} \triangle ATC = \frac{3}{2} \triangle ATC,$$

neboli

$$\triangle ATC = \frac{1}{3} P. \tag{3}$$

Úvodem k této úloze by mohlo být opakování základní vlastnosti těžnic a těžiště, které jsme v předchozím použili. Také tato vlastnost se dá odvodit pomocí obsahů. Nechť je $TX = k.CT$, $TY = m.AT$; čísla k, m udávají, v jakém poměru dělí bod T úsečku CX a úsečku AY. Prozatím nevíme, že $k = m = \frac{1}{2}$; to chceme dokázat. Pro obsahy platí

$$\triangle AXT = k \triangle ACT, \triangle CYT = m . \triangle ACT. \tag{4}$$

Protože

$$\triangle ACX = \triangle ACY = \frac{1}{2} \triangle ABC;$$

$$\begin{aligned} \triangle ACX &= \triangle AXT + \triangle ACT, \\ \triangle ACY &= \triangle CYT + \triangle ACT, \end{aligned} \tag{5}$$

dostaneme z (4), (5)

$$(k + 1) ACT = (m + 1) ACT,$$

a odtud $k = m$. Dále je podle (4)

$$\triangle AXT = \triangle BXT = \triangle CYT = \triangle BYT = k.ACT.$$

Platí

$$\triangle ABC = \triangle AXT + \triangle BXT + \triangle CYT + \triangle BYT + \\ + \triangle ACT = (4k + 1) \triangle ACT \qquad (6)$$

a mimo to

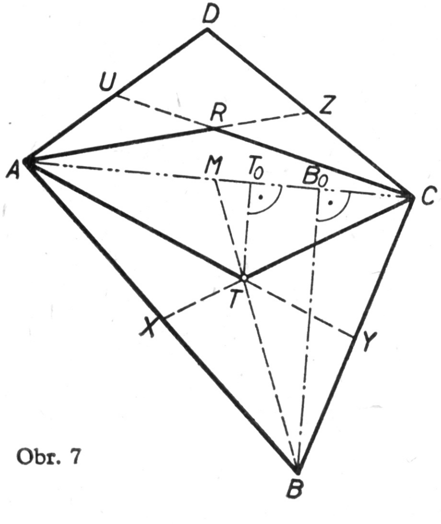
$$\triangle ABC = 2 \triangle ACX = 2(\triangle AXT + \triangle ACT) = \\ = 2(k + 1) \triangle ACT. \qquad (7)$$

Spojením (6), (7) dostaneme

$$(4k + 1) \triangle ACT = 2(k + 1) \triangle ACT$$

a odtud $4k + 1 = 2k + 2$, $k = \frac{1}{2}$. Tím je základní vlastnost těžnice odvozena.

Úlohu Z–P–3 lze řešit také podobností trojúhelníků. Vedeme-li body B, T (obr. 7) kolmice k přímce AC (tj. výšky na



Obr. 7

stranu AC v trojúhelnících $\triangle ABC$, $\triangle ATC$) a označíme-li B_0, T_0 jejich paty a M střed úsečky AC, zjistíme snadno, že

$$\triangle BB_0M \sim \triangle TT_0M; \tag{8}$$

přitom užíváme té vlastnosti, že body B, T, M leží v přímce (těžnici $\triangle ACB$). Z (8) plyne

$$BB_0 : TT_0 = BM : TM = 3 : 1 \tag{9}$$

a odtud dostaneme vztah (3) pro obsahy trojúhelníků. Vztah (9) platí i v případě, že neplatí (8), tj. když nevzniknou trojúhelníky BB_0M, TT_0M. To nastane právě když je $BM \perp AC$. Pak je $B_0 = T_0 = M$ a (9) vyjadřuje známou vlastnost těžnice.

Oba způsoby řešení jsou docela přirozené: zpravidla vlastnost, která se dá odvodit pomocí obsahů obrazců, se dá odvodit také pomocí podobnosti a obráceně. Tuto zkušenost by měli získat postupně i čtenáři např. při odvozování *věty Pythagorovy*, později i *věty Eukleidovy* a při jiných příležitostech.

Zajímavější je úloha obdobná k úloze č. 3. Jejím řešením získají čtenáři klíč k řešení celé kategorie obdobných úloh, mezi něž patří i známá *úloha Steinhausova.*

Úloha zní takto: Je dán trojúhelník ABC, na stranách AB, BC jsou zvoleny body X, Y tak, že platí $BX = 2AX$, $CY = 2BY$. Průsečík úseček AY, CX je označen T. Máme určit, v jakém poměru dělí bod T úsečky CX, AY a jaký je poměr obsahů trojúhelníků ACT, ABC.

Uvedeme jen *stručné řešení*. Položíme $TX = k.CT$, $TY = m.AT$. Pro obsahy trojúhelníků platí (vynecháváme znak $\triangle$)

$$\begin{gathered}
ATX = k.ACT,\ CTY = m.ACT,\\
ACT + CTY = 2(ACT + ATX),\\
ACT + m.ACT = 2ACT + 2k.ACT,\\
1 + m = 2 + 2k,
\end{gathered}$$

a tedy $m = 2k + 1$, tj.

$$ATX = k.ACT, \qquad CTY = (2k + 1).ACT. \tag{10}$$

Dále je
$$ABT = 3.ATX, \quad CBT = \frac{3}{2}\,CTY,$$
a tedy podle (10)
$$ABC = ABT + CBT + ACT = 3k.ACT + \\ + \frac{3}{2}\,(2k + 1)ACT + ACT,$$
neboli
$$\frac{ABC}{ACT} = 6k + \frac{5}{2}. \tag{11}$$
Ale platí také
$$ABC = 3ACX = 3(ATX + ACT) = 3(k + 1)\,ACT$$
neboli
$$\frac{ABC}{ACT} = 3(k + 1). \tag{12}$$
Spojením (11), (12) vyjde lineární rovnice pro k, jejímž řešením je $k = \frac{1}{6}$. Pomocí k pak vypočteme podle (11)
$$TX = \frac{1}{6}\,CT, \quad TY = \frac{4}{3}\,AT$$
$$ACT = \frac{2}{7}\,ABC.$$
Použijeme-li obrázku, je celé toto odvození snadné.

$\boxed{\text{Z–P–4}}$

4. Je dán rovnoběžník $ABCD$. Potom pro každý bod X roviny rovnoběžníka platí
$$AX < BX + CX + DX;$$
dokažte.

KOMENTÁŘ A ŘEŠENÍ. Řešení této úlohy záleží v jednoduchém a vtipném použití *neostré trojúhelníkové nerovnosti.* Tato nerovnost, která je jednou ze základních geometrických vět, zní:

Jsou-li U, V, T libovolné tři body v prostoru (v rovině), různé nebo splývající, platí pro jejich vzdálenosti

$$UV \leqq UT + VT.$$

Přitom rovnost nastane právě tehdy, když bod T náleží úsečce (nenulové či nulové) UV.

Ostrá trojúhelníková nerovnost zní: Jsou-li U, V, T tři body, které neleží v přímce (a samozřejmě jsou různé), platí

$$UV < UT + VT.$$

Pomocí trojúhelníkové nerovnosti můžeme např. porovnat délky dvou vhodných lomených čar, které mají společný počáteční i koncový bod, nebo dokázat *větu*:

Jsou-li A, B dva různé body a pohybuje-li se bod X po přímce $p \parallel AB$, pak součet vzdáleností $AX + BX$ je nejmenší, právě když leží bod X na ose úsečky AB.

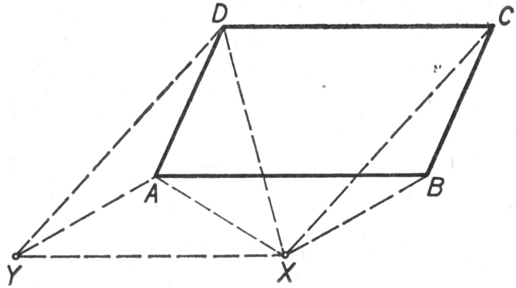
Trojúhelníkovou nerovnost nebudeme dokazovat, neboť je to vlastně *axióm*, který je mnohem závažnější a účinnější než věty, pomocí nichž se obyčejně odvozuje.

Nyní k řešení úlohy č. 4. Klíčem je sestrojení bodu Y tak, že buď $BXYA$ nebo $CXYD$ (nebo obě čtveřice) jsou vrcholy rovnoběžníků. Leží-li bod X mimo přímky AB, CD, vzniknou dva rovnoběžníky, leží-li X na přímce AB nebo CD, vznikne jen jeden. Je užitečné sestrojit situaci pro různé polohy bodu X: uvnitř i vně rovnoběžníka $ABCD$ i na přímkách AB, BC, CD, DA, dokonce i ztotožnit X s vrcholy rovnoběžníka (na obr. 8 leží bod X vně rovnoběžníka $ABCD$).

Neostré trojúhelníkové nerovnosti užijeme dvakrát:

$$XA \leqq XD + DA\,, \tag{1}$$

$$DA \leqq DY + YA\,. \tag{2}$$



Obr. 8

Dále použijeme vztahů $DY = XC$, $YA = XB$. Z (1) a (2) pak plyne (bez znalosti operací s nerovnostmi)

$$XA \leqq XD + XC + XB. \tag{3}$$

Úloha by mohla být uvedena ne jako důkazová, ale jako impuls k experimentování, tj. ve formulaci:

V rovině rovnoběžníka $ABCD$ volte bod X různým způsobem a porovnávejte délky XA, $XB + XC + XD$.

Zajímavá je doplňková otázka: Pro které body X roviny ABC nastane v (3) rovnost? Je zřejmé, že to bude právě pro ty body X, pro něž nastane rovnost v (1) a zároveň v (2). Rovnost v (1) nastane, právě když D náleží úsečce AX, tj. když X leží na polopřímce opačné k DA. Rovnost (2) nastane, právě když Y náleží úsečce AD, tj. právě když X náleží úsečce BC. Ale žádný bod X nemůže splňovat zároveň obě podmínky, neboť nemůže ležet zároveň na přímkách AD, BC. Zpřesníme tedy (3) takto: pro všechny body X roviny rovnoběžníka ABC platí

$$XA < XB + XC + XD.$$

JINÉ ŘEŠENÍ. Pro každý bod X roviny rovnoběžníka $ABCD$ (obr. 8) podle trojúhelníkové nerovnosti platí

$$AX \leqq AD + DX, \tag{1}$$

$$BC \leqq BX + CX. \tag{2}$$

Čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník, a proto

$$AD = BC. \tag{3}$$

Podle (3) a (1) plyne

$$AX \leqq BC + DX. \tag{4}$$

Podle nerovnosti (2) pak ze (4) dostáváme

$$AX \leqq BX + CX + DX. \tag{5}$$

Rovnost v (5) nastává, právě když platí současně rovnost v (1) a (2), tj. právě když bod X leží zároveň na polopřímce opačné k polopř. DA a na úsečce BC. To však není možné, neboť přímky AD a BC jsou různé rovnoběžky, a proto pro každý bod X roviny rovnoběžníka $ABCD$ platí

$$AX < BX + CX + DX.$$