Jaroslav Kurzweil

К теории колебаний автономной квазилинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 4, 517–531

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100168

К ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ АВТОНОМНОЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЯРОСЛАВ КУРЦВЕЙЛЬ (Jaroslav Kurzweil), Прага.

(Поступило в редакцию 25/V 1955 г.)

В статье рассматривается уравнение

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mu f(\mathbf{x}, \mu)$$

(где $x = x(t)$ — векторная функция, A — матрица с постоянными элементами, μ — малый параметр, f — векторная функция). Дано периодическое решение $\mathbf{x}_0(t)$ с периодом ω уравнения $\dot{\mathbf{x}}_0 = A\mathbf{x}_0$. При определенных дополнительных условиях построено методом постепенных приближений периодическое решение $\mathbf{x}(t, \mu)$ с периодом $\omega + \alpha(\mu)$ уравнения (1) так, что $\mathbf{x}(t, \mu) \to \mathbf{x}_0(t)$, $\alpha(\mu) \to 0$ для $\mu \to 0$.

Будем рассматривать систему

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mu f(\mathbf{x}, \mu)\ , \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ есть столбцевой вектор, A — квадратная матрица ранга n с постоянными элементами, μ — число, а значения функции f являются столбцевыми векторами.

Пусть дано периодическое решение $\mathbf{x}_0$ с периодом ω однородного уравнения

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = A\mathbf{x}_0\ . \tag{2}$$

В том случае, если $f(\mathbf{x}, \mu)$ является аналитической функцией переменных $\mathbf{x}$, μ, можно при определенных дополнительных условиях доказать, что для достаточно малых μ существует периодическое решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mu)$ системы (1) с периодом $\omega + \alpha(\mu)$ и что

$$\alpha(\mu) \to 0 \quad \text{для} \quad \mu \to 0\ ,$$

$$\mathbf{x}(t, \mu) \to \mathbf{x}_0(t) \quad \text{равномерно для}\ \mu \to 0\ , \quad 0 \leqq t \leqq 2\omega\ .[1]$$

[1]) См. [1], § 4 (стр. 25), § 11 (стр. 67).

Цель настоящей работы состоит в достижении подобных результатов по методу постепенных приближений. Это нам позволит работать со значительно более слабыми предположениями о функции f. Метод постепенных приближений для нахождения периодических решений неавтономных квазилинейных систем был применен И. Г. Малкиным в работах [2], [3] и С. Н. Шимановым в работе [4].

$\tilde{\mathbf{x}}$, ($\tilde{\mathbf{y}}$, ...) обозначает строчный вектор $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, \ldots, x_n)$, а уравнение

$$\dot{\mathbf{y}} + \tilde{\mathbf{y}}A = 0 \tag{3}$$

является сопряженным с уравнением (2). Пусть $\|B\|$ ($\|\mathbf{y}\|$, $\|\mathbf{x}\|$) обозначает норму матрицы B (вектора $\tilde{\mathbf{y}}$, $\mathbf{x}$). Например, можно положить

$$\|B\| = \max_i \sum_k |b_{ik}| , \quad \|\tilde{\mathbf{y}}\| = \sum_k |\mathbf{y}_k| , \quad \|\mathbf{x}\| = \max_i |x_i| .$$

Тогда будет, очевидно,

$$\|A + B\| \leqq \|A\| + \|B\| , \quad \|AB\| \leqq \|A\| \, \|B\| , \quad \|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\|$$

и т. д.

Предположим, что дано периодическое решение $\mathbf{x}_0(t)$ системы (2) с периодом ω. Пусть X будет множеством значений функции $\mathbf{x}_0(t)$, т. е.

$$X = \mathop{\mathrm{E}}_{\mathbf{x}} [\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(t) \quad \text{для подходящих } t] .$$

Пусть функция $f(\mathbf{x}, \mu)$ определена и непрерывна для всех $\mathbf{x}$, μ таких, что

$$\varrho(\mathbf{x}, X) \leqq 1 ; \quad |\mu| \leqq 1$$

($\varrho(\mathbf{x}, X)$ обозначает расстояние точки x от множества X). Пусть при фиксированном μ функции $\mathbf{x}(t, \mu)$ является периодическим решением системы (1) с периодом $\omega + \alpha(\mu)$ и пусть

$$\alpha(\mu) \to 0 \quad \text{для} \quad \mu \to 0 ,$$
$$\mathbf{x}(t, \mu) \to \mathbf{x}_0(t) \quad \text{равномерно для} \quad \mu \to 0 ,$$
$$0 \leqq t \leqq 2\omega .$$

Пусть существует периодическое решение $\tilde{\mathbf{v}}_1$ с периодом ω сопряженного уравнения (3), а именно такое, что

$$\mathbf{v}_1(t) \, A\mathbf{x}_0(t) \neq 0 .^{2)}$$

Тогда имеет место

Теорема 1. *Частное* $\dfrac{\alpha(\mu)}{\mu}$ *имеет (конечный) предел при* $\mu \to 0$.

Если для некоторых периодических решений $\tilde{\mathbf{y}}$ *с периодом* ω *уравнения* (3) *имеет место*

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) \, A\mathbf{x}_0(t) = 0 ,$$

[2]) Дифференцируя, можно легко убедиться, что выражение $\tilde{\mathbf{v}}_1(t) \, A\mathbf{x}_0(t)$ не зависит от t.

то

$$\int_0^\omega \tilde{\mathbf{y}}(t)\, f(\mathbf{x}_0(t), 0)\, \mathrm{d}t = 0\,.$$

Теорема 1 утверждает, что только для некоторых периодических решений $\mathbf{x}_0(t)$ уравнения (2) может существовать искомое расширение $\mathbf{x}(t, \mu)$, удовлетворяющее уравнению (1) в классе непрерывных функций $\mathbf{x}(t, \mu)$. Малкин в книге [1], § 11, стр. 67 подробно рассмотрел случай уравнения

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + k^2 x = \mu f(x, \dot{x}, \mu)$$

при условии, что f является аналитической функцией переменных x, $\dot{x}$, μ и доказал, что решение $\mathbf{x}(t, \mu)$ уравнения (1), аналитическое в переменных t, μ, $x(t, 0) = M_0 \cos kt$, может существовать только тогда, когда имеет место равенство

$$\int_0^{\frac{2\pi}{k}} f(M_0 \cos kt\,, -kM_0 \sin kt, 0) \sin k\iota\, \mathrm{d}t = 0\,.$$

Легко убедиться, что теорема 1 нам дает то же условие в более общем случае. Утверждение о пределе частного $\dfrac{\alpha(\mu)}{\mu}$ у Малкина не встречается, так как Малкин предполагает, что функция $\alpha(\mu)$ является аналитической функцией переменной μ, $\alpha(0) = 0$.

Доказательство. Положим

$$\tilde{\mathbf{u}}_1(t, \mu) = \tilde{\mathbf{v}}_1 \left(\frac{\omega}{\omega + \alpha(\mu)}\, t \right).$$

Функция $\tilde{\mathbf{u}}_1(t, \mu)$ имеет, очевидно, период $\omega + \alpha(\mu)$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_1(t, \mu) + \frac{\omega}{\omega + \alpha(\mu)}\, \tilde{\mathbf{u}}_1(t, \mu)\, A = 0\,. \tag{4}$$

Ясно, что будет [см. (1)]

$$\int_0^{\omega+\alpha} \tilde{\mathbf{u}}_1(t, \mu)\, \dot{\mathbf{x}}(t, \mu)\, \mathrm{d}t = \int_0^{\omega+\alpha} \tilde{\mathbf{u}}_1(t, \mu)\, A\mathbf{x}(t, \mu) + \mu \int_0^{\omega+\alpha} \tilde{\mathbf{u}}_1(t, \mu)\, f(\mathbf{x}(t, \mu), \mu)\, \mathrm{d}t\,. \tag{5}$$

Так как функции $\mathbf{u}_1(t, \mu)$, $\mathbf{x}(t, \mu)$ имеют период $\omega + \alpha$, то

$$\int_0^{\omega+\alpha} \tilde{\mathbf{u}}_1(t, \mu)\, \dot{\mathbf{x}}(t, \mu)\, \mathrm{d}t = -\int_0^{\omega+\alpha} \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_1(t, \mu)\, \mathbf{x}(t, \mu) = \frac{\omega}{\omega + \alpha} \int_0^{\omega+\alpha} \tilde{\mathbf{u}}_1(t, \mu)\, A\mathbf{x}(t, \mu)\, \mathrm{d}t\,,$$

ввиду уравнения (4). Из уравнения (5) получаем:

$$-\frac{\alpha(\mu)}{\omega + \alpha(\mu)} \int_0^{\omega+\alpha(\eta)} \tilde{\mathbf{u}}_1(t, \mu)\, A\mathbf{x}(t, \mu)\, \mathrm{d}t = \mu \int_0^{\omega+\alpha(\eta)} \tilde{\mathbf{u}}_1(t, \mu)\, f(\mathbf{x}(t, \mu), \mu)\, \mathrm{d}t\,.$$

Для $\mu \to 0$ имеет место

$$\int_0^{\omega+\alpha(\eta)} \tilde{\mathbf{u}}_1(t, \mu)\, A\mathbf{x}(t, \mu)\, \mathrm{d}t \to \omega\tilde{\mathbf{u}}_1(0)\, A\mathbf{x}_0(0) \neq 0 \,,$$

$$\int_0^{\omega+\alpha(\eta)} \tilde{\mathbf{u}}_1(t, \mu)\, f(\mathbf{x}(t, \mu), \mu)\, \mathrm{d}t \to \int_0^{\omega} \tilde{\mathbf{u}}_1(t)\, f(\mathbf{x}_0(t)\; 0)\, \mathrm{d}t \,;$$

итак, предел $\lim\limits_{\mu\to 0} \dfrac{\alpha(\mu)}{\mu}$ существует, чем и доказана первая часть теоремы 1.

Пусть, далее, $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ — периодическое решение уравнения (3) с периодом ω и пусть $\tilde{\mathbf{y}}(t)\, A\mathbf{x}_0(t) = 0$. Положим опять

$$\tilde{\mathbf{z}}(t, \mu) = \tilde{\mathbf{y}}\left(\frac{\omega}{\omega + \alpha(\mu)}\, t\right).$$

Получаем

$$\int_0^{\omega+\alpha} \tilde{\mathbf{z}}(t, \mu)\, \dot{\mathbf{x}}(t, \mu)\, \mathrm{d}t = \int_0^{\omega+\alpha} \tilde{\mathbf{z}}(t, \mu)\, A\mathbf{x}(t, \mu)\, \mathrm{d}t + \mu \int_0^{\omega+\alpha} \tilde{\mathbf{z}}(t, \mu)\, f(\mathbf{x}(\mu))\, \mathrm{d}t \,,$$

$$\int_0^{\omega+\alpha} \tilde{\mathbf{z}}(t, \mu)\, \dot{\mathbf{x}}(t, \mu)\, \mathrm{d}t = -\int_0^{\omega+\alpha} \dot{\tilde{\mathbf{z}}}(t, \mu)\, \mathbf{x}(t, \mu)\, \mathrm{d}t = \frac{\omega}{\omega+\alpha} \int_0^{\omega+\alpha} \tilde{\mathbf{z}}(t, \mu)\, A\mathbf{x}(t, \mu)\, \mathrm{d}t \,,$$

$$-\frac{\dfrac{\alpha(\mu)}{\mu}}{\omega + \alpha(\mu)} \cdot \int_0^{\omega+\alpha(\mu)} \tilde{\mathbf{z}}(t, \mu)\, A\mathbf{x}(t, \mu)\, \mathrm{d}t = \int_0^{\omega+\alpha(\mu)} \tilde{\mathbf{z}}(t, \mu)\, f(\mathbf{x}(t, \mu), \mu)\, \mathrm{d}t \,.$$

Левая часть этого уравнения стремится к нулю при $\mu \to 0$, правая часть стремится к выражению

$$\int_0^{\omega} \tilde{\mathbf{y}}(t)\, f(\mathbf{x}_0(t), 0)\, \mathrm{d}t \,.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\omega} \tilde{\mathbf{y}}(t)\, f(\mathbf{x}_0(t), 0)\, \mathrm{d}t = 0 \,,$$

и теорема 1 доказана.

Для построения решения $\mathbf{x}(t, \mu)$ нам понадобится следующая хорошо известная лемма:

Лемма. *Уравнение*

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + \mathbf{w} \,,$$

где $\mathbf{w}$ *является векторной периодической функцией с периодом* ω, *имеет периодическое решение* $\mathbf{z}$ *с периодом* ω *тогда и только тогда, если*

$$\int_0^{\omega} \tilde{\mathbf{y}}\mathbf{w}\, \mathrm{d}t = 0 \,,$$

как только $\tilde{\mathbf{y}}$ *является периодическим решением уравнения* (3) *с периодом* ω.

Для полноты приводим краткое доказательство леммы:

Доказательство. Как известно, любое решение уравнения (6) можно записать в виде

$$\mathbf{z}(t) = X(t)\,\mathbf{c} + \int_0^t X(t)\,X^{-1}(\tau)\,\mathbf{w}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

где матрица $X(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dot{X} = AX$ и условию $X(0) = E$[3]) и $\mathbf{c}$ является постоянным вектором. Решение $\mathbf{z}(t)$ периодично с периодом ω тогда и только тогда, если

$$-\,[X(\omega) - E]\,\mathbf{c} = \int_0^\omega X(\omega)\,X^{-1}(\tau)\,\mathbf{w}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

$$-\,[E - X^{-1}(\omega)]\,\mathbf{c} = \int_0^\omega X^{-1}(\tau)\,\mathbf{w}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{7}$$

Однако, вектор $\mathbf{c}$ удовлетворяющий уравнению (7), существует тогда и только тогда, когда для любого вектора $\tilde{\mathbf{b}}$ имеет место равенство

$$\int_0^\omega \tilde{\mathbf{b}} X^{-1}(\tau)\,\mathbf{w}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0\,,$$

как только

$$\tilde{\mathbf{b}}[E - X^{-1}(\omega)] = 0\,. \tag{8}$$

Матрица X^{-1} удовлетворяет уравнению

$$(X^{-1})^{\dot{}} + X^{-1}A = 0\,,$$

и каждое решение $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ уравнения (3) можно написать в виде

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \tilde{\mathbf{b}} X^{-1}(t)\,,\quad \tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{y}}(0)\,.$$

Решение $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ имеет период ω тогда и только тогда, когда имеет место равенство (8), чем и доказана лемма.

Теперь приступим к построению функции $\mathbf{x}(t, \mu)$. Пусть $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s$ — базис для периодических решений системы (2) с периодом ω. Это означает, что матрица $X(\omega) - X(0)$ имеет ранг $n - s$. Но тогда и матрица $X^{-1}(\omega) - X^{-1}(0) = -X^{-1}(\omega)\,[X(\omega) - E]$ имеет ранг $n - s$ и периодические решения с периодом ω системы (3) имеют s-членный базис $\tilde{\mathbf{v}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{v}}_s$. Пусть, далее, определитель матрицы

$$U = \begin{pmatrix} x_{q_1,1}(\omega) - \delta_{q_1,1}, & x_{q_1,2}(\omega) - \delta_{q_1,2}, & \ldots, & x_{q_1,n-s}(\omega) - \delta_{q_1,n-s} \\ x_{q_2,1}(\omega) - \delta_{q_2,1}, & x_{q_2,2}(\omega) - \delta_{q_2,2}, & \ldots, & x_{q_2,n-s}(\omega) - \delta_{q_2,n-s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{q_{n-s},1}(\omega) - \delta_{q_{n-s},1}, & x_{q_{n-s},2}(\omega) - \delta_{q_{n-s},2}, & \ldots, & x_{q_{n-s},n-s}(\omega) - \delta_{q_{n-s},n-s} \end{pmatrix}$$

[3]) E является единичной матрицей. См. например [5], гл. 1, стр. 20.

отличен от нуля ($x_{ij}(t)$ являются элементами матрицы X, $\delta_{i,i} = 1$, $\delta_{i,j} = 0$, $i \neq j$).

Пусть дано периодическое решение $\mathbf{x}_0(t)$ системы (2) с периодом ω и предположим, что

$$\tilde{\mathbf{v}}_1(t)\, A\mathbf{x}_0(t) \neq 0\,. \tag{9}$$

Без ограничения общности можем предположить, что

$$\tilde{\mathbf{v}}_i(t)\, A\mathbf{x}_0(t) = 0; \quad i = 2, 3, \ldots, s\,. \tag{10}$$

[Если бы уравнения (10) не были справедливы, то вместо функций $\tilde{\mathbf{v}}_i(t)$, $i = 2, 3, \ldots, s$ применяем функции $\tilde{\mathbf{v}}_i(t) - \lambda_i \tilde{\mathbf{v}}_1(t)$ с подходящими числами λ_i.] Далее предположим, что

$$\int_0^\omega \tilde{\mathbf{v}}_i(t)\, f(\mathbf{x}_0(t), 0)\, \mathrm{d}t = 0\,; \quad i = 2, 3, \ldots, s\,. \tag{11}$$

Дадим определение функций $\varphi_j(\mathbf{x}; \sigma_1, \ldots, \sigma_{s-1}, \gamma, \mu)$, где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ является непрерывной векторной периодической функцией с периодом ω, и $\sigma_1, \ldots, \ldots, \sigma_{s-1}, \gamma$ — действительные числа:

$$\varphi_j(\mathbf{x}; \sigma_1, \ldots, \sigma_{s-1}, \gamma, \mu) = \int_0^\omega \tilde{\mathbf{v}}_j(t)\, [\gamma A(\mathbf{x}(t) + \sigma_1 \mathbf{u}_1(t) + \ldots + \sigma_{s-1}\mathbf{u}_{s-1}(t)) +$$
$$+ f(\mathbf{x}(t) + \sigma_1 \mathbf{u}_1(t) + \ldots + \sigma_{s-1}, \mathbf{u}_{s-1}(t), \mu)]\, \mathrm{d}t\,, \quad j = 1, 2, \ldots, s.$$

Принимая во внимание предположения о функции f, определяем функции φ_j для всех функций $\mathbf{x}(t)$ (непрерывных, с периодом ω) у чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, \gamma$, для которых

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)\| \leqq \tfrac{1}{2}\,, \quad 0 \leqq t \leqq \omega\,, \quad |\sigma_1| \leqq \delta', \ldots, |\sigma_{s-1}| < \delta'\,,$$

где δ' — положительная постоянная.

Предположим, что функция $f(\mathbf{x}, \mu)$ удовлетворяет условию Липшица, т. е., что:

$$\|f(\mathbf{x}_1, \mu) - f(\mathbf{x}_2, \mu)\| < \lambda' \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|\,, \tag{12}$$
$$\varrho(\mathbf{x}_1, X) \leqq 1\,. \quad \varrho(\mathbf{x}_2, X) \leqq 1\,, \quad |\mu| \leqq 1\,.$$

Тогда функции φ_j удовлетворяют условию

$$|\varphi_j(\mathbf{x}_1, 0, \ldots, 0, \gamma, \mu) - \varphi_1(\mathbf{x}_2; 0, \ldots, 0, \gamma, \mu)| < \lambda'' \max_{0 \leqq t \leqq \omega} \|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\|\,, \tag{13}$$
$$\lambda'' > 0\,,$$

если для непрерывных функций $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$ с периодом ω

$$\|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t)\| < \tfrac{1}{2}\,, \quad \|\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_0(t)\| < \tfrac{1}{2}\,, \quad 0 \leqq t \leqq \omega\,,$$
$$|\mu| < 1\,, \quad |\gamma - \gamma_0| < \tfrac{3}{2}\,,$$

где число γ_0 определено уравнением

$$\gamma_0 \int_0^\omega \tilde{\mathbf{v}}_1 A \mathbf{y}_0\, \mathrm{d}t + \omega \int_0^\omega \tilde{\mathbf{v}}_1 f(\mathbf{y}_0, 0)\, \mathrm{d}t = 0\,.$$

Предположим далее, что при фиксированной функции $\mathbf{x}(t)$ функции φ_j имеют непрерывные частные производные по переменным $\sigma_1, \ldots, \sigma_{s-1}, \gamma$ и что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ так, что

$$|\varphi_{j\sigma_i}(\mathbf{x}; \sigma_1 \ldots \sigma_{s-1}, \gamma, \mu) - \varphi_{j,\sigma_i}(\mathbf{x}_0, 0, \ldots, 0, \gamma_0, 0)| < \varepsilon$$

для каждой непрерывной функции $\mathbf{x}(t)$ с периодом ω,

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)\| < \delta_1 \ldots, |\sigma_{s-1}| < \delta\,, \quad |\gamma - \gamma_0| < 3\delta\,; \quad |\mu| < \delta\,;$$

(φ_{j,σ_i} является частной производной функции φ_j по переменной σ_i; $j = 1, 2, \ldots, s$; $i = 1, 2, \ldots, s - 1$).

Все эти условия являются выполненными, например, в том случае, когда векторная функция $f(\mathbf{x}, \mu)$ имеет частные производные по координатам вектора $\mathbf{x}$, которые находятся в непрерывной зависимости от переменных $\mathbf{x}$, μ. Наконец, предположим, что нам удалось выбрать функции $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{s-1}$ таким образом, что функциональный определитель

$$\frac{\partial(\varphi_1(\mathbf{x}_0; \sigma_1, \ldots, \gamma, \mu), \ldots, \varphi_s(\mathbf{x}_0; \sigma_1, \ldots, \gamma, \mu)}{\partial(\sigma_1, \ldots, \sigma_{s-1}, \gamma)} = \beta \neq 0 \tag{14}$$

для $\sigma_1 = \ldots = \sigma_{s-1} = 0$; $\gamma = \gamma_0$; $\mu = 0$.

При выполнении этих условий мы можем применить метод постепенных приближений для расчета функции $\mathbf{x}(t, \mu)$. Определим последовательность функций $\mathbf{x}_0(t)$, $\mathbf{x}_1(t), \ldots$, которая равномерно стремится к функции $\mathbf{x}(t, \mu)$ с периодом $\omega + \alpha(\mu)$ на каждом ограниченном интервале. Функция $\mathbf{x}_1(t)$ будет иметь период $\omega + \alpha_1$, функция $\mathbf{x}_2(t)$ будет иметь период $\omega + \alpha_2, \ldots$ Целесообразно работать с последовательностью функций $\mathbf{y}_0(t)$, $\mathbf{y}_1(t), \ldots$, имеющих период ω и находящихся в связи с функциями $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t), \ldots$

$$\mathbf{y}_0(t) = \mathbf{x}(t), \ \mathbf{y}_k(t) = \mathbf{x}_k\left(\frac{\omega + \alpha_k}{\omega}\, t\right), \ \mathbf{y}(t, \mu) = \mathbf{x}\left(\frac{\omega + \alpha(\mu)}{\omega}\, t, \mu\right), \ k = 1, 2, \ldots.$$

Функция $\mathbf{y}(t, \mu)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{\omega + \alpha}{\omega}\,(A\mathbf{y} + \mu f(\mathbf{y}, \mu))\,. \tag{15}$$

Это уравнение мы перепишем в виде

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \frac{1}{\omega}\,(\alpha A\mathbf{y} + \mu f(\mathbf{y}, \mu))\,.$$

Положим еще

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\mu}\,;\ \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\mu}\,,\ \ldots \tag{16}$$

Функцию $\mathbf{y}$ будем искать по методу постепенных приближений. Сначала опишем метод постепенных приближений, а потом докажем, что все описанные операции можно произвести.

Число α_1 определим уравнением

$$\alpha_1 \int_0^\omega \tilde{\mathbf{v}}_1 A \mathbf{y}_0 \, \mathrm{d}t + \mu\omega \int_0^\omega \tilde{\mathbf{v}}_1 \mathbf{f}(\mathbf{y}_0, \mu) \, \mathrm{d}t = 0 \,. \text{[4]} \tag{17}$$

Дадим определение вспомогательных функций

$$\mathbf{z}_1(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t X(t - \tau) \left[\alpha_1 A \mathbf{y}_0(\tau) + \mu\omega \mathbf{f}(\mathbf{y}_0(\tau), \mu)\right] \mathrm{d}t \,, \text{[5]}$$

$$\mathbf{w}_1(t) = \mathbf{y}_0(t) + \mathbf{z}_1(t) + X(t)\, \mathbf{c}_1 \,,$$

где вектор $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{1,n} \end{pmatrix}$ подчинен условиям

$$(X(\omega) - E)\, \mathbf{c}_1 = -\frac{1}{\omega} \int_0^\omega X(\omega - \tau)[\alpha_1 A \mathbf{y}_0(\tau) + \mu\omega \mathbf{f}(\mathbf{y}_0(\tau)\, \mu)] \, \mathrm{d}\tau \,,$$

$$c_{1,n-s+1} = \ldots = c_{1,n} = 0 \,.$$

Из предположения, что определитель матрицы U не равен нулю, из (10), (11), (17) и из леммы следует, что вектор $\mathbf{c}_1$ существует, что он однозначно определен, что функция $\mathbf{w}_1$—периодическая с периодом ω и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\mathbf{w}}_1 = A \mathbf{w}_1 + \frac{1}{\omega} (\alpha_1 A \mathbf{y}_0 + \mu\omega \mathbf{f}(\mathbf{y}_0, \mu)) \,.$$

Дадим определение функции $\mathbf{y}_1(t)$

$$\mathbf{y}_1(t) = \mathbf{w}_1(t) + \sigma_{1,1} \mathbf{u}_1(t) + \ldots + \sigma_{s-1,1} \mathbf{u}_{s-1}(t) \,.$$

Числа $\sigma_{1,1}, \ldots, \sigma_{s-1,1}$, одновременно и число α_2, получим из уравнений

$$\varphi_j \left(\mathbf{w}_1;\, \sigma_{1,1},\, \ldots,\, \sigma_{s-1,1},\, \frac{\alpha_2}{\mu}\right) = 0 \,;\; j = 1, 2, \ldots, s \,.$$

Функция $\mathbf{y}_1$ имеет период ω и удовлетворяет уравнению

$$\dot{\mathbf{y}}_1 = A \mathbf{y}_1 + \frac{1}{\omega} (\alpha_1 A \mathbf{y}_0 + \mu\omega \mathbf{f}(\mathbf{y}_0, \mu)) \,.$$

Если нам известны функции $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r$

$$\mathbf{y}_r = \mathbf{w}_r + \sigma_{1,r} \mathbf{u}_1 + \ldots + \sigma_{s-1,r} \mathbf{u}_{s-1}$$

---

[4]) Согласно условию,

$$\int_0^\omega \tilde{\mathbf{v}} A \mathbf{x}_0 \, \mathrm{d}t \neq 0$$

[5]) $X(t - 0) = X(t)\, X^{-1}(\tau)$, так как матрица A — постоянная.

и число α_{r+1} так, что

$$\varphi_j\left(\mathbf{w}_r;\ \sigma_{1,r},\ \ldots,\ \sigma_{s-1,r},\ \frac{\alpha_{r+1}}{\mu}\right) = 0\ ,\quad j = 1, 2, \ldots, s\ , \tag{18}$$

то определяем вспомогательные функции

$$\mathbf{z}_{r+1}(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t X(t-\tau)[\alpha_{r+1}A\mathbf{y}_r(\tau) + \mu\omega f(\mathbf{y}_r(\tau), \mu)]\,\mathrm{d}\tau\ ,$$

$$\mathbf{w}_{r+1}(t) = \mathbf{y}_0(t) + \sum_{j=1}^{r}(\sigma_{1,j}\mathbf{u}_1(t) + \ldots + \sigma_{s-1,j}\mathbf{u}_{s-1}(t)] + \mathbf{z}_{r+1}(t) + X(t)\,\mathbf{c}_{r+1}\ ,$$

где вектор $\mathbf{c}_{r+1} = \begin{pmatrix} c_{r+1,1} \\ c_{r+1,n}\end{pmatrix}$ задан условиями

$$(X(\omega) - E)\,\mathbf{c}_{r+1} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega X(\omega-\tau)[\alpha_{r+1}A\mathbf{y}_r(\tau) + \mu\omega f(\mathbf{y}_r(\tau), \mu)]\,\mathrm{d}\tau\ ,$$

$$c_{r+1,n-s+1} = \ldots = c_{r+1,n} = 0\ .$$

Из предположения об определителе матрицы U, из (18) и из леммы следует, что вектор $\mathbf{c}_{r+1}$ существует, однозначно определен и функция $\mathbf{w}_{r+1}$ имеет период ω и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\mathbf{w}}_{r+1} = A\mathbf{w} + \frac{1}{\omega}(\alpha_{r+1}A\mathbf{y}_r + \mu\omega f(\mathbf{y}_r, \mu))\ .$$

Дадим определение функции $\mathbf{y}_{r+1}$

$$\mathbf{y}_{r+1}(t) = \mathbf{w}_{r+1}(t) + \sigma_{1r,+1}\mathbf{u}_1(t) + \ldots + \sigma_{s-1,r+1}\mathbf{u}_{s-1}(t)\ ,$$

где числа $\sigma_{1,r+1}, \ldots, \sigma_{s-1,r+1}$ вместе с числом α_{r+2} получим из уравнений

$$\varphi_j\left(\mathbf{w}_{r+1};\ \sigma_{1,r+1},\ \ldots,\ \sigma_{s-1,r+1},\ \frac{\alpha_{r+2}}{\mu}\right) = 0;\quad j = 1, 2, \ldots, s\ .$$

Функция $\mathbf{y}_{r+1}$ имеет период ω и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\mathbf{y}}_{r+1} = A\mathbf{y}_{r+1} + \frac{1}{\omega}(\alpha_{r+1}A\mathbf{y}_r + \mu\omega f(\mathbf{y}_r, \mu))\ . \tag{19}$$

Докажем, что все описанные операции можно произвести, что последовательность функций $\mathbf{y}_k(t)$ сходится равномерно и что последовательность чисел α_k сходится, если μ является достаточно малым.

Согласно предположению о функциях φ_j и из (14) следует, что существует такое число δ, $\frac{1}{2} > \delta > 0$, что

$$\left|\frac{\partial(\varphi_1(\mathbf{x};\ \sigma_1, \ldots, \sigma_{s-1}, \gamma, \mu), \ldots, \varphi_s(\mathbf{x};\ \sigma_1, \ldots, \sigma_{s-1}, \gamma, \mu))}{\partial(\sigma_1, \ldots, \sigma_{s-1}, \gamma)}\right| > \frac{|\beta|}{2}\ , \tag{20}$$

если
$$\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_0(t)\|<\delta\,,\quad |\sigma_1|<\delta,\ldots,|\sigma_{s-1}|<\delta,\ |\gamma-\gamma_0|<3\delta,\ |\mu|<\delta,$$
$\mathbf{x}(t)$ — непрерывная периодическая функция с периодом ω.

Выберем число λ настолько большое, чтобы было
$$\|f(\mathbf{x},\mu)\|<\lambda\,;\quad \varrho(\mathbf{x},X)<2\delta\,,\quad |\mu|<\delta\,. \tag{21}$$
$$\|X(t)\|<\lambda\,;\quad 0\leqq t\leqq\omega\,, \tag{22}$$
$$\|A\|<\lambda\,, \tag{23}$$
$$\|A\mathbf{y}_0(t)\|<\lambda\,, \tag{24}$$
$$\|\mathbf{u}_1(t)\|<\lambda_1,\ldots,\|\mathbf{u}_{s-1}(t)\|<\lambda\,, \tag{25}$$
$$\left.\begin{aligned}&\left|\frac{\partial\varphi_1(\mathbf{x};\sigma_1,\ldots,\sigma_{s-1},\gamma,\mu)}{\partial\sigma_k}\right|<\lambda\\&\left|\frac{\partial\varphi_j(\mathbf{x};\sigma_1,\ldots,\sigma_{s-1},\gamma,\mu)}{\partial\gamma}\right|<\lambda\end{aligned}\right\};\tag{26}$$
$$\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{y}_0(t)\|<\delta\,,\quad |\gamma-\gamma_0|<3\delta\,,\quad |\sigma_1|<\delta,\ldots,|\sigma_{s-1}|<\delta\,,$$
$$|\gamma-\gamma_1|<2\delta\,,\quad |\mu|<\delta\,,$$
$$\lambda'\neq\lambda\,, \tag{27}$$
$$\|U^{-1}\|<\lambda\,, \tag{28}$$
$$16\,\frac{n!}{|\beta|}<\lambda\,, \tag{29}$$
$$\omega+2<\lambda\,, \tag{30}$$
$$2s<\lambda\,, \tag{31}$$
$$2(\gamma_0+\delta+\omega)<\lambda\,. \tag{32}$$
Как вытекает из (16) и (17), число γ_1 определено уравнением
$$\gamma_1\int_0^\omega\tilde{\mathbf{v}}_1A\mathbf{y}_0\,\mathrm{d}t+\omega\int_0^\omega\tilde{\mathbf{v}}_1f(\mathbf{y}_0,\mu)\,\mathrm{d}t=0\,.$$
Пусть, далее, число λ настолько велико, что
$$|\gamma_1-\gamma_0|<\delta\,,\text{[6]} \tag{33}$$
если
$$|\mu|<\delta\lambda^{-n-8}\,.$$
Докажем, что справедлива

Теорема 2. *Если*
$$|\mu|<\delta\,.\,\lambda^{-n-8}\,, \tag{34}$$

---

[6]) Число γ_0 определено уравнением
$$\gamma_0\int_0^\omega\tilde{\mathbf{v}}A\mathbf{y}_0\,\mathrm{d}t+\omega\int_0^\omega\tilde{\mathbf{v}}f(\mathbf{y}_0,0)\,\mathrm{d}t=0$$

то верны оценки

$$\|\mathbf{y}_r(t) - \mathbf{y}_{r-1}(t)\| < \left(\frac{\delta}{2}\right)^r, \quad r = 1, 2, \ldots, \tag{35}$$

$$|\alpha_{r+1} - \alpha_r| < \mu\left(\frac{\delta}{2}\right)^r, \quad r = 1, 2, \ldots, \tag{36}$$

Доказательство. Сначала докажем соотношения (35), (36) для $r = 1$. Имеем:

$$\|\mathbf{z}_1(t)\| = \|\frac{1}{\omega}\int_0^t X(t-\tau)[\alpha_1 A\mathbf{y}_0(\tau) + \mu\omega f(\mathbf{y}_0(\tau), \mu)]\,\mathrm{d}\tau\| \leqq$$

$$\leqq \lambda[\mu\gamma_1\lambda + \mu\omega\lambda] \leqq \lambda^2[\gamma_1 + \omega]\,\mu \leqq \tfrac{1}{2}\delta\lambda^{-n-5}, \tag{37}$$

$$0 \leqq t \leqq \omega$$

[согласно (22), (16), (32), (24), (21), (32), (33), (34)]

$$\|\mathbf{c}_1\| \leqq \|U^{-1}\|\,\|\mathbf{z}_1(\omega)\| \leqq \tfrac{1}{2}\delta\lambda^{-n-4}$$

[согласно (28), (37)],

$$\|\mathbf{w}_1(t) - \mathbf{y}_0(t)\| \leqq \|\mathbf{z}_1(t)\| + \|X(t)\|\,\|\mathbf{c}_1\| \leqq \tfrac{1}{2}\delta(\lambda^{-n-5} + \lambda^{-n-3}) \leqq \delta\lambda^{-n-3}. \tag{38}$$

Докажем, что числа $\sigma_{1,1}, \ldots, \sigma_{s-1,1}, \gamma_2 - \gamma_1$ существуют и оценим их величину.

Очевидно,

$$\varphi_j(\mathbf{y}_0; 0, \ldots, 0, \gamma_1) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, s,$$

и, поэтому, согласно (12), (27), (38),

$$|\varphi_1(\mathbf{w}_1; 0, \ldots 0, \gamma_1)| < \delta\lambda^{-n-2}. \tag{39}$$

Дадим определение непрерывных вспомогательных функций $\sigma_{1,1}(\tau), \ldots, \ldots, \sigma_{s-1,1}(\tau), \gamma_2(\tau)$ при помощи следующих условий:

$$\sigma_{1,1}(0) = 0, \ldots, \sigma_{s-1,1}(0) = 0, \quad \gamma_2(0) = \gamma_1, \tag{40}$$

$$\varphi_1(\mathbf{w}_1; \sigma_{1,1}(\tau), \ldots, \sigma_{s-1,1}(\tau), \gamma_2(\tau), \mu) = (1-\tau)\,\varphi_j(\mathbf{w}, 0, \ldots, 0, \gamma_1, \mu).$$

Пусть $(0, \tau_1)$; $(\tau_1 > 0)$ будет максимальный интервал, на котором определены вспомогательные функции так, что

$$|\sigma_{1,1}(\tau)| \leqq \delta, \ldots, |\sigma_{s-1,1}(\tau)| \leqq \delta, \quad |\gamma_2(\tau) - \gamma_1| \leqq \delta \tag{41}$$

для $0 \leqq \tau \leqq \tau_1$. Согласно теореме о неявных функциях, интервал $(0, \tau_1)$ существует, соотношения (40) можно дифференцировать, и получается

$$\sum_{k=1}^{s-1} \dot{\sigma}_{k,1}(\tau)\,.\,\varphi_{j,\sigma_{k1}}(\mathbf{w}_1; \sigma_{1,1}(\tau), \ldots, \sigma_{s-1,1}(\tau), \gamma_2(\tau), \mu) +$$

$$+ \dot{\gamma}_2(\tau)\,\varphi_{j,\gamma_2}(\mathbf{w}_1; \sigma_{1,1}(\tau), \ldots, \sigma_{s-1,1}(\tau), \gamma_2(\tau)\,\mu) = -\varphi_j(\mathbf{w}_1; 0, \ldots, 0, \gamma_1, \mu),$$

$$0 \leqq \tau \leqq \tau_1; \quad j = 1, 2, \ldots, s.$$

Согласно предположениям (20) и (38), (41), можем отсюда вычислить $\dot{\sigma}_{k,1}(\tau), \dot{\gamma}_2(\tau)$. Имеет место

$$|\dot{\sigma}_{k,1}(\tau)| \leqq \frac{2}{|\beta|} n \,.\, \delta\lambda^{-n-2}(n-1)!\, \lambda^{n-1} \leqq 2\frac{n!}{|\beta|}\delta\lambda^{-3} \leqq \delta\lambda^{-2}\,; \quad 0 \leqq \tau \leqq \tau_1$$

[согласно (39), (29), (26)], и аналогично

$$|\dot{\gamma}_2(\tau)| \leqq \delta\lambda^{-2}\,, \quad 0 \leqq \tau \leqq \tau_1\,.$$

Это значит, что

$$\tau_1 \geqq \lambda^2 > 1\,.$$

Имеет место:

$$|\sigma_{k,1}(\tau)| \leqq \delta\lambda^{-2}\tau\,, \quad k = 1, 2, \ldots, s-1\,; \quad |\gamma_2(\tau) - \gamma_1| \leqq \delta\lambda^{-2}\tau\,, \quad 0 \leqq \tau \leqq \tau_1$$

Далее,

$$\sigma_{k,1}(1) = \sigma_{k,1}\,, \quad \gamma_2(1) = \gamma_2\,, \quad k = 1, 2, \ldots, s-1\,;$$

итак,

$$|\sigma_{k,1}| < \delta\lambda^{-2}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, s-1\,, \tag{42}$$

$$|\gamma_2 - \gamma_1| < \delta\lambda^{-2}\,. \tag{43}$$

Наконец, получаем

$$\|\mathbf{y}_1(t) - \mathbf{y}_0(t)\| \leqq \|\mathbf{w}_1(t) - \mathbf{y}_0(t)\| + \sum_{k=1}^{s-1} |\sigma_{k,1}|\, \|\mathbf{u}_k(t)\| \leqq$$
$$\leqq \delta\lambda^{-n-3} + (s-1)\,\delta\lambda^{-2}\lambda \leqq \tfrac{1}{2}\delta\, 2s\lambda^{-1} \leqq \tfrac{1}{2}\delta$$

[согласно (38), (42), (25), (31)]; итак, неравенство (35) удовлетворяется для $r = 1$. Согласно (43), будет

$$|\alpha_2 - \alpha_1| < \mu\delta\lambda^{-2}\,,$$

так что справедливо и (36) для $r = 1$.

Предположим теперь, что соотношения (35), (36) справедливы для $r = 1, 2, \ldots, l$, и докажем, что они имеют место также и для $r = l + 1$.

Легко удостоверимся в том, что

$$\|\mathbf{y}_l(t) - \mathbf{y}_0(t)\| < \delta - (\tfrac{1}{2}\delta)^{l+1}\,, \tag{44}$$

$$\left.\begin{aligned} |\gamma_l - \gamma_0| &< \delta \\ |\gamma_{l+1} - \gamma_0| &< \delta \end{aligned}\right\}, \tag{45}$$

$$\left.\begin{aligned} |\alpha_l| &< (|\gamma_0| + \delta)\, |\mu| < \lambda|\mu| \\ |\alpha_{l+1}| &< \lambda|\mu| \end{aligned}\right\}. \tag{46}$$

Далее,

$$\mathbf{z}_{l+1}(t) - \mathbf{z}_l(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t X(t-\tau)[\alpha_{l+1}A\mathbf{y}_l(\tau) + \mu\omega f(\mathbf{y}_l(\tau), \mu) - \alpha_l A\mathbf{y}_{l-1}(\tau) -$$
$$- \mu\omega f(\mathbf{y}_{l-1}(\tau), \mu)]\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int_0^t X(t-\tau)[(\alpha_{l+1}-\alpha_l)\,A\mathbf{y}_l(\tau) + \alpha_l A(\mathbf{y}_l(\tau) - \mathbf{y}_{l-1}(\tau)) +$$

$$+ \mu\omega(f(\mathbf{y}_l(\tau)\,\mu) - f(\mathbf{y}_{l-1}(\tau), \mu))]\,\mathrm{d}\tau\,,$$

$$\|\mathbf{z}_{l+1}(t) - \mathbf{z}_l(t)\| \leqq \lambda[\mu(\tfrac{1}{2}\delta)^l\,\lambda(1+\delta) + \mu\lambda^2(\tfrac{1}{2}\delta)^l + \mu\omega\lambda(\tfrac{1}{2}\delta)^l] \leqq$$

$$\leqq \mu(\tfrac{1}{2}\delta)^l[\lambda^3 + \lambda^2(1+\delta+\omega)] \leqq \delta\lambda^{-n-8}(\tfrac{1}{2}\delta)^l\,2\lambda^3 \leqq (\tfrac{1}{2}\delta)^{l+1}\,4\lambda^{-n-5}\,, \tag{47}$$

[согласно (22), (36), (24), (44), (46), (35), (13), (27), (30)],

$$\|\mathbf{c}_{l+1} - \mathbf{c}_l\| \leqq \|U^{-1}\|\,,\ \|\mathbf{z}_{l+1}(\omega) - \mathbf{z}_l(\omega)\| \leqq \lambda(\tfrac{1}{2}\delta)^{l+1}\,4\lambda^{-n-5} \leqq (\tfrac{1}{2}\delta)^{l+1}\,4\lambda^{-n-4}\,,$$

$$\mathbf{w}_{l+1}(t) - \mathbf{y}_l(t) = \mathbf{v}_{l+1}(t) - \mathbf{v}_l(t) + X(t)\,(\mathbf{c}_{l+1} - \mathbf{c}_l)\,, \tag{48}$$

$$\|\mathbf{w}_{l+1}(t) - \mathbf{y}_l(t)\| \leqq (\tfrac{1}{2}\delta)^{l+1}\,4\lambda^{-n-5} + \lambda(\tfrac{1}{2}\delta)^{l+1}\,4\lambda^{-n-4} \leqq (\tfrac{1}{2}\delta)^{l+1}\,8\lambda^{-n-3}\,.$$

Докажем, что существуют числа

$$\sigma_{1,l+1}, \sigma_{2,l+1}, \ldots, \sigma_{s-1,l+1}, \gamma_{l+2} - \gamma_{l+1}$$

и оценим их величину.

Подобно случаю $r = 1$, введем непрерывные вспомогательные функции

$$\sigma_{1,l+1}(\tau), \ldots, \sigma_{s-1,l+1}(\tau), \gamma_{l+2}(\tau)$$

так, чтобы было

$$\begin{aligned} &\sigma_{1,l+1}(0) = \ldots = \sigma_{s-1,l+1}(0) = 0\,; \quad \gamma_{l+2}(0) = \gamma_{l+1}\,; \\ &\varphi_j(\mathbf{w}_{l+1};\, \sigma_{1,l+1}(\tau), \ldots, \sigma_{s-1,l+1}(\tau), \gamma_{l+2}(\tau), \mu) = \\ &= (1-\tau)\,\varphi_j(\mathbf{w}_{l+1};\, 0, \ldots, 0, \gamma_{l+1};\, \mu)\,; \quad j = 1, 2, \ldots, s\,. \end{aligned} \tag{49}$$

Согласно предположению индукции (18), будет

$$\varphi_j(\mathbf{y}_l;\, 0, \ldots, 0, \gamma_{l+1}, \mu) = \varphi_j(\mathbf{w}_l;\, \sigma_{1,l}, \ldots, \sigma_{s-2,l}, \gamma_{l+1}, \mu) = 0\,, \quad j = 1, 2, \ldots, s\,.$$

Следовательно, с учетом (13), (27), (48),

$$|\varphi_j(\mathbf{w}_{l+1};\, 0, \ldots, 0, \gamma_{l+1}, \mu)| < (\tfrac{1}{2}\delta)^{l+1}\,8\lambda^{-n-2}\,, \quad j = 1, 2, \ldots, s\,. \tag{50}$$

Пусть $(0, \tau_{l+1})$, $(\tau_{l+1} > 0)$ будет максимальным интервалом, на котором определены вспомогательные функции так, что удовлетворяются неравенства

$$|\sigma_{k,l+1}(\tau)| \leqq \delta\,, \quad |\gamma_{l+2}(\tau) - \gamma_{l+1}| \leqq \delta\,, \quad 0 \leqq \tau \leqq \tau_{l+1}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, s-1$$

На интервале $(0, \tau_1)$ можно дифференцировать соотношения (49):

$$\sum_{k=1}^{s-1} \dot\sigma_{k,l+1}(\tau)\,\varphi_{j,\sigma_{k,l+1}}(\mathbf{w}_{l+1};\, \sigma_{1,l+1}(\tau), \ldots, \sigma_{s-1,l+1}(\tau), \gamma_{l+2}(\tau), \mu) +$$

$$+ \dot\gamma_{l+2}(\tau)\,\varphi_{j,\gamma_{l+2}}(\mathbf{w}_{l+1};\, \sigma_{1,l+1}(\tau), \ldots, \sigma_{s-1,l+1}(\tau), \gamma_{l+2}(\tau), \mu) =$$

$$= -\,\varphi_j(\mathbf{w}_{l+1};\, 0, \ldots, 0, \gamma_{l+1}, \mu)\,.$$

Из этого можно вычислить и дать оценку

$$|\sigma_{k,l+1}(\tau)| \leqq \frac{2}{|\beta|} n \left(\frac{\delta}{2}\right)^{l+1} 8\lambda^{-n-2}(n-1)!\,\lambda^{n-1} \leqq 16\frac{n!}{|\beta|}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{l+1}\lambda^{-3} \leqq \left(\frac{\delta}{2}\right)^{l+1}\lambda^{-2},$$

$$0 \leqq \tau \leqq \tau_{l+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, s-1,$$

и аналогично

$$|\dot{\gamma}_{l+2}(\tau)| \leqq (\tfrac{1}{2}\sigma)^{l+1}\lambda^{-2}, \quad 0 \leqq \tau \leqq \tau_{l+1}$$

[согласно (20), (48), (44), (30), (51), (45), (29)].

Это означает, что

$$|\sigma_{k,l+1}(\tau)| < (\tfrac{1}{2}\delta)^{l+1}\lambda^{-2}\tau, \quad |\gamma_{l+2}(\tau) - \gamma_{l+1}| < (\tfrac{1}{2}\delta)^{l+1}\lambda^{-2}\tau,$$
$$0 \leqq \tau \leqq \tau_{l+1},$$

и

$$\tau_{l+1} \geqq \delta\lambda^2(\tfrac{1}{2}\delta)^{-l-1} > 1.$$

Таким образом, получаем

$$\sigma_{k,l+1}(1) = \sigma_{k,l+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, s-1, \quad \gamma_{l+2}(1) = \gamma_{l+2}, \tag{52}$$

$$|\sigma_{k,l+1}| \leqq (\tfrac{1}{2}\delta)^{l+1}\lambda^{-2}, \tag{52}$$

$$|\gamma_{l+2} - \gamma_{l+1}| \leqq (\tfrac{1}{2}\delta)^{l+1}\lambda^{-2}. \tag{53}$$

Из (53) сразу же получаем

$$|\alpha_{l+2} - \alpha_{l+1}| < \mu(\tfrac{1}{2}\delta)^{l+1};$$

итак, (36) имеет место для $r = 1 + 1$.

Далее,

$$\|\mathbf{y}_{l+1}(t) - \mathbf{y}_l(t)\| \leqq \|\mathbf{w}_{l+1}(t) - \mathbf{y}_l(t)\| + |\sigma_{1,l+1}|\,\|\mathbf{u}_1(t)\| + \ldots +$$
$$+ \ldots + |\sigma_{s-1,l+1}|\,\|\mathbf{u}_{s-1}(t)\| \leqq (\tfrac{1}{2}\delta)^{l+1}8\lambda^{-n-3} + (s-1)(\tfrac{1}{2}\delta)^{l+1}\lambda^{-2}\lambda \leqq$$
$$\leqq (\tfrac{1}{2}\delta)^{l+1}s\lambda^{-1} \leqq (\tfrac{1}{2}\delta)^{l+1}$$

[согласно (48), (52), (25), (31)].

Неравенство (35) справедливо и для $r = l + 1$ и теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 легко вытекает, что существует функция $\mathbf{y}(t, \mu) = \lim_{r\to\infty} \mathbf{y}_r(t)$, удовлетворяющая уравнению (15), где $\alpha = \lim_{r\to\infty} \alpha_r$, и имеющая период ω, и функция $\mathbf{x}(t, \mu)$, удовлетворяющая уравнению (1) и имеющая период $\omega + \alpha$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *И, Г. Малкин*: Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Москва, Ленинград 1949.

[2] *И. Г. Малкин*: Колебания квазилинейных систем с неаналитической характеристикой нелинейности. Прикладная математика и механика т. XIV (1950), 13—22.

[3] *И. Г. Малкин*: К теории колебаний квазилинейных систем, Прикладная математика и механика, т. XIV (1950), 353—370.

[4] *С. Н. Шиманов*: К теории колебаний квазилинейных систем, Прикладная математика и механика, т. XVIII (1954), 154—162.

[5] *Р. Беллман:* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, Москва 1954.

Summary

ON OSCILLATIONS OF AUTONOMOUS NON-LINEAR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

JAROSLAV KURZWEIL, Praha.

(Received May 25, 1955.)

In this paper is considered the equation

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mu\, f(\mathbf{x}, \mu)\,. \tag{1}$$

Here $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ is a vector-function, A is a square-matrix of order n with constant elements, μ is a small parameter and the values of the function f are vectors.

Let $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(t)$ be a periodic solution with the period ω of the equation

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = A\mathbf{x}_0\,. \tag{2}$$

If the function $f(\mathbf{x}, \mu)$ depends analytically on the variables $\mathbf{x}$, μ, it is known, that under some supplementary conditions there exists a periodic solution $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mu)$ of the equation (1) with the period $\omega + \alpha(\mu)$ for small values of μ and that the following conditions are fulfilled

$$\alpha(\mu) \to 0 \text{ for } \mu \to 0\,,$$

$$\mathbf{x}(t, \mu) \to \mathbf{x}_0(t) \text{ uniformly for } \mu \to 0,\ 0 \leqq t \leqq 2\omega\,.$$

In this paper the same results are received by means of the method of successive approximations. As the method of successive approximations is used, only weak assumptions concerning the function f an needed. The method of successive approximations was used by I. G. Malkin [2], [3] and S. N. Šimanov [4] in order to find periodic solutions of non-autonomous quasilinear systems.