Czechoslovak Mathematical Journal

Miloslav Jůza

О непрерывных функциях, не имеющих производной

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 3, 371–381

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100153

О НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЯХ, НЕ ИМЕЮЩИХ ПРОИЗВОДНОЙ

МИЛОСЛАВ ЮЗА (Miloslav Jůza), Розтоки у Праги.
(Поступило в редакцию 26/XI 1954 г.)

Академик Э. Чех выдвинул проблему, существует ли последовательность функций одного вещественного переменного $G_1(t)$, $G_2(t)$, ..., обладающая следующим свойством: Если $P(x_1, \ldots, x_p)$ — произвольный непостоянный полином p переменных, то функция $P(G_1(t), \ldots, G_p(t))$ является непрерывной функцией, не имеющей производной ни в одной точке. В статье построена последовательность функций с еще более общим свойством, предложенным академиком В. Ярником.

Как известно, существуют функции одного вещественного переменного, которые непрерывны в каждой точке и при всем том не имеют ни в одной точке производной. Можно даже построить функцию $G(t)$, от которой мы требуем больше, а именно, чтобы — если $P(x)$ есть произвольный непостоянный полином — функция $P(G(t))$ была непрерывной и не обладала производной ни в одной точке. Этим свойством отличается, например, функция $G(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a^\nu} f(b^{\nu!} t)$, где $a > 7$, $b > 1$, $f(t) = \inf_{k \text{ целое}} |t - k|$. Академик Э. Чех предложил следующую задачу: построить последовательность функций $G_1(t)$, $G_2(t)$, ... такого свойства: Если $P(x_1, \ldots, x_p)$ — произвольный непостоянный полином p переменных, то функция $P(G_1(t), G_2(t), \ldots, G_p(t))$ является непрерывной функцqией, не имеющей нигде производной. В настоящей статье мы построим последовательность функций $G_1(t)$, $G_2(t)$, ..., удовлетворяющую еще более сильному требованию, по предложению академика В. Ярника. Относительно этой последовательности мы докажем следующее:

Пусть $P(x_1, \ldots, x_p)$ — вещественная функция p переменных, обладающая следующим свойством: все частные производные всех порядков функции $P(x_1, \ldots, x_p)$ в каждой точке непрерывны и для каждой точки $(x_1^{(0)}, \ldots, x_p^{(0)})$ существует частная производная некоторого порядка $i \geqq 0$ функции $P(x_1, \ldots, x_p)$, отличная в этой точке от нуля. Тогда функция $P(G_1(t), \ldots, G_p(t))$ будет непрерывной функцией, не имеющей производной ни в одной точке.

Прежде чем приступить к собственной теме, проведем несколько вспомогательных рассуждений, которые нам будут в дальнейшем изложении полезны.

Определим теоретико-числовую функцию $\alpha(n)$ следующим образом:

$$\alpha(n) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu .$$

Некоторые свойства функции $\alpha(n)$ очевидны:

$$\alpha(1) = 0 , \quad \alpha(n+1) = \alpha(n) + n .$$

Функция $\alpha(n)$ возрастает на всем множестве натуральных чисел.

Каждое целое неотрицательное число k можно записать в виде

$$k = \alpha(n) + m - 1 , \quad 1 \leqq m \leqq n .$$

Числа n, m однозначно определяются числом k.

Итак, мы получили здесь взаимно однозначное отображение множества целых неотрицательных чисел k на множество пар натуральных чисел (n, m) таких, что $m \leqq n$.

Пусть $k = \alpha(n) + m - 1$, $1 \leqq m \leqq n$; введем обозначения

$$k = \beta(n, m) , \quad m = \gamma(k) .$$

Из того, что функция $\alpha(n)$ возрастает, вытекает следующая теорема: *Если m — натуральное число, то последовательность*

$$\beta(m, m), \beta(m+1, m), \beta(m+2, m), \ldots$$

будет возрастающей.

Чтобы иметь возможность выражаться короче, дадим еще следующее определение:

Пусть p — натуральное число. Функцию p переменных $P(x_1, \ldots, x_p)$ назовем нормальной, если она обладает следующими свойствами:

1. *Все частные производные всех порядков функции $P(x_1, \ldots, x_p)$ непрерывны в каждой точке;*

2. *для каждой точки $(a_1, \ldots, a_p)$ существует частная производная некоторого порядка $i \geqq 0$ функции $P(x_1, \ldots, x_p)$, отличная в этой точке от нуля.*

Далее будем пользоваться следующими обозначениями: Если $F(x_1, \ldots, x_p)$ — функция p переменных, то вместо $F(x_1, \ldots, x_p)$ будем писать короче $F(X)$. Если $(a_1, \ldots, a_p)$ — система p вещественных чисел, то мы обозначим $(a_1, \ldots, a_p) = A$ и соответствующее значение функции $F(X)$ будем обозначать через $F(A)$ вместо $F(a_1, \ldots, a_p)$.

Введем еще обозначение для производных функции $F(X)$. Пусть $i_1, \ldots$ $\ldots, i_p$ — целые неотрицательные числа, $i_1 + \ldots + i_p > 0$. Тогда будем писать

$$\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_p} F(X)}{\partial^{i_1} x_1 \ldots \partial^{i_p} x_p} = F^{(i_1,\ldots,i_p)}(X) .$$

Замечание 1. Каждая нормальная функция непрерывна в каждой точке.

Замечание 2. Каждый непостоянный полином p переменных является нормальной функцией.

Замечание 3. Обозначение производных функции $P(x_1, \ldots, x_p)$ в случае $p = 1$ совпадает с обычным обозначением.

Теперь уже можно сформулировать главную **теорему:**

Пусть a, b — вещественные числа, $a > 1$, $b > 1$. Определим последовательность функций $G_1(t)$, $G_2(t)$, $\ldots$ следующим образом:

$$G_\lambda(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^{(\lambda)}(b^{\nu!}t) , \quad \lambda = 1, 2, \ldots,$$

$$c_\nu^{(\lambda)} = a^{-\nu \sum\limits_{\mu=0}^{\lambda-1} (2\gamma(k))^{-\mu}} \qquad \text{для } \nu = 4^k,\ k — \textit{целое},$$

$$c_\nu^{(\lambda)} = 0 \quad \textit{для остальных } \nu,$$

$$f(t) = \inf_{k \text{ целое}} |t - k| .$$

Пусть $P(x_1, \ldots, x_p)$ — нормальная функция p переменных; тогда функция $Q(t) = P(G_1(t), \ldots, G_p(t))$ является непрерывной функцией, не имеющей производной ни в одной точке.

Доказательство. Докажем прежде всего, что $Q(t)$ непрерывна. Ряды $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^{(\lambda)} f(b^{\nu!}t)$ равномерно сходятся по признаку Вейерштрасса, так как

$$|c_\nu^{(\lambda)} f(b^{\nu!}t)| < c_\nu^{(\lambda)} \leqq a^{-\nu} ,$$

а $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a^{-\nu}$ сходится. Каждый член этих рядов является непрерывной функцией от t, значит, и $G_\lambda(t)$ будут непрерывными функциями t. Так как нормальная функция также непрерывна, то по теореме о непрерывности сложных функций будет непрерывной и функция $Q(t)$.

Приступим к доказательству, что $Q(t)$ не имеет нигде производной.

Для любого вещественного числа t_0 определим числа t_n, u_n так:

1. Если $f(b^{n!}t_0) \leqq \frac{1}{4}$, то t_n ести наименьшее число, большее чем t_0, u_n есть наибольшее число, меньшее чем t_0 такое, что

$$f(b^{n!}t_n) = f(b^{n!}u_n) = \tfrac{1}{2} .$$

2. Если $f(b^{n!}t_0) > \frac{1}{4}$, то t_n ести наименьшее число, большее чем t_0, u_n есть наибольшее число, меньшее чем t_0 такое, что

$$f(b^{n!}t_n) = f(b^{n!}u_n) = 0 \,.$$

Для t_n и u_n справедливы следующие соотношения:

$$b^{n!}|t_n - t_0| = |b^{n!}t_n - b^{n!}t_0| \leqq 1 \,,$$

$$|t_n - t_0| \leqq \frac{1}{b^{n!}} \,. \tag{1}$$

Аналогично для u_n

$$|u_n - t_0| \leqq \frac{1}{b^{n!}} \,. \tag{2}$$

Далее

$$\sin(t_n - t_0) = -\operatorname{sgn}(u_n - t_0) \,, \tag{3}$$

$$\tfrac{1}{2} \geqq |f(b^{n!}t_n) - f(b^{n!}t_0)| \geqq \tfrac{1}{4} \,, \tag{4}$$

$$\tfrac{1}{2} \geqq |f(b^{n!}u_n) - f(b^{n!}t_0)| \geqq \tfrac{1}{4} \,, \tag{5}$$

$$\operatorname{sgn}(f(b^{n!}t_n) - f(b^{n!}t_0)) = \operatorname{sgn}(f(b^{n!}u_n) - f(b^{n!}t_0)) \,. \tag{6}$$

Пусть $P(x_1, \ldots, x_p)$ — нормальная функция p переменных. Докажем, что функция $Q(t) = P(G_1(t), \ldots, G_p(t))$ не имеет производной в точке t_0.

Введем обозначения

$$G_\lambda(t_0) = d_\lambda,\ \lambda = 1, 2, \ldots, p;\ D = (d_1, \ldots, d_p) \,.$$

Так как функция $P(X)$ нормальна, то существует натуральное число m такое, что все частные производные функции $P(X)$ порядка меньше m равны в точке D нулю, причем, однако, существует частная производная функции $P(X)$ порядка m, не равная в точке D нулю.

Для натурального числа n вида $n = 4^{\beta(j,m)}$, $j \geqq m$ из (4) и из определения чисел $c_n^{(\lambda)}$ теперь вытекает

$$\tfrac{1}{2}a^{-n\sum\limits_{\mu=0}^{\lambda-1}(2m)^{-\mu}} \geqq |c_n^{(\lambda)} f(b^{n!}t_n) - c_n^{(\lambda)} f(b^{n!}t_0)| \geqq \tfrac{1}{4}a^{-n\sum\limits_{\mu=0}^{\lambda-1}(2m)^{-\mu}} \,. \tag{7}$$

Аналогично, согласно (5), получим

$$\tfrac{1}{2}a^{-n\sum\limits_{\mu=0}^{\lambda-1}(2m)^{-\mu}} \geqq |c_n^{(\lambda)} f(b^{n!}u_n) - c_n^{(\lambda)} f(b^{n!}t_0)| \geqq \tfrac{1}{4}a^{-n\sum\limits_{\mu=0}^{\lambda-1}(2m)^{-\mu}} \,. \tag{8}$$

Положим $n_1 = \operatorname{Max}\left(3,\ 1 + 2\dfrac{\lg a}{\lg b}\right)$. Для $n > n_1$ $n = 4^{\beta(j,m)}$, $j \geqq m$ получим, принимая во внимание, что для любых чисел x_1, x_2 имеет место $|f(x_1) - f(x_2)| \leqq |x_1 - x_2|$ и используя (1),

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n-1} (c_\nu^{(\lambda)} f(b^{\nu!}t_n) - c_\nu^{(\lambda)} f(b^{\nu!}t_0))\right| \leqq \sum_{\nu=1}^{n-1} c_\nu^{(\lambda)} |f(b^{\nu!}t_n) -$$

$$-f(b^{\nu!}t_0)| < \sum_{\nu=1}^{n-1} a^{-\nu}|f(b^{\nu!}t_n) - f(b^{\nu!}t_0)| \leqq$$

$$\leqq \sum_{\nu=1}^{n-1} a^{-\nu} \,.\, |b^{\nu!}t_n - b^{\nu!}t_0| \leqq \sum_{\nu=1}^{n-1} a^{-\nu}\frac{b^{\nu!}}{b^{n!}} <$$

$$< \sum_{\nu=1}^{n-1} a^{-\nu}\frac{b^{(n-1)!}}{b^{n!}} < \left(\frac{1}{b^{n-1}}\right)^{(n-1)!}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a^{\nu}} < \left(\frac{1}{b^{2\frac{\lg a}{\lg b}}}\right)^{n}\cdot\frac{1}{a-1} =$$

$$= \frac{1}{a^{2n}}\frac{1}{a-1}\,.$$

Для $n > n_1$, $n = 4^{\beta(j,m)}$, $j \geqq m$ имеем, следовательно,

$$|\sum_{\nu=1}^{n-1}(c_\nu^{(\lambda)}f(b^{\nu!}t_n) - c_\nu^{(\lambda)}f(b^{\nu!}t_0)| < \frac{1}{a-1}\,a^{-2n}\,. \tag{9}$$

Аналогично, согласно (2), получим для тех же n

$$|\sum_{\nu=1}^{n-1}(c_\nu^{(\lambda)}f(b^{\nu!}u_n) - c_\nu^{(\lambda)}f(b^{\nu!}t_0))| < \frac{1}{a-1}\,a^{-2n}\,. \tag{10}$$

Далее для $n = 4^{\beta(j,m)}$, $j \geqq m$,

$$|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(c_\nu^{(\lambda)}f(b^{\nu!}t_n) - c_\nu^{(\lambda)}f(b^{\nu!}t_0))| \leqq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu^{(\lambda)}|f(b^{\nu!}t_n) - f(b^{\nu!}t_0)| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2}\sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu^{(\lambda)} \leqq \frac{1}{2}\sum_{\substack{\nu=n+1\\ \nu=4^k}}^{\infty} a^{-\nu} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{\nu=n+1\\ \nu=4^k}}^{\infty}\frac{1}{(a^2)^{\frac{1}{2}\nu}}\,.$$

Пусть $n = 4^{\beta(j,m)}$, $\nu > n$, $\nu = 4^k$; тогда $\nu \geqq 4^{\beta(j,m)+1} = 4\,.\,4^{\beta(j,m)}$, так что $\frac{1}{2}\nu \geqq 2\,.\,4^{\beta(j,m)} = 2n > n$, $\frac{1}{2}\nu$ есть целое число, так что можно сделать подстановку $\frac{1}{2}\nu = \varrho$; тогда получим

$$|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(c_\nu^{(\lambda)}f(b^{\nu!}t_n) - c_\nu^{(\lambda)}f(b^{\nu!}t_0))| < \frac{1}{2}\sum_{\varrho=n+1}^{\infty}\frac{1}{a^{2\varrho}} = \frac{1}{a^{2n}}\cdot\frac{1}{2(a^2-1)}\,.$$

Для натуральных чисел n вида $n = 4^{\beta(j,m)}$, $j \geqq m$ получим, следовательно,

$$|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(c_\nu^{(\lambda)}f(b^{\nu!}t_n) - c_\nu^{(\lambda)}f(b^{\nu!}t_0))| < a^{-2n}\frac{1}{2(a^2-1)} \tag{11}$$

и точно так же

$$|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(c_\nu^{(\lambda)}f(b^{\nu!}u_n) - c_\nu^{(\lambda)}f(b^{\nu!}t_0))| < a^{-2n}\frac{1}{2(a^2-1)}\,. \tag{12}$$

Если $n > n_1$, $n = 4^{\beta(j,m)}$, $j \geqq m$, то согласно (7), (9) и (11), будет

$$|G_\lambda(t_n) - G_\lambda(t_0)| = |\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^{(\lambda)}f(b^{\nu!}t_n) - \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^{(\lambda)}f(b^{\nu!}t_0)| \geqq$$

$$\geqq |c_n^{(\lambda)}f(b^{n!}t_n) - c_n^{(\lambda)}f(b^{n!}t_0)| - |\sum_{\nu=1}^{n-1}(c_\nu^{(\lambda)}f(b^{\nu!}t_n) -$$

$$- c_\nu^{(\lambda)} f(b^{\nu!} t_0))| - |\sum_{\nu=n+1}^{\infty} (c_\nu^{(\lambda)} f(b^{\nu!} t_n) - c_\nu^{(\lambda)} f(b^{\nu!} t_0))| >$$

$$> \frac{1}{4} a^{-n \sum_{\mu=0}^{\lambda-1} (2m)^{-\mu}} - \frac{1}{a-1} a^{-2n} - \frac{1}{2(a^2-1)} a^{-2n} =$$

$$= a^{-n \sum_{\mu=0}^{\lambda-1} (2m)^{-\mu}} \left\{ \frac{1}{4} - a^{-n\left(2 - \sum_{\mu=0}^{\lambda-1} (2m)^{-\mu}\right)} \left(\frac{1}{a-1} + \frac{1}{2(a^2-1)} \right) \right\},$$

$$|G_\lambda(t_n) - G_\lambda(t_0)| \leqq |c_n^{(\lambda)} f(b^{n!} t_n) - c_n^{(\lambda)} f(b^{n!} t_0)| +$$

$$+ |\sum_{\nu=1}^{n-1} (c_\nu^{(\lambda)} f(b^{\nu!} t_n) - c_\nu^{(\lambda)} f(b^{\nu!} t_0))| + |\sum_{\nu=n+1}^{\infty} (c_\nu^{(\lambda)} f(b^{\nu!} t_n) -$$

$$- c_\nu^{(\lambda)} f(b^{\nu!} t_0))| < \frac{1}{2} a^{-n \sum_{\mu=0}^{\lambda-1} (2m)^{-\mu}} + \frac{1}{a-1} a^{-2n} +$$

$$+ \frac{1}{2(a^2-1)} a^{-2n} = a^{-n \sum_{\mu=0}^{\lambda-1} (2m)^{-\mu}} \left\{ \frac{1}{2} + \right.$$

$$\left. + a^{-n\left(2 - \sum_{\mu=0}^{\lambda-1} (2m)^{-\mu}\right)} \left(\frac{1}{a-1} + \frac{1}{2(a^2-1)} \right) \right\}.$$

Так как $m \geqq 1$, то $\sum_{\mu=0}^{\lambda-1} (2m)^{-\mu} < \sum_{\mu=0}^{\infty} (2m)^{-\mu} = \frac{2m}{2m-1} \leqq 2$, так что $2 - \sum_{\mu=0}^{\lambda-1} (2m)^{-\mu} > 0$, следовательно, $\lim_{n\to\infty} a^{-n\left(2 - \sum_{\mu=0}^{\lambda-1} (2m)^{-\mu}\right)} \left(\frac{1}{a-1} + \frac{1}{2(a^2-1)} \right) = 0.$ Итак, существуют числа $n_2^{(\lambda)}$ такие, что для $n > n_2^{(\lambda)}$ будет

$$\left| a^{-n\left(2 - \sum_{\mu=0}^{\lambda-1} (2m)^{-\mu}\right)} \left(\frac{1}{a-1} + \frac{1}{2(a^2-1)} \right) \right| < \frac{1}{8}. \tag{13}$$

Если положить $n_2 = \mathrm{Max}\,(n_1, n_2^{(1)}, \ldots, n_2^{(p)})$, то для $n > n_2$ справедливо неравенство (13) одновременно для $\lambda = 1, \ldots, p$. Для $n > n_2$, $n = 4^{\beta(j,m)}$, $j \geqq m$ справедливо

$$\tfrac{5}{8} a^{-n \sum_{\mu=0}^{\lambda-1} (2m)^{-\mu}} > |G_\lambda(t_n) - G_\lambda(t_0)| > \tfrac{1}{8} a^{-n \sum_{\mu=0}^{\lambda-1} (2m)^{-\mu}}, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, p. \tag{14}$$

Точно таким же образом найдем, используя (8), (10) и (12), что для тех же n имеет место

$$\tfrac{5}{8} a^{-n \sum_{\mu=0}^{\lambda-1} (2m)^{-\mu}} > |G_\lambda(u_n) - G_\lambda(t_0)| > \tfrac{1}{8} a^{-n \sum_{\mu=0}^{\lambda-1} (2m)^{-\mu}}, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, p. \tag{15}$$

Далее легко убедиться в том, что для $n > n_2$, $n = 4^{\beta(j,m)}$, $j \geqq m$ будет

$$\mathrm{sgn}\,(G_\lambda(t_n) - G_\lambda(t_0)) = \mathrm{sgn}\,(c_n^{(\lambda)} f(b^{n!} t_n) - c_n^{(\lambda)} f(b^{n!} t_0)) =$$
$$= \mathrm{sgn}\,(f(b^{n!} t_n) - f(b^{n!} (t_0)),$$

$$\operatorname{sgn}(G_\lambda(u_n) - G_\lambda(t_0)) = \operatorname{sgn}(c_n^{(\lambda)} f(b^{n!} u_n) - c_n^{(\lambda)} f(b^{n!} t_0)) = \\ = \operatorname{sgn}(f(b^n u_n) - f(b^{n!} t_0))$$

и значит согласно (6), для этих n будет

$$\operatorname{sgn}(G_\lambda(t_n) - G_\lambda(t_0)) = \operatorname{sgn}(G_\lambda(u_n) - G_\lambda(t_0)), \quad \lambda = 1, \ldots, p. \tag{16}$$

Пусть $J = (j_1, \ldots, j_p)$ — последовательность p целых чисел. Мы скажем, что последовательность J будет порядка n, если

$$n = j_1 \geqq j_2 \geqq \cdots \geqq j_p \geqq 0.$$

Пусть $J = (j_1, \ldots, j_p)$, $K = (k_1, \ldots, k_p)$ — две последовательности порядка n; скажем, что J ниже K и запишем $J \prec K$, если существует натуральное число λ, $1 < \lambda \leqq p$ такое, что $j_\lambda < k_\lambda$, но $j_\iota = k_\iota$ для $1 \leqq \iota < \lambda$. Если J, K — две последовательности порядка n, то наступит, очевидно, в точности один из следующих трех случаев: $J = K$, $J \prec K$, $K \prec J$.

По определению числа m существует частная производная функции $P(X)$ порядка m, не равная в точке D нулю. Отсюда легко вытекает, что существует последовательность $Q = (q_1, \ldots, q_p)$ порядка m такая, что

$$P^{(q_1 - q_2, q_2 - q_3, \ldots, q_{p-1} - q_p, q_p)}(D) \neq 0, \quad \text{но что}$$
$$P^{(j_1 - j_2, j_2 - j_3, \ldots, j_{p-1} - j_p, j_p)}(D) = 0, \quad \text{если}$$

$J = (j_1, \ldots, j_p)$ — последовательность порядка m и ниже Q.

По теореме Тэйлора можно теперь написать, вспомнив, что все частные производные функции $P(X)$ порядка меньше m равны в точке D нулю,

$$P(X) - P(D) = P^{(q_1 - q_2, q_2 - q_3, \ldots, q_{p-1} - q_p, q_p)}(D) \prod_{\lambda=1}^{p-1} \frac{(x_\lambda - d_\lambda)^{q_\lambda - q_{\lambda+1}}}{(q_\lambda - q_{\lambda+1})!} \cdot \frac{(x_p - d_p)^{q_p}}{q_p!} + \\ + \sum_{Q \prec J} P^{(j_1 - j_2, \ldots, j_p)}(D) \prod_{\lambda=1}^{p-1} \frac{(x_\lambda - d_\lambda)^{j_\lambda - j_{\lambda+1}}}{(j_\lambda - j_{\lambda+1})!} \cdot \frac{(x_p - d_p)^{j_p}}{j_p!} + \\ + \sum_K P^{(k_1 - k_2, \ldots, k_p)}(\Xi) \prod_{\lambda=1}^{p-1} \frac{(x_\lambda - d_\lambda)^{k_\lambda - k_{\lambda+1}}}{(k_\lambda - k_{\lambda+1})!} \cdot \frac{(x_p - d_p)}{k_p!},$$

где $J = (j_1, \ldots, j_p)$ — последовательность порядка m, $K = (k_1, \ldots, k_p)$ — последовательность порядка $m + 1$ и для точки $\Xi = (\xi_1, \ldots, \xi_p)$ имеет место

$$|\xi_\lambda - d_\lambda| \leqq |x_\lambda - d_\lambda|, \quad \lambda = 1, \ldots, p.$$

Положим

$$B = \operatorname{Max}\left(\operatorname*{Max}_{Q \prec J}\left\{P^{(j_1 - j_2, \ldots, j_p)}(D) \prod_{\lambda=1}^{p-1} \frac{1}{(j_\lambda - j_{\lambda+1})!} \frac{1}{j_p!}\right\}, \right. \\ \left. \operatorname*{Max}_K \left\{2P^{(k_1 - k_2, \ldots, k_p)}(D) \prod_{\lambda=1}^{p-1} \frac{1}{(k_\lambda - k_{\lambda+1})!} \frac{1}{k_p!}\right\}, 1\right),$$

где $J = (j_1, \ldots, j_p)$ — последовательность порядка m, $K = (k_1, \ldots, k_p)$ — последовательность порядка $m + 1$. Тогда существует число $\delta > 0$ такое, что если

$$X = (x_1, \ldots, x_p), \quad |x_\lambda - d_\lambda| < \delta, \quad \lambda = 1, \ldots, p,$$

то будет

$$\left|P^{(k_1-k_2,\ldots,k_p)}(X)\prod_{\lambda=1}^{p-1}\frac{1}{(k_\lambda-k_{\lambda+1})!}\frac{1}{k_p!}\right|<B$$

для всех последовательностей $(k_1, \ldots, k_p)$ порядка $m+1$. Если теперь написать

$$A=\left|P^{(q_1-q_2,\ldots,q_p)}(D)\prod_{\lambda=1}^{p-1}\frac{1}{(q_\lambda-q_{\lambda+1})!}\frac{1}{q_p!}\right|,$$

то для этих точек X имеет место

$$\begin{gathered}|P(X)-P(D)|>A\prod_{\lambda=1}^{p-1}|x_\lambda-d_\lambda|^{q_\lambda-q_{\lambda+1}}\,.\,|x_p-d_p|^{q_p}-\\ -B\Big\{\sum_{Q\prec J}\prod_{\lambda=1}^{p-1}|x_\lambda-d_\lambda|^{j_\lambda-j_{\lambda+1}}\,.\,|x_p-d_p|^{j_p}+\\ +\sum_K\prod_{\lambda=1}^{p-1}|x_\lambda-d_\lambda|^{k_\lambda-k_{\lambda+1}}\,.\,|x_p-d_p|^{k_p}\Big\}\,,\end{gathered}\tag{17}$$

где J — последовательность порядка m, K — последовательность порядка $m+1$ (притом $A>0$).

Так как функции $G_\lambda(t)$ непрерывны и так как, согласно (1) и (2), $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\lim\limits_{n\to\infty}u_n=t_0$, то существуют числа $n_3^{(\lambda)}$ так, что для $n>n_3^{(\lambda)}$

$$|G_\lambda(t_n)-G_\lambda(t_0)|<\delta\,,\quad|G_\lambda(u_n)-G_\lambda(t_0)|<\delta\,.$$

Если положить $n_3=\operatorname{Max}(n_2, n_3^{(1)}, \ldots, n_3^{(p)})$, то согласно (14), получим подстановкой в (17) для $n>n_3$, $n=4^{\beta(j,m)}$, $j\geqq m$ (J — опять-таки последовательность порядка m, K — последовательность порядка $m+1$)

$$\begin{gathered}|Q(t_n)-Q(t_0)|>A\prod_{\lambda=1}^{p-1}\left(\tfrac18 a^{-n\sum_{\mu=0}^{\lambda-1}(2m)^{-\mu}}\right)^{q_\lambda-q_{\lambda+1}}\,.\\ .\left(\tfrac18 a^{-n\sum_{\mu=0}^{\lambda-1}(2m)^{-\mu}}\right)^{q_p}-B\Big\{\sum_{Q\prec J}\prod_{\lambda=1}^{p-1}\left(\tfrac58 a^{-n\sum_{\mu=0}^{\lambda-1}(2m)^{-\mu}}\right)^{j_\lambda-j_{\lambda+1}}\,.\\ .\left(\tfrac58 a^{-n\sum_{\mu=0}^{p-1}(2m)^{-\mu}}\right)^{j_p}+\sum_K\prod_{\lambda=1}^{p-1}\left(\tfrac58 a^{-n\sum_{\mu=0}^{\lambda-1}(2m)^{-\mu}}\right)^{k_\lambda-k_{\lambda+1}}\,.\\ .\left(\tfrac58 a^{-n\sum_{\mu=0}^{p-1}(2m)^{-\mu}}\right)^{k_p}\Big\}=(\tfrac18)^m\,.\,A\,.\,a^{-n\sum_{\lambda=1}^{p}q_\lambda(2m)^{1-\lambda}}-\\ -B\Big\{(\tfrac58)^m\sum_{Q\prec J}a^{-n\sum_{\lambda=1}^{p}j_\lambda(2m)^{1-\lambda}}+(\tfrac58)^{m+1}\sum_K a^{-n\sum_{\lambda=1}^{p}k_\lambda(2m)^{1-\lambda}}\Big\},\quad A>0\,.\end{gathered}\tag{18}$$

Однако, для всех рассматриваемых последовательностей J имеем $Q \prec J$, значит, существует натуральное число i, $1 < i \leqq p$ такое, что $q_i < j_i$, $q_\lambda = j_\lambda$ для $1 \leqq \lambda < i$. Отсюда получаем

$$\sum_{\lambda=1}^{p} j_\lambda (2m)^{1-\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{i-1} q_\lambda (2m)^{1-\lambda} + q_i (2m)^{1-i} + (j_i - q_i)(2m)^{1-i} +$$
$$+ \sum_{\lambda=i+1}^{p} j_\lambda (2m)^{1-\lambda} \geqq \sum_{\lambda=1}^{i} q_\lambda (2m)^{1-\lambda} + (2m)^{1-i} = \sum_{\lambda=1}^{i} q_\lambda (2m)^{1-\lambda} +$$
$$+ \frac{2m^2}{(2m)^i\, m} \geqq \sum_{\lambda=1}^{i} q_\lambda (2m)^{1-\lambda} + \frac{2m^2}{(2m)^i (2m-1)} = \sum_{\lambda=1}^{i} q_\lambda (2m)^{1-\lambda} +$$
$$+ \sum_{\lambda=i+1}^{\infty} m (2m)^{1-\lambda} > \sum_{\lambda=1}^{i} q_\lambda (2m)^{1-\lambda} + \sum_{\lambda=i+1}^{p} m (2m)^{1-\lambda} +$$
$$+ (2m)^{-p} \geqq \sum_{\lambda=1}^{p} q_\lambda (2m)^{1-\lambda} + (2m)^{-p}.$$

Отсюда следует, что

$$a^{-n \sum_{\lambda=1}^{p} j_\lambda (2m)^{1-\lambda}} < a^{-n \sum_{\lambda=1}^{p} q_\lambda (2m)^{1-\lambda}} \,.\, a^{-n(2m)^{-p}} \quad \text{для} \quad Q \prec J. \tag{19}$$

Последовательность K — порядка $m + 1$, последовательность Q — порядка m. Поэтому

$$\sum_{\lambda=1}^{p} k_\lambda (2m)^{1-\lambda} = (m+1) + \sum_{\lambda=2}^{p} k_\lambda (2m)^{1-\lambda} \geqq m + 1 =$$
$$= m + \sum_{\lambda=2}^{\infty} \frac{1}{2^{\lambda-1}} > m + \sum_{\lambda=2}^{\infty} \frac{m}{(2m)^{\lambda-1}} > \sum_{\lambda=1}^{p} \frac{m}{(2m)^{\lambda-1}} +$$
$$+ (2m)^{-p} \geqq \sum_{\lambda=1}^{p} q_\lambda (2m)^{1-\lambda} + (2m)^{-p}.$$

Отсюда следует, что

$$a^{-n \sum_{\lambda=1}^{p} k_\lambda (2m)^{1-\lambda}} < a^{-n \sum_{\lambda=1}^{p} q_\lambda (2m)^{1-\lambda}} \,.\, a^{-n(2m)^{-p}}, \tag{20}$$

если $K = (k_1, \ldots, k_p)$ — последовательность порядка $m + 1$. Из неравенств (19) и (20) получаем подстановкой в (18) для $n > n_3$, $n = 4^{\beta(j,m)}$, $j \geqq m$

$$|Q(t_n) - Q(t_0)| > (\tfrac{1}{8})^m \,.\, A \,.\, a^{-n \sum_{\lambda=1}^{p} q_\lambda (2m)^{1-\lambda}} -$$
$$- B\Big\{(\tfrac{5}{8})^m \,.\, \sum_{Q \prec J} a^{-n \sum_{\lambda=1}^{p} q_\lambda (2m)^{1-\lambda}} \,.\, a^{-n(2m)^{-p}} + (\tfrac{5}{8})^{m+1} \,.\, \sum_{K} a^{-n \sum_{\lambda=1}^{p} q_\lambda (2m)^{1-\lambda}} \,.\, a^{-n(2m)^{-p}}\Big\} =$$
$$= a^{-n \sum_{\lambda=1}^{p} q_\lambda (2m)^{1-\lambda}} \,.\, \{(\tfrac{1}{8})^m A - (C_1 (\tfrac{5}{8})^m + C_2 (\tfrac{5}{8})^{m+1}) \,.\, B \,.\, a^{-n(2m)^{-p}}\},$$

где C_1 — число последовательностей J порядка m таких, что $Q \prec J$, C_2 — число всех последовательностей порядка $m+1$.

Однако,

$$\lim_{n\to\infty} (C_1(\tfrac{5}{8})^m + C_2(\tfrac{5}{8})^{m+1}) \,.\, B \,.\, a^{-n(2m)^{-p}} = 0 \,.$$

Следовательно, существует число n_4 так, что для $n > n_4$ будет

$$\left|\left(C_1\left(\frac{5}{8}\right)^m + C_2\left(\frac{5}{8}\right)^{m+1}\right) . B \,.\, a^{-n(2m)^{-p}}\right| < \frac{1}{2\,.\,8^m} \,.\, A \,.$$

Для $n > \operatorname{Max}(n_3, n_4)$, $n = 4^{\beta(j,m)}$, $j \geqq m$ получим, следовательно,

$$|Q(t_n) - Q(t_0)| > \frac{1}{2\,.\,8^m} \,.\, A \,.\, a^{-n\sum\limits_{\lambda=1}^{p} q_\lambda (2m)^{1-\lambda}} \,. \tag{21}$$

Рассуждая точно так же, получим, согласно (15) и (17), для тех же n

$$|Q(u_n) - Q(t_0)| > \frac{1}{2\,.\,8^m} \,.\, A \,.\, a^{-n\sum\limits_{\lambda=1}^{p} q_\lambda (2m)^{1-\lambda}} \,. \tag{22}$$

Далее легко убедиться, что для $n > \operatorname{Max}(n_3, n_4)$, $n = 4^{\beta(j,m)}$, $j \geqq m$ будет

$$\operatorname{sgn}(Q(t_n) - Q(t_0)) = \operatorname{sgn} P^{(q_1 - q_2, q_2 - q_3, \dots, q_{p-1} - q_p, q_p)}(D) \,.$$
$$.\prod_{\lambda=1}^{p-1} \operatorname{sgn}(G_\lambda(t_n) - G_\lambda(t_0))^{q_\lambda - q_{\lambda+1}} \,.\, \operatorname{sgn}(G_p(t_n) - G_p(t_0))^{q_p} \,,$$

$$\operatorname{sgn}(Q(u_n) - Q(t_0)) = \operatorname{sgn} P^{(q_1 - q_2, \dots, q_p)}(D) \,.\prod_{\lambda=1}^{p-1} \operatorname{sgn}(G_\lambda(u_n) - G_\lambda(t_0))^{q_\lambda - q_{\lambda+1}} \,.$$
$$.\operatorname{sgn}(G_p(u_n) - G_p(t_0))^{q_p}$$

и, следовательно, в силу (16),

$$\operatorname{sgn}(Q(t_n) - Q(t_0)) = \operatorname{sgn}(Q(u_n) - Q(t_0)) \,. \tag{23}$$

Положим $E = \dfrac{1}{2\,.\,8^m} \,.\, A$, $n_0 = \operatorname{Max}\left(n_3, n_4, 1 + 2m, 2 + \dfrac{\lg 2a}{\lg b}\right)$. Так как $\sum\limits_{\lambda=1}^{p} q_\lambda (2m)^{1-\lambda} \leqq \sum\limits_{\lambda=1}^{p} m(2m)^{1-\lambda} < \sum\limits_{\lambda=1}^{p} m(2m)^{1-\lambda} = \dfrac{2m^2}{2m-1} \leqq \dfrac{2m^2}{2m-m} = 2m$, в силу (21) и (1) для $n > n_0$, $n = 4^{\beta(j,m)}$, $j \geqq m$ будет

$$\left|\frac{Q(t_n) - Q(t_0)}{t_n - t_0}\right| > E \,.\, b^{n!} \,.\, a^{-n\sum\limits_{\lambda=1}^{p} q_\lambda (2m)^{1-\lambda}} > E \,.\, \frac{b^{n!}}{a^{2mn}} =$$
$$= E\left(\frac{b^{(n-1)!}}{a^{2m}}\right)^n > E\left(\frac{b^{(n-2)!}}{a}\right)^{2mn} \geqq E\left(\frac{b^{n-2}}{a}\right)^{2mn} >$$
$$> E\left(\frac{b^{\frac{\lg 2a}{\lg b}}}{a}\right)^{2mn} = E \,.\, 2^{2mn} \,.$$

Для $n > n_0$, $n = 4^{\beta(j,m)}$, $j \geqq m$ получим, следовательно,

$$\left| \frac{Q(t_n) - Q(t_0)}{t_n - t_0} \right| > E \,.\, 2^{2mn} \,, \quad E > 0 \,. \tag{24}$$

Аналогично, согласно (22) и (2), для $n > n_0$, $n = 4^{\beta(j,m)}$, $j \geqq m$ будет

$$\left| \frac{Q(u_n) - Q(t_0)}{u_n - t_0} \right| > E \,.\, 2^{2mn} \,. \tag{25}$$

В силу (23) и (3) для $n > n_0$, $n = 4^{\beta(j,m)}$, $j \geqq m$ получим

$$\operatorname{sgn} \frac{Q(t_n) - Q(t_0)}{t_n - t_0} = - \operatorname{sgn} \frac{Q(u_n) - Q(t_0)}{u_n - t_0} \,. \tag{26}$$

Теперь уже нетрудно доказать, что функция $Q(t)$ не имеет собственной производной в точке t_0. Действительно, $\lim\limits_{n\to\infty} E \,.\, 2^{2mn} = \infty$ и, следовательно, — так как числа $4^{\beta(m,m)}$, $4^{\beta(m+1,m)}$, $4^{\beta(m+2,m)}, \dots$ образуют бесконечную возрастающую последовательность — согласно (24) и (25) будет

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{Q(t_n) - Q(t_0)}{t_n - t_0} \right| = \infty \,, \quad \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{Q(u_n) - Q(t_0)}{u_n - t_0} \right| = \infty \,,$$

что было бы невозможно, если бы в точке t_0 существовала собственная производная функция $Q(t)$, ибо $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = t_0$.

Однако, в точке t_0 не существует даже несобственная производная функции $Q(t)$, так как, согласно (26), или не существует одна из односторонних производных или обе односторонние производные имеют противоположные знаки.

Résumé

SUR LES FONCTIONS NON DÉRIVABLES

MILOSLAV JŮZA, Roztoky u Prahy.

(Reçu le 26 novembre 1954.)

On sait que des fonctions continues existent qui ne sont dérivables en aucun point. M. E. Čech a posé la question suivante: *Existe-t-elle une suite des fonctions* $G_1(t)$, $G_2(t)$, ... *telle que* $P(G_1(t), \dots, G_p(t))$ *soit une fonction continue non dérivable en aucun point, dès que* $P(x_1, \dots, x_p)$ *est un polynôme non-constant?*

Ce mémoire présente une suite des fonctions $G_n(t)$ qui a une propriété un peu plus générale proposée par M. V. Jarník:

Soit $P(x_1, \dots, x_p)$ *une fonction de p variables quelconque qui a pour chaque point la propriété suivante: elle admet des dérivées partielles de tous les ordres, une de ces dérivées étant différente de zéro. Dans ce cas, la fonction* $P(G_1(t), \dots, G_p(t))$ *est continue et non dérivable en aucun point.*