Czechoslovak Mathematical Journal

František Zítek
Sur l'intégrabilité d'une équation différentielle stochastique

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 3, 473–482

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100319

Чехословацкий математический журнал, т. 8 (83) 1958, Прага

SUR L'INTÉGRABILITÉ D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE STOCHASTIQUE

FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha
(Reçu le 14 août 1957)

Dans cette Note sont déterminées les conditions d'intégrabilité (au point de vue de Bernoulli) de l'équation

$$\delta X(t) \sim Y g(\mathrm{d}t) .$$

1. Introduction

M. Paul Lévy étudie dans son livre [2], p. 42, l'équation différentielle stochastique

$$\delta X(t) = \xi \sqrt{\mathrm{d}t} \tag{1.1}$$

où ξ désigne une variable aléatoire normale $\mathrm{N}(0, 1)$. La solution de cette équation est alors représentée par la fonction aléatoire du mouvement brownien linéaire (fonction aléatoire de Wiener-Lévy). Le point de vue de M. Lévy en ce qui concerne les questions générales d'intégrabilité des équations de la forme (1.1) n'est malheureseument pas tout à fait conséquent. Il affirme d'une part que l'équation (1.1) où l'on prend pour ξ la variable aléatoire du jeu de pile ou face aux valeurs possibles 1 et -1 n'est pas intégrable (cf. [2], p. 43), mais d'autre part il admet au suivant alinéa que le second membre de l'équation (1.1) ne détermine pas nécessairement la loi de répartition de l'accroissement

$$\mathrm{d}X(t) = X(t + \mathrm{d}t) - X(t) \tag{1.2}$$

tout à fait exactement, mais seulement avec une certaine erreur qui est — dans un certain sens — suffisamment petite, (cf. [2], p. 44). Nous avons signalé l'inconséquence de l'interprétation de M. Lévy de la notion d'équation différentielle stochastique et de son intégrabilité déjà dans notre Mémoire antérieur [5], où nous avons développé aussi une autre théorie des équations différentielles stochastiques, basée sur les notions de fonction aléatoire d'intervalle et d'intégrale-(BB). Or dans la présente Note nous allons considérer les équations différentielles stochastiques du point de vue de la théorie dont nous avons exposé les idées principales au paragraphe 8 de notre Thèse [4] et qui se trouve reproduite aussi dans notre article [6].

Pour les définitions des notions fondamentales introduites ainsi que pour les notations employées il faut donc se reporter à cet article [6], publié ci-devant, *et qui est supposé connu*. Le but principal de la présente Note sera alors d'établir les conditions générales d'intégrabilité (au point de vue de Bernoulli) des équations différentielles stochastiques de la forme[1])

$$\delta X(t) \sim Y \, . \, g(\mathrm{d}t) \, , \tag{1.3}$$

$Y \in \mathfrak{X}$. Nous supposons ici que g soit une fonction réelle d'une variable réelle, définie et non-décroissante dans l'intervalle $R_0 = \langle 0, \infty)$ et vérifiant

$$\lim_{h \to 0+} g(h) = g(0) = 0 \, . \tag{1.4}$$

Ces conditions-là sont bien naturelles et constituent une généralisation directe du cas de $g(h) = \sqrt{h}$ étudié par M. Lévy dans son livre [2].

Nous étudierons l'équation (1.3) dans les deux interprétations possibles, c'est-à-dire „avec" ou „sans erreur", (voir [6], (3.4) et (3.5)), ce qui correspond d'ailleurs aux deux sens (incompatibles) des idées de M. Lévy.

Il découle de la forme même de l'équation (1.3) que sa solution, s'il y en a une, doit être une fonction aléatoire à accroissements indépendants, car son second membre ne dépend pas des valeurs de $X(u)$, $u \leqq t$; en plus de cela, la solution doit être homogène (donc aussi linéaire), car le second membre de (1.3) ne dépend pas de t. Nous acceptons une fois pour toutes la condition à l'origine

$$\mathbf{P}\{\omega: X(0) = 0\} = 1 \, , \tag{1.5}$$

(cf. [6], (3.1)). La fonction-${}_2\psi$ de la fonction aléatoire $\mathbf{X}$ sera alors de la forme

$${}_2\psi_X(t; s) = t \, . \, \overline{\psi}(s) \, , \tag{1.6}$$

$\overline{\psi}(s)$ étant une fonction-ψ d'une loi indéfiniment divisible. Pour résoudre l'équation différentielle stochastique (1.3) il faut et il suffit de déterminer cette fonction $\overline{\psi}(s)$ en partant de la fonction $g(h)$ donnée et de la loi de répartition de la variable aléatoire Y.

2. Equations „sans erreur"

Si l'équation (1.3) doit être vérifié sans erreur, c'est-à-dire s'il est possible d'y remplacer $\delta X(t)$ par $\mathrm{d}X(t)$, alors, en raison de (1.6), on aura pour tout $t \geqq 0$

$$t \, . \, \overline{\psi}(s) = \psi_0[s \, . \, g(t)] \tag{2.1}$$

[1]) Nous employons dès maintenant la terminologie et les symboles adoptés en [6].

où nous désignons par ψ_0 la fonction-ψ de la loi de répartition de la variable aléatoire Y.

Il s'ensuit immédiatement de (2.1) que la fonction g doit être strictement monotone (c'est-à-dire croissante) dans tout l'intervalle R_0, si la solution ne doit pas être triviale, c'est-à-dire telle que

$$\mathbf{P}\{\omega\colon X(t) = 0\} = 1 \tag{2.2}$$

pour tout $t \in R_0$. Cette solution triviale existe toujours, soit plus exactement:

Pour chaque fonction g (satisfaisant aux conditions générales exprimées paragraphe 1) on peut trouver une variable aléatoire Y — et inversement pour chaque variable aléatoire $Y \in \mathfrak{X}^*$ on peut trouver une fonction g (satisfaisant à ces mêmes conditions) d'une telle manière que l'équation (1.3) ait une solution triviale.

Il suffit en effet de prendre soit Y tel que $\mathbf{P}\{\omega\colon Y = 0\} = 1$, soit, dans le second cas, la fonction $g(h) \equiv 0$.

Si l'équation (1.3) doit avoir une solution non-triviale, la fonction g doit être croissante et, comme il est facile de voir, elle doit verifier aussi la condition $\lim\limits_{h\to\infty} g(h) = \infty$. Il existe donc une fonction inverse $f = g^{-1}$, définie dans R_0, croissante et vérifiant $\lim\limits_{h\to\infty} f(h) = \infty$, $\lim\limits_{h\to 0} f(h) = f(0) = 0$. A partir de (2.1) nous obtenons alors pour $s \in R$, $y \in R_0$

$$\psi_0(sy) = f(y) \,.\, \overline{\psi}(s) \,. \tag{2.3}$$

S'il doit y avoir une solution non-triviale, la fonction f, et donc aussi la fonction g, sera nécessairement *continue* dans tout l'intervalle R_0.

En posant dans (2.3) spécialement $y = 1$, nous trouvons

$$\psi_0(s) = f(1) \,.\, \overline{\psi}(s) \tag{2.4}$$

d'où en introduisant la notation $k(y) = \dfrac{f(y)}{f(1)}$ nous obtenons pour la fonction $\overline{\psi}(s)$

$$\overline{\psi}(sy) = \overline{\psi}(s) \,.\, k(y) \,. \tag{2.5}$$

A partir de là il est possible de déduire pour la fonction k l'équation fonctionnelle suivante:

$$k(xy) = k(x) \,.\, k(y) \,, \quad x \in R_0 \,, \quad y \in R_0 \,. \tag{2.6}$$

Il est aisé de voir que dans les conditions citées de continuité et de monotonie de la fonction k, la solution générale de l'équation (2.6) est de la forme

$$k(y) = y^\alpha \,, \quad y \in R_0 \,, \quad 0 < \alpha < \infty \,. \tag{2.7}$$

Il en vient pour notre fonction originale g

$$g(h) = a h^{\frac{1}{\alpha}} \,, \quad a > 0 \,, \quad \alpha > 0 \,, \tag{2.8}$$

ce qui est une condition nécessaire pour l'existence d'une solution non-triviale de l'équation (1.3) („sans erreur").

Reprenons maintenant l'équation (2.5) et posons-y $s = 1$, nous trouvons pour $y \geqq 0$ que

$$\overline{\psi}(y) = \overline{\psi}(1)\, y^{\alpha}\,, \quad \alpha > 0\,, \tag{2.9}$$

tandis que pour $y \leqq 0$ nous obtenons en appliquant la formule bien connue $\psi(-s) = \Re\psi(s) - \Im\psi(s)$,

$$\overline{\psi}(y) = (\Re\overline{\psi}(1) - \Im\overline{\psi}(1))\, |y|^{\alpha}\,. \tag{2.10}$$

Or comme $\overline{\psi}(1)$ est une constante complexe $A + iB$, nous pouvons écrire

$$\overline{\psi}(s) = (A + iB \operatorname{sgn} s)\, |s|^{\alpha} \tag{2.11}$$

pour tout s réel. Il en vient pour la fonction ψ_0 en vertu de (2.4) et (2.8) que

$$\psi_0(s) = a^{-\alpha}\overline{\psi}(s) \tag{2.12}$$

Il est cependant possible de spécifier encore davantage les constantes A, B, α. Soit $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de variables aléatoires indépendantes assujetties toutes à la même loi de répartition correspondant à la fonction-ψ $\overline{\psi}(s)$ et posons

$$V_n = \frac{U_1 + U_2 + \ldots + U_n}{\sqrt[\alpha]{n}}\,. \tag{2.13}$$

En vertu de (2.1), (2.4) et (2.5) la fonction-ψ de V_n (désignée p. ex. par $\psi_n(s)$) est pour tout n naturel égale à

$$\psi_n(s) = n\,.\,\overline{\psi}\left(\frac{s}{\sqrt[\alpha]{n}}\right) = \overline{\psi}(s)\,. \tag{2.14}$$

La loi de répartition des variables aléatoires U_n est donc *stable* (cf. [1], § 32, p. 167 sqq), de sorte qu'il est possible d'exprimer la fonction $\overline{\psi}(s)$ sous la forme canonique (cf. [1], § 33, p. 169 ssq)

$$\overline{\psi}(s) = i\gamma s - c|s|^{\alpha}\,[1 + i\beta \operatorname{sgn} s\,.\,\omega(s, \alpha)] \tag{2.15}$$

où $-\infty < \gamma < \infty$, $-1 \leqq \beta \leqq 1$, $0 < \alpha \leqq 2$, $0 \leqq c < \infty$ et

$$\omega(s, \alpha) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}\alpha \quad \text{pour} \quad \alpha \neq 1\,,$$

$$\omega(s, 1) = \frac{2}{\pi} \lg |s|\,.$$

En comparant (2.15) avec (2.11) nous voyons immédiatement que:

(1) pour $\alpha = 2$ le seul cas possible est celui de $B = 0$, $A = -c$, $\gamma = 0$, de sorte que $\overline{\psi}(s) = -cs^2$, c'est-à-dire

$$\psi_0(s) = -\frac{c}{a^2}s^2\,, \quad c \in R_0\,; \tag{2.16}$$

la variable aléatoire Y doit donc être répartie d'après la loi de Gauss, avec valeur moyenne nulle;

(2) pour $0 < \alpha < 2, \alpha \neq 1$, on doit avoir $\gamma = 0, A = -c, B = -c\beta \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha$, de sorte que

$$\psi_0(s) = -\frac{c}{a^\alpha} |s|^\alpha \left[1 + i\beta \operatorname{sgn} s \,.\, \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha\right]; \tag{2.17}$$

(3) pour $\alpha = 1$ il faut que $\beta = 0, A = -c, B = 0$, de sorte que

$$\psi_0(s) = i \frac{\gamma}{a} s - \frac{c}{a} |s| , \tag{2.18}$$

la variable aléatoire Y est alors répartie d'après la loi de Cauchy.

Supposons maintenant par contre que nous ayons une fonction g de la forme (2.8) avec $a > 0$, $0 < \alpha \leqq 2$, et une fonction-ψ, soit $\psi_0(s)$, de la forme correspondante (2.16) — (2.18), où $-\infty < \gamma < \infty$, $0 \leqq c < \infty$, $-1 \leqq \beta \leqq 1$. Alors la fonction $\bar{\psi}(s)$, *définie* par (2.12), vérifie avec $\psi_0(s)$ et g l'équation (2.1) pour tout $t \geqq 0$. Nous avons donc le

Théorème 1. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (1.3) (*„sans erreur"*) *ait une solution non-triviale est que*

(a) *la fonction g soit de la forme* (2.8) *où* $a > 0$, $0 < \alpha \leqq 2$;

(b) *la variable aléatoire Y soit répartie suivant une loi stable dont la fonction-ψ est $\psi_0(s)$, déterminée par* (2.16) *pour* $\alpha = 2$, (2.17) *pour* $1 \neq \alpha \neq 2$, (2.18) *pour* $\alpha = 1$.

La solution $\mathbf{X}$ *a dans ce cas la fonction-*${}_2\psi$

$$ {}_2\psi_X(t; s) = a^\alpha t \psi_0(s) . \tag{2.19}$$

3. Equations „avec erreur"

Si nous interprétons l'équation (1.3) comme une équation „avec erreur" (cf. [6], (3.4)), nous savons de nouveau que la solution — si elle existe — est une fonction aléatoire linéaire, mais la relation qui existe entre les fonctions $\bar{\psi}(s)$ et $\psi_0(s)$ se réduit ici à

$$\bar{\psi}(s) = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \psi_0[sg(h)] . \tag{3.1}$$

Ici la fonction $\psi_0(s)$ peut déjà ne pas être une fonction-ψ d'une loi indéfiniment divisible, mais en tout cas (voir d'ailleurs [6], § 4) elle doit être définie dans un voisinage du point $s = 0$, ce qui nous suffit pour pouvoir étudier la relation (3.1). Il en est de même dans le cas de la fonction g: c'est son comportement dans un voisinage (à droite) de zéro seul qui nous intéresse. La continuité de g en zéro, c'est-à-dire la relation $\lim_{h \to 0+} g(h) = g(0) = 0$, est évidemment une condition nécessaire pour qu'il y ait une solution non-triviale.

Il découle de (3.1) que pour $h = \frac{1}{n}$ nous avons

$$\overline{\psi}(s) = \lim_{n \to \infty} n \,.\, \psi_0 \left[sg \left(\frac{1}{n} \right) \right] . \tag{3.2}$$

Considérons maintenant de nouveau une suite de variables aléatoires indépendantes $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$, dont la loi de répartition commune est celle correspondant à $\psi_0(s)$. Alors (3.2) implique que la loi des sommes normées

$$V_n = \frac{U_1 + U_2 + \ldots + U_n}{\dfrac{1}{g\left(\dfrac{1}{n}\right)}}, \tag{3.3}$$

dont la fonction-ψ est justement égale à $n\psi_0 \left[sg \left(\frac{1}{n} \right) \right]$, tend vers la loi de répartition correspondant à $\overline{\psi}(s)$. Il s'en ensuit donc en vertu d'un théorème bien connu (voir [1], § 32, p. 168) que la loi correspondant à $\overline{\psi}(s)$ est de nouveau une loi *stable* et que la loi de répartition de la variable aléatoire Y appartient à son *domaine d'attraction*. En plus, nous voyons d'après (3.3) que les constantes A_n, B_n (voir [1], § 32, p. 167) peuvent être choisies comme

$$A_n = 0 \,, \quad B_n = \frac{1}{g\left(\dfrac{1}{n}\right)} \,. \tag{3.4}$$

Convenons d'appeler *singulière* toute loi de répartition dont la fonction-ψ est de la forme $\psi(s) = i\mu s$, $\mu \in R$, et, d'une façon analogue, toute fonction aléatoire (linéaire) dont la fonction-${}_2\psi$ est de la forme

$$\psi(t; s) = t \,.\, i\mu s \,, \quad \mu \in R \,. \tag{3.5}$$

Si $\mu = 0$, nous avons évidemment (2.2).

Théorème 2. *Pour que l'équation* (1.3) (*„avec erreur"*) *ait une solution non-singulière, il faut et il suffit que la loi de répartition de la variable aléatoire Y appartienne au domaine d'attraction d'une loi stable* (*non-singulière*), *avec les constantes normantes* (3.4). *La solution* $\mathbf{X}$ *a la fonction-*${}_2\psi$ (1.6) *où* $\overline{\psi}(s)$ *correspond justement à la loi stable en question.*

Démonstration. Nous avons montré déjà ci-dessus que la condition exprimée dans ce théorème est nécessaire; ce qui nous reste donc à démontrer, c'est qu'elle est aussi suffisante. Supposons donc que la loi de répartition de la variable aléatoire Y, dont la fonction-ψ sera de nouveau désignée par $\psi_0(s)$, appartienne au domaine d'attraction d'une loi stable non-singulière; soit $\overline{\psi}(s)$ la fonction-ψ de cette dernière. Nous avons alors (3.2), et cela uniformément (par rapport à s) dans tout intervalle fini contenu dans R, (cf. [3], p. 199). Soit donc s un nombre réel, arbitraire mais fixe, nous allons démontrer que pour toute suite $\{h_j\}_{j=1}^{\infty}$ telle que $\lim\limits_{j\to\infty} h_j = 0+$ nous avons

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{h_j} \psi_0 [sg(h_j)] = \overline{\psi}(s) . \tag{3.6}$$

Alors nous aurons aussi (3.1), et cela pour tout $s \in R$, or cela est équivalent à l'intégrabilité de l'équation (1.3), (cf. [6]). Nous voyons en même temps que la solution $\boldsymbol{X}$ a alors effectivement la fonction-${}_2\psi$ de la forme en question.

Supposons donc que nous ayons une suite $\{h_j\}$ telle que $h_j \to 0+$ lorsque $j \to \infty$. Ecrivons $n_j = \left[\frac{1}{h_j}\right]$, [2]) nous aurons

$$\frac{1}{n_j + 1} < h_j \leqq \frac{1}{n_j}, \quad \lim_{j\to\infty} n_j = \infty , \tag{3.7}$$

et en même temps

$$\left| n_j - \frac{1}{h_j} \right| \leqq 1 , \quad j = 1, 2, \ldots . \tag{3.8}$$

Ensuite nous savons d'après un lemme cité dans [1], p. 155, que l'on a nécessairement

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g\left(\frac{1}{n}\right)}{g\left(\frac{1}{n+1}\right)} = 1+ . \tag{3.9}$$

Posons maintenant pour notre s fixé

$$s_j = s \frac{g(h_j)}{g\left(\frac{1}{n_j}\right)} . \tag{3.10}$$

La fonction g étant non-décroissante, nous avons toujours

$$g\left(\frac{1}{n_j + 1}\right) \leqq g(h_j) \leqq g\left(\frac{1}{n_j}\right), \tag{3.11}$$

de sorte que, en vertu de (3.10) et (3.9), nous avons

$$s_j \leqq s , \quad \lim_{j\to\infty} s_j = s . \tag{3.12}$$

Soit ε un nombre positif. Comme les deux fonctions ψ_0 et g sont continues en zéro, nous avons pour tout j suffisamment grand

$$|\psi_0[sg(h_j)]| < \frac{\varepsilon}{3} . \tag{3.13}$$

---

[2]) $[x]$ désignant ici la fonction bien connue „entier de x".

En même temps, de (3.12) et de la continuité de la fonction $\overline{\psi}(s)$ en s il découle que pour tout j suffisamment grand nous avons

$$|\overline{\psi}(s_j) - \overline{\psi}(s)| < \frac{\varepsilon}{3} \, . \tag{3.14}$$

En raison de (3.2) et (3.12) on a aussi pour tout j suffisamment grand

$$\left| n_j \psi_0 \left[s_j g \left(\frac{1}{n_j} \right) \right] - \overline{\psi}(s_j) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \, , \tag{3.15}$$

(la limite dans (3.2) étant localement uniforme). Mais alors en combinant (3.8), (3.13), (3.15) et (3.14) nous obtenons pour tout j suffisamment grand

$$\left| \frac{1}{h_j} \psi_0 \left[s g(h_j) \right] - \overline{\psi}(s) \right| \leqq \left| \frac{1}{h_j} - n_j \right| \cdot |\psi_0[s g(h_j)]| +$$
$$+ \left| n_j \psi_0 \left[s_j g \left(\frac{1}{n_j} \right) \right] - \overline{\psi}(s_j) \right| + |\overline{\psi}(s_j) - \overline{\psi}(s)| < \varepsilon \, , \tag{3.16}$$

donc (3.6) a lieu, c. q. f. d.

Si nous admettons aussi les lois stables singulières, le nombre des équations intégrables augmentera d'une façon considérable, car les lois singulières attirent toutes les lois de répartition; tout le problème se réduira alors au problème du choix des constantes A_n et B_n.

Pour les lois stables non-singulières, il y a certains critères (cf. [1], p. ex. p. 186) permettant de résoudre la question de savoir si une loi de répartition donnée appartient à leur domaine d'attraction; il faut toutefois étudier toujours encore les constantes normantes, c'est-à-dire vérifier, si elles peuvent être choisies de manière à satisfaire aux conditions (3.4).

4. Cas spéciaux

Dans ce court paragraphe nous alons considérer sommairement le cas où la variable aléatoire Y a la variance finie $\mathbf{D}^2 Y = \sigma^2 < \infty$. Alors (voir [1], § 34, théorème 6, p. 189 sqq) sa loi de répartition appartient au domaine d'attraction *normale* de la loi de Gauss, ce qui veut dire que l'on a

$$\lim_{n \to \infty} n \psi_0 \left(\frac{s}{\sigma \sqrt{n}} \right) = - \frac{s^2}{2} \, . \tag{4.1}$$

Si maintenant l'équation (1.3) („avec erreur") doit avoir une solution non-singulière, la fonction $g(h)$ doit (voir [1], § 10, théorème 2, p. 49) se comporter dans un voisinage à droite du point zéro comme $\sqrt{h}$. En même temps, il faut que l'on ait encore, en vertu du théorème 6 cité (voir [1], § 34) et du théorème 2 du paragraphe 2 de [1],

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathbf{E} Y \cdot n}{\sqrt{n}} = 0 \, , \tag{4.2}$$

or cela implique $\mathbf{E} Y = 0$.

Si par contre $\mathbf{E}Y \neq 0$, l'équation (1.3) peut encore avoir une solution (*nécessairement singulière*), pourvu que

$$\lim_{h \to 0+} \frac{g(h)}{h} = g'(0+) < \infty \tag{4.3}$$

existe. On a alors

$$\overline{\psi}(s) = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \psi_0[sg(h)] = isg'(0+) \, \mathbf{E}Y \, . \tag{4.4}$$

Il est évident que (4.3) est suffisant pour que l'on ait (4.4) même si $\mathbf{D}^2Y$ n'est pas fini; il suffit en effet que l'on ait $\mathbf{E}Y < \infty$, (cf. [3], p. 170).

LITTÉRATURE

[1] *B. W. Gniedenko, A. N. Kolmogorow:* Rozkłady graniczne sum zmiennych losowych niezależnych, Warszawa 1957.

[2] *P. Lévy:* Processus stochastiques et mouvement brownien; Paris 1948.

[3] *O. Onicescu, G. Mihoc, C. T. Ionescu-Tulcea:* Calculul probabilităţilor şi aplicaţii; Bucureşti 1956.

[4] *F. Zítek:* Náhodné funkce s nezávislými přírůstky a stochastické diferenciální rovnice; (Thèse non-publiée), Praha 1957.

[5] *F. Zítek:* Fonctions aléatoires d'intervalle; Czechoslovak Math. Journal, *8* (*83*) 1958, No 4.

[6] *F. Zítek:* Equations différentielles stochastiques; Czechoslovak Math. Journal, *8* (*83*) 1958, 465—472.

Резюме

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

ФРАНТИШЕК ЗИТЭК (František Zítek), Прага

(Поступило в редакцию 14/VIII 1957 г.)

В этой статье исследуются стохастические дифференциальные уравнения с точки зрения теории, развитой в предыдущей статье [6]. Главными результатами являются следующие две теоремы о разрешимости уравнений вида (1.3), где $g(h)$ — неубывающая вещественная функция, определенная для $h \geqq 0$ и удовлетворяющая (1.4).

Теорема 1. *Если рассматривать уравнение* (1.3) *как уравнение* „*без ошибки*", *то для того, чтобы существовало нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы*

(1) *функция* $g(h)$ *имела вид* (2.8), *где* $a > 0$, $0 < \alpha \leqq 2$;

(2) *случайная величина Y имела стабильный закон распределения с ψ-функцией $\psi_0(s)$, определенной как:* (2.16) *для* $\alpha = 2$, (2.17) *для* $1 \neq \alpha \neq 2$, (2.18) *для* $\alpha = 1$.

Решение $\mathbf{X}$ *имеет тогда* ${}_2\psi$*-функцию* (2.19).

Теорема 2. *Если рассматривать* (1.3) *как уравнение ,,с ошибкой'', то необходимым и достаточным условием существования несингулярного решения является то, чтобы закон распределения случайной величины Y принадлежал области притяжения некоторого несингулярного стабильного закона и чтобы притом нормирующие постоянные* (см. [1], § 32) *удовлетворяли* (3.4). *Решение* $\mathbf{X}$ *имеет тогда* ${}_2\psi$*-функцию* (1.6), *где* $\overline{\psi}(s)$ — ψ*-функция этого стабильного закона.*

(Мы называем здесь *тривиальным* решением решение, удовлетворяющее (2.2), и *сингулярным* решением — решение с ${}_2\psi$-функцией вида (3.5).)

В последнем параграфе рассматривается частный случай, когда Y имеет конечную дисперсию.