Jindřich Nečas

Об областях типа $\mathfrak{N}$

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 12 (1962), No. 2, 274–287

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100515`

Чехословацкий математический журнал, т. 12 (87) 1962, Прага

ОБ ОБЛАСТЯХ ТИПА $\mathfrak{N}$

ИНДРЖИХ НЕЧАС (Jindřich Nečas), Прага

(Поступило в редакцию 28/VI 1960 г.)

Области с границей, представленной функциями, удовлетворяющими условию Липшица — т. е. области типа $\mathfrak{N}$ — имеют важное значение в теории пространств Беппо Леви (Beppo Levi), которая является фундаментальной для решения эллиптических дифференциальных уравнений по вариационному методу. В этой статье приводится доказательство теоремы об аппроксимации такой области при помощи областей с бесконечно-дифференцируемой границей.

1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ И ОКОНЧАТЕЛЬНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ

Пусть E_n — n-мерное пространство. Точку в E_n обозначим через $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ или короче X.

Ограниченная область, расположенная в E_n, является областью типа $\mathfrak{N}$, если существует:

1. m систем координат в E_n и m функций a_r, $r = 1, 2, \ldots, m$ так, что каждая точка границы области Ω представлена по крайней мере в одной из этих систем в виде: $[x_{r1}, x_{r2}, \ldots, x_{rn-1}, a_r(x_{r1}, \ldots, x_{rn-1})]$, короче $[X_r, a_r(X_r)]$. Функции a_r определены в сферической окрестности

$$|X_r| = \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_{ri}^2\right)^{1/2} < \alpha$$

и удовлетворяют там условию Липшица:

$$|a_r(X_r) - a_r(Y_r)| \leqq K|X_r - Y_r| \,;$$

2. число $0 < \beta \leqq 1$ так, что точки $|X_r| < \alpha$, $a_r(X_r) - \beta < x_{rn} < a_r(X_r)$ в Ω и точки $|X_r| < \alpha$, $a_r(X_r) < x_{rn} < a_r(X_r) + \beta$ вне $\overline{\Omega}$.

В третьем разделе приведем доказательство следующей теоремы об аппроксимации:

Теорема. *Пусть Ω типа $\mathfrak{N}$. Пусть $[X_r, x_{rn}]$ или же a_r, $r = 1, 2, \ldots, m$ — системы координат или же функции, упомянутые при определении области типа $\mathfrak{N}$. Пусть $p \geqq 1$.*

Тогда существует совокупность областей Ω_h, $0 < h < h_0$, $h_1 < h_2 \Rightarrow \bar{\Omega}_{h_2} \subset \subset \Omega_{h_1}$ так, что $\lim_{h \to 0} \Omega_h = \Omega$ и границы Ω_h представлены в системах координат $[X_r, x_{rn}]$ функциями $a_r(h)$. Функции $a_r(h)$ бесконечно дифференцируемы в $|X_r| < \alpha$, удовлетворяют там условию Липшица

$$(1.1)\qquad |a_r(h, X_r) - a_r(h, Y_r)| \leqq K|X_r - Y_r| \,,$$

причем постоянная K не зависит от h. Далее,

$$(1.2)\qquad \lim_{h \to 0} \left(\sup_{|Xr| < \alpha} |a_r(h, X_r) - a_r(X_r)| \right) = 0 \,,$$

$$(1.3)\qquad \lim_{h \to 0} \int_{|X_r| < \alpha} \left| \frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}} - \frac{\partial a_r(h)}{\partial x_{ri}} \right|^p \mathrm{d}X_r = 0 \,, \quad r = 1, 2, \ldots, m, \quad i = 1, 2, \ldots, n - 1 \,.$$

(*Первые производные функции $a_r(X_r)$ существуют почти всюду.*)

Мы докажем теорему посредством лемм об аппроксимации функций и лемм о замене систем координат. Важно заметить, что значение лемм об аппроксимации функций выходит за пределы этой статьи, и можно ими с успехом воспользоваться после модификации, пригодной для изучения свойств пространств Беппо Леви.

2. ЛЕММЫ ОБ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ

Через Δ_α обозначаем сферическую окрестность $|X| < \alpha$ в E_n. Множество функций f, суммируемых с p-ой степенью в множестве M, мы будем обозначать через $L_p(M)$. Введем в множестве $L_p(M)$ норму

$$\|f\| = \left[\int_M |f|^p \,\mathrm{d}\Omega \right]^{1/p} .$$

Лемма 2.1. *Пусть Ω — ограниченная область. Пусть $f \in L_p(\Omega)$, где $p \geqq 1$. Пусть h — непрерывная функция вместе со своими первыми производными в Ω, ограниченными здесь постоянной K, и пусть $-1 \leqq h(X) \leqq 1$ для $X \in \Omega$. Пусть $f = 0$ вне Ω.*

Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что $|Z| < \delta \Rightarrow$

$$(2.1)\qquad \left[\int_\Omega |f(X + Zh(X)) - f(X)|^p \,\mathrm{d}X \right]^{1/p} < \varepsilon \,.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Теперь найдется число ν_1, $0 < \nu_1 < \mu(\Omega)$, такое, что

$$\left[\int_M |f(X)|^p \,\mathrm{d}X \right]^{1/p} < \frac{\varepsilon}{6} \quad \text{если} \quad \mu(M) < \nu_1 \,.$$

Здесь $\mu(M)$ означает меру множества M. По теореме Лузина найдется замкнутое множество $F \subset \Omega$ так, что $\mu(F) > \mu(\Omega) - \nu_1/4$ и функция f непрерывна в F. Пусть теперь $\delta_1 > 0$ такое, что

$$|Z| < \delta_1 \Rightarrow H_Z = \mathop{\mathscr{E}}_Y \left(Y = X + Zh(X) \,, \quad X \in F \right) \subset \Omega \,.$$

Теперь найдется $\delta_2 > 0$ так, что

$$|Z| < \delta_2 \Rightarrow \frac{\mu(\Omega) - \nu_1/4}{\mu(F)} < D(X) < 2 \quad \text{для} \quad X \in \Omega\,,$$

и отображение $Y(X) = X + Zh(X)$ — простое. Здесь $D(X)$ — определитель Якоби отображения $Y(X)$.

Отсюда следует, что

$$\mu(H_z) = \int_F D(X)\,\mathrm{d}X > \mu(\Omega) - \frac{\nu_1}{4}\,.$$

Теперь существует $\delta_3 > 0$ так, что

$$|Z| < \delta_3 \Rightarrow |f(X + Zh(X)) - f(X)| < \frac{\varepsilon}{3\mu(\Omega)^{1/p}}\,,$$

если X и $X + Zh(X)$ — элементы F. Пусть $L_Z = FH_Z$. Имеем $L_Z = F - (F - H_Z)$ и поэтому

$$\mu(L_Z) > \mu(F) - \mu(\Omega) + \mu(H_Z) > \mu(\Omega) - \nu_1/2\,.$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ и пусть $|Z| < \delta$. Тогда получаем

$$\text{(2.2)} \quad \left[\int_\Omega |f(X + Zh(X)) - f(X)|^p\,\mathrm{d}X\right]^{1/p} \leqq \left[\int_{L_Z} |f(X + Zh(X)) - f(X)|^p\,\mathrm{d}X\right]^{1/p} + \\ + \left[\int_{\Omega - L_Z} |f(X + Zh(X))|^p\,\mathrm{d}X\right]^{1/p} + \left[\int_{\Omega - L_Z} |f(X)|^p\,\mathrm{d}X\right]^{1/p}.$$

Первое слагаемое в правой части (2.2) $< \varepsilon/3$. Не трудно видеть, что

$$\left[\int_{\Omega - L_Z} |f(X + Zh(X))|^p\,\mathrm{d}X\right]^{1/p} \leqq \left(\frac{\mu(\Omega)}{\mu(\Omega) - \nu_1/2}\right)^{1/p} \left[\int_{Y(\Omega - L_Z)} |f(Y)|^p\,\mathrm{d}Y\right]^{1/p}.$$

Теперь $\mu(Y(\Omega - L_z)) \leqq \mu(\Omega - L_z)\,.\,2 < \nu_1$. Так как

$$\left(\frac{\mu(\Omega)}{\mu(\Omega) - \nu_1/2}\right)^{1/p} \leqq 2\,,$$

то второе слагаемое в правой части (2.2) $< \varepsilon/3$. Но третий интеграл в правой части (2.2) меньше чем $\varepsilon/6$, чем завершается доказательство нашей леммы.

Пусть $f \in L_p(\Delta_\alpha)$. Следует определить среднюю функцию для f с изменяющимся параметром усреднения следующим образом:

$$\text{(2.3)} \qquad f(h, X) = \frac{1}{\kappa h^n(X)} \int_{|X - Y| < h(X)} \exp \frac{|X - Y|^2}{|X - Y|^2 - h^2(X)} f(Y)\,\mathrm{d}Y\,,$$

где

$$X \in \Delta_\alpha\,, \quad h(X) = h \exp \frac{|X|^2}{|X|^2 - \alpha^2}\,,$$

$$\kappa = \int_{|X| < 1} \exp \frac{|X|^2}{|X|^2 - 1}\,\mathrm{d}X\,.$$

Прежде всего, очевидно, существует постоянная H так, что для $h \leqq H\alpha$ множество $\underset{Y}{\mathscr{E}}(|Y - X| < h(X),\ X \in \Delta_\alpha) \subset \Delta_\alpha$. Всегда мы будем рассматривать только такие h. Можно сказать, что остают в силе те свойства средней функции (2.3), которые были доказаны для средних функций, введеных С. Л. Соболевым в [1]. Но кроме упомянутых выше свойств мы докажем еще другие свойства, касающиеся поведения средней функции вблизи границы Δ_α.

Лемма 2.2. *Если $f \in L_p(\Delta_\alpha)$, $p \geqq 1$, то $f(h) \in L_p(\Delta_\alpha)$, $f(h)$ бесконечно дифференцируема в Δ_α и $\lim\limits_{h \to 0} f(h) = f$ в $L_p(\Delta_\alpha)$.*

Доказательство. Мы можем записать интеграл (2.3) в виде

$$f(h, X) = \frac{1}{\kappa h^n(X)} \int_{\Delta_\alpha} \omega(X, Y, h)\, f(Y)\,\mathrm{d}Y, \tag{2.4}$$

полагая

$$\omega(X, Y, h) \begin{cases} \exp \dfrac{|X - Y|^2}{|X - Y|^2 - h^2(X)} & \text{для} \quad |X - Y| < h(X), \\ 0 \quad \text{для} \quad |X - Y| \geqq h(X). \end{cases}$$

Так как функция $\omega(X, Y, h)$ бесконечно непрерывно дифференцируема для $X \in \Delta_\alpha$, $Y \in E_n$, то мы получим второе утверждение леммы 2.2 из хорошо известных теорем о дифференцировании за знаком интеграла.

В результате замены переменной мы получим из (2.3)

$$f(h, X) = \frac{1}{\kappa} \int_{|Z| < 1} \exp \frac{|Z|^2}{|Z|^2 - 1} \left[f(X + Zh(X)\right]\mathrm{d}Z, \tag{2.5}$$

одкуда следует

$$\|f(h) - f\|^p_{L_p(\Delta_\alpha)} = \int_{\Delta_\alpha} \left| \frac{1}{\kappa} \int_{|Z| < 1} \exp \frac{|Z|^2}{|Z|^2 - 1} \left[f(X + Zh(X)) - f(X)\right]\mathrm{d}Z \right|^p \mathrm{d}X \leqq$$

$$\leqq \operatorname{const} \int_{\Delta_\alpha} \mathrm{d}X \int_{|Z| < 1} |f(X + Zh(X)) - f(X)|^p\, \mathrm{d}Z =$$

$$= \operatorname{const} \int_{|Z| < 1} \mathrm{d}Z \int_{\Delta_\alpha} |f(X) + Zh(X)) - f(X)|^p\, \mathrm{d}X\,.$$

Но теперь по лемме 2.1 ко всякому $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta > 0$, что из $h < \delta$ следует

$$\int_{\Delta_\alpha} |f(X + Zh(X)) - f(X)|^p\, \mathrm{d}X < \varepsilon$$

для $Z \in \Delta_1$, чем лемма 2.2 полностью доказана.

Множество функций, непрерывных в $\bar{\Delta}_\alpha$, мы будем обозначать через $C(\Delta_\alpha)$, а норму в этом пространстве определять как обычно

$$\|f\|_{C(\Delta_\alpha)} = \max_{X \in \bar{\Delta}_\alpha} |f(X)| .$$

Мы докажем теперь следуюшую лемму:

Лемма 2.3. *Если* $f \in C(\Delta_\alpha)$, *то* $\lim_{h \to 0} f(h) = f$ *в* $C(\Delta_\alpha)$ *и* $f(h, X) = f(X)$ *для* $|X| = \alpha$.

Доказательство. Начнем с доказательством второй части леммы 2.3. В самом деле, пусть $|X| = \alpha$ и пусть $X_k \in \Delta_\alpha$, $X_k \to X$. Тогда

$$f(h, X_k) - f(X_k) = \tag{2.6}$$

$$= \frac{1}{\kappa h^n(X_k)} \int_{|X_k - Y| < h(X_k)} \exp \frac{|X_k - Y|^2}{|X_k - Y|^2 - h^2(X_k)} [f(Y) - f(X_k)] \, \mathrm{d}Y .$$

Так как $h(X_k) \to 0$, то из равномерной непрерывности в $\bar{\Delta}_\alpha$ и из (2.6) следует, что

$$\lim_{k \to \infty} (f(h, X_k) - f(X_k)) = 0 , \quad \text{откуда} \quad \lim_{k \to \infty} f(h, X_k) = f(X) .$$

Функция $f(h, X)$ лежит в $C(\Delta_\alpha)$. Второе утверждение леммы 2.3 является почти очевидным следствием равномерной непрерывности f в $\bar{\Delta}_\alpha$ и неравенства

$$|f(h, X) - f(X)| \leqq \frac{1}{\kappa h^n(X)} \int_{|X - Y| < h(X)} \exp \frac{|X - Y|^2}{|X - Y|^2 - h^2(X)} |f(Y) - f(X)| \, \mathrm{d}Y .$$

Таким образом лемма 2.3 полностью доказана.

Пусть $f \in C(\Delta_\alpha)$ и пусть она удовлетворяет в $\bar{\Delta}_\alpha$ условию Липшица. Тогда, определим

$$K(f) = \sup_{X, Y \in \bar{\Delta}_\alpha} \frac{|f(X) - f(Y)|}{|X - Y|} .$$

Мы будем в дальнейшем пользоваться тем, что f имеет в Δ_α почти всюду полный дифференциал, и что первые производные этой функции совпадают с первыми обобщенными производными. Доказательства этих утверждений приведены в [2] и в работе [3], стр. 315.

Лемма 2.4. *Если* $f \in C(\Delta_\alpha)$ *и удовлетворяет там условию Липшица, то*

$$\overline{\lim_{h \to 0}}\, K(f(h)) = K(f) , \quad \lim_{h \to 0} \frac{\partial f(h)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{в} \quad L_p(\Delta_\alpha),\ p \geqq 1,\ i = 1, 2, \ldots, n .$$

Доказательство. Лишь для целей доказательства леммы 2.4 вводим обозначение $X_s = [x_1, x_2, \ldots, x_i + s, x_{i+1}, \ldots, x_n]$.

Из (2.5) имеем

$$\frac{f(h, X_s) - f(h, X)}{s} = \frac{1}{\kappa} \int_{|Z| < 1} \exp \frac{|Z|^2}{|Z|^2 - 1} \frac{f(X_s + Zh(X_s)) - f(X + Zh(X))}{s} \, \mathrm{d}Z . \tag{2.7}$$

Имея в виду, что у f полный дифференциал почти всюду в Δ_α получаем для почти всех Z из Δ_1

$$\lim_{s\to 0} \frac{f(X_s + Zh(X_s)) - f(X + Zh(X))}{s} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(X + Zh(X))\, z_j \frac{\partial h}{\partial x_i}(X) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(X + Zh(X)).$$

С другой стороны,

$$\frac{|f(X_s + Zh(X_s)) - f(X + Zh(X))|}{|X_s + Zh(X_s) - X - Zh(X)|} \cdot \frac{|X_s + Zh(X_s) - X - Zh(X)|}{s} \leqq \text{const},$$

и потому можно сделать предельный переход под знаком интеграла в (2.7).

Итак,

$$\frac{\partial f(h, X)}{\partial x_i} = \tag{2.8}$$

$$= \frac{1}{\kappa}\int_{|Z|<1} \exp\frac{|Z|^2}{|Z|^2 - 1}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(X + Zh(X))\, z_j \frac{\partial h}{\partial x_i}(X)\right] dZ +$$

$$+ \frac{1}{\kappa}\int_{|Z|<1} \exp\frac{|Z|^2}{|Z|^2 - 1}\, \frac{\partial f}{\partial x_i}(X + Zh(X))\, dZ.$$

Но $\lim_{h\to 0} \partial h/\partial x_i(X) = 0$ в $C(\Delta_\alpha)$; итак, из (2.8), пользуясь леммой 2.2, получим вторую часть леммы 2.4.

С другой стороны, из (2.8) следует

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \left|\frac{\partial f(h, X)}{\partial x_i}\right| \leqq K(f). \tag{2.9}$$

Оценка (2.9) не зависит от выбора системы координат, из чего следует ее независимость от направления, в котором происходит дифференцирование. Итак, $\overline{\lim_{h\to 0}} K(f(h)) \leqq K(f)$. Но знак $<$ не возможен, потому что, во-первых, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется направление $\vec{v}$ и точка $X \in \Delta_\alpha$ таким образом, что

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(X) + \varepsilon > K(f),$$

и, во-вторых, существует последовательность $h_k \to 0$ для $k \to \infty$, для которой

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(h_k, X) \to \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(X)$$

по смыслу точечной сходимости. Лемма 2.4 полностью доказана.

Теперь положим

$$\tilde{f}(h, X) = f(h, X) - [nK(f) + 1]\, h(X). \tag{2.10}$$

Тогда имеет место следующая

Лемма 2.5. *Если f удовлетворяет условию Липшица, то $\tilde{f}(h)$ имеет те же свойства, что и функция f, приведенные в лемме* 2.4, *и кроме того*

$$\tilde{f}(h, X) < f(X) \quad \text{и} \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial h}(h, X) < 0 \quad \text{для} \quad X \in \Delta_\alpha .$$

В самом деле,

$$f(X) - \tilde{f}(h, X) = \frac{1}{\kappa h^n(X)} \int_{|X-Y|<h(X)} \exp \frac{|X - Y|^2}{|X - Y|^2 - h^2(X)} \,.$$
$$. \left[f(X) - f(Y) + nK(f)\, h(X) + h(X)\right] \mathrm{d}Y > 0 \,,$$

так как $f(X) - f(Y) + nK(f)\, h(X) + h(X) > 0$ для $X \in \Delta_\alpha$.

Для доказательства последнего утверждения леммы 2.5 можно поступить так как же при доказательстве леммы 2.4. Таким образом получим

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial h}(h, X) = \frac{1}{\kappa} \int_{|Z|<1} \exp \frac{|Z|^2}{|Z|^2 - 1} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(X + Zh(X))\, z_j \,.\, a(x) - \right.$$
$$\left. - nK(f)\, a(X) - a(X)\right] \mathrm{d}Z \leqq - a(X) < 0 \,. \quad \text{Здесь} \quad a(X) = \exp \frac{|X|^2}{|X|^2 - \alpha^2} \,.$$

Этим лемма 2.5 доказана.

Пусть $\alpha_1 > \alpha$ и функция f непрерывна в Δ_{α_1}; мы определим $f(h, X)$ в Δ_{α_1} следующим образом:

$$(2.10) \quad f(h, X) \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{1}{\kappa h^n(X)} \displaystyle\int_{|X-Y|<h(X)} \exp \frac{|X - Y|^2}{|X - Y|^2 - h^2(X)} f(Y)\, \mathrm{d}Y \quad \text{для} \quad X \in \Delta_\alpha \,, \\ f(X) \quad \text{для} \quad X \in \Delta_{\alpha_1} - \Delta_\alpha \,. \end{array} \right.$$

Из леммы 2.3 вытекает, что $f(h, X)$ непрерывна в Δ_{α_1}.

Что касается поведения производных, на этот вопрос дает частичный ответ лемма 2.6.

Лемма 2.6. *Пусть $f \in C(\Delta_{\alpha_1})$ (это предположение не существенно) и пусть f бесконечно непрерывно дифференцируема в некотором открытом множестве G, расположенном целиком в Δ_{α_1}. Тогда $f(h)$, определенная в* (2.10), *имеет то же свойство.*

Доказательство. Обозначим

$$\Gamma_\alpha = \underset{X}{\mathscr{E}} \left(|X| = \alpha\right) \quad \left(\alpha < \alpha_1\right).$$

Если бы $\Gamma_\alpha \,.\, G = 0$, то нечего доказывать.

Пусть $\Gamma_\alpha G \neq 0$. Если i — целое, неотрицательное число и $i_1, i_2, \ldots, i_n$ —

целые неотрицательные числа, сумма которых равна i, и $X_0 \in \Gamma_\alpha G$, то для доказательства нашей леммы достаточно доказать, что

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\partial^i f(h, X_k)}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} = \frac{\partial^i f(X_0)}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}$$

при условии, что $X_k \in \Delta_\alpha$ и $\lim\limits_{k \to \infty} X_k = X_0$.

В самом деле, исследуя формулу (2.5), мы получаем, начиная с k, достаточно большим

$$(2.11) \qquad \frac{\partial^i f(h, X_k)}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} = \frac{1}{\kappa} \int_{|Z|<1} \exp \frac{|Z|^2}{|Z|^2 - 1} \frac{\partial^i f(X_k + Zh(X_k))}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} \, dZ + $$
$$+ \frac{1}{\kappa} \int_{|Z|<1} \exp \frac{|Z|^2}{|Z|^2 - 1} g_{i_1 \ldots i_n}(X_k, Z) \, dZ ,$$

причем $\lim\limits_{k \to \infty} g_{i_1 \ldots i_n}(X_k, Z) = 0$ равномерно для $Z \in \Delta_1$.

Повторяя теперь первую часть доказательства леммы 2.3, мы получим таким образом наше утверждение, а, следовательно, и доказательство леммы 2.6.

3. ЛЕММЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Леммы этого раздела тесно примыкаются к доказательству основной теоремы, и поэтому мы будем пользоваться в этом разделе обозначением, принятым для этого доказательства. U_r обозначает область, состоящую из точек

$$\mathop{\mathscr{E}}_{X} \left(|X_r| < \alpha, a_r(X_r) - \beta < x_{rn} < a_r(X_r) + \beta \right).$$

Через $\dot{\Omega}$ мы обозначаем границу области Ω типа $\mathfrak{N}$. Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_p$ — соствляющие $\dot{\Omega}$. Очевидно, что $\dot{\Omega} \subset \sum\limits_{r=1}^{m} U_r$. Мы будем предполагать, что из $U_{r_1}\Gamma_{s_1} \neq 0$, $U_{r_2}\Gamma_{s_2} \neq 0$, $s_1 \neq s_2$ следует $U_{r_1}U_{r_2} = 0$, не нарушая применения в общих случаях. Мы предполагаем еще, что каждая из окрестностей U_r необходима для покрытия Ω.

Очевидно, что существуют убывающие последовательности $\alpha = \alpha_0 > \alpha_1 > > \alpha_2, \ldots, \beta = \beta_0 > \beta_1 > \beta_2 > \ldots$ таким образом, что области

$$U_r^k = \mathop{\mathscr{E}}_{X} \left(|X_r| < \alpha_k , \quad a_r(X_r) - \beta_k < x_{rn} < a_r(X_r) + \beta_k \right.$$

имеют те же свойства, что и U_r.

Пусть теперь для $r = 1, 2, \ldots, m$

$$(3.1) \qquad a_r(h, X_r) =$$

$$= \frac{1}{\kappa h^{n-1}(X_r)} \int_{|X_r - Y_r| < h(X_r)} \exp \frac{|X_r - Y_r|^2}{|X_r - Y_r|^2 - h^2(X_r)} a_r(Y_r) \, \mathrm{d} Y_r - [nK(a_r) + 1] \, h(X_r)$$

для $X_r \in \Delta_{\alpha_1}$, где

$$h(X_r) = h \exp \frac{|X_r|^2}{|X_r|^2 - \alpha_1^2}.$$

По лемме 2.5 можно найти $h_1 \leqq \alpha - \alpha_1$ так, что

$$0 < h \leqq h_1 \Rightarrow a_r(X_r) - \beta_1 < a_r(h, X_r) < a_r(X_r).$$

Пусть теперь $r = 1$. Можно предполагать, что $U_1^1 U_1^2 \dot{\Omega} = \Gamma^1 \neq \emptyset$. Обозначим через $\Lambda(X)$ прямую, проходящую через точку X на Γ^1 и параллельную оси x_{2n}, и через

$$\Gamma_h = \mathop{\mathscr{E}}_X \left(X = [X_1, a_1(h, X_1)] , \quad |X_1| < \alpha_1 \right).$$

Покажем следующую лемму:

Лемма 3.1. *Имеется такое $0 < l \leqq h_1$, что для $0 < h \leqq l$ пересечение $\Gamma_h \Lambda(X)$ состоит лишь из одной точки.*

Доказательство. Обозначая через $\Gamma = U_1 U_2 \dot{\Omega}$, под G будем понимать проекцию множества Γ на плоскость $x_{1n} = 0$ и под G_h или G_0 проекцию множества $\Gamma_h U_1^1 U_2^1$ или $\Gamma_0 U_1^1 U_2^1$ на ту же плоскость. Из непрерывности функции a_r и леммы 2.3 следует, что существует $0 < h_2 \leqq h_1$ так, что $h \leqq h_2 \Rightarrow \overline{G}_h \subset G$ и расстояние $\overline{G}_h$ до границы множества G больше чем $c > 0$.

Для доказательства леммы 3.1 мы можем предполагать, что первая система координат связана со второй соотношениями

$$(3.2) \qquad x_{1i} = x_{2i} + \lambda_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-2, \quad x_{1n-1} = x_{2n-1} \cos \varphi - x_{2n} \sin \varphi + \\ + \lambda_{n-1}, \quad x_{1n} = x_{2n-1} \sin \varphi + x_{2n} \cos \varphi + \lambda_n,$$

где $-\pi < \varphi < \pi$.

Если $\varphi = 0$, то нечего доказывать. Итак, пусть $\varphi \neq 0$. Так как граница $\dot{\Omega}$ в первой и второй системе координат представлена в виде функции, удовлетворяющей условию Липшица, то имеем:

$$(3.3) \qquad 0 < \varphi < \pi \Rightarrow \inf_{X_1 \in G} \frac{\partial a_1}{\partial x_{1n-1}} (X_1) + \operatorname{cotg} \varphi > d > 0,$$

$$-\pi < \varphi < 0 \Rightarrow \sup_{X_1 \in G} \frac{\partial a_1}{\partial x_{1n-1}} (X_1) + \operatorname{cotg} \varphi < -d < 0.$$

Если $h \leqq h_3 \leqq h_2$, где h_3 достаточно мало (нужно иметь $h_3 \leqq c$), то из (2.8) следует, что для

$$0 < \varphi < \pi \Rightarrow \frac{\partial a_1(h, X_1)}{\partial x_{1n-1}} + \operatorname{cotg} \varphi > d\,, \tag{3.4}$$

$$-\pi < \varphi < 0 \Rightarrow \frac{\partial a_1(h, X_1)}{\partial x_{1n-1}} + \operatorname{cotg} \varphi < -d \quad \text{для} \quad X_1 \in G_h\,.$$

Рассмотрим ближе случай $0 < \varphi < \pi$. Итак, пусть

$$X = [X_2, x_{2n}] \in \Gamma_h U_2^1\,.$$

Из уравнения (3.5) имеем

$$a_1(h, x_{21} + \lambda_1, \ldots, x_{2n-2} + \lambda_{n-2}\,,$$
$$x_{2n-1} \cos \varphi - x_{2n} \sin \varphi + \lambda_{n-1}) - x_{2n-1} \sin \varphi - x_{2n} \cos \varphi - \lambda_n = 0\,.$$

Имея в виду теорему о неявных функциях и неравенство (3.4), можно выразить x_{2n} как функцию X_2, $x_{2n} = b(h, X_2)$. Обозначив теперь через K область определения этой функции, мы сразу видим, что $b(h)$ в K бесконечно непрерывно дифференцируема. Но из этого следует, что можно найти $0 < h_4 \leqq h_3$ таким образом, что для $h \leqq h_4$ множество K не зависит от h и, точнее говоря, оно является проекцией Γ^1 на плоскость $x_{2n} = 0$. Полагая $h_4 = l$, мы завершаем доказательство леммы 3.1. Сейчас же видно, что из доказательства леммы 3.1 вытекают и другие следствия.

Почти очевидна

Лемма 3.2. *Если* $X = [X_2, x_{2n}]$, $X_2 \in \Delta_{\alpha_1}$ *и* $X \notin \Gamma^1$, *то* $\Lambda(X)\, \Gamma_h = 0$. *Далее,*

$$\lim_{h \to 0} (\sup_{X_2 \in K} |b(h, X_2) - a_2(X_2)|) = 0\,.$$

Весьма важное значение имеет следующая

Лемма 3.3. *Функция* $b(h, X_2)$ *в* K *бесконечно непрерывно дифференцируема, первые производные ее ограничены постоянной, независящей от* $h \leqq l$, *так что она удовлетворяет в* K *условию Липшица и, кроме того,*

$$\lim_{h \to 0} \int_K \left| \frac{\partial b(h, X_2)}{\partial x_{2i}} - \frac{\partial a_2(X_2)}{\partial x_{2i}} \right|^p \mathrm{d}X_2 = 0\,, \quad p \geqq 1 \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,.$$

Доказательство. Так как в правильности первого утверждения леммы 3.3 мы уже убедились, то теперь приступим к доказательству второго.

В самом деле,

$$\frac{\partial b(h, X_2)}{\partial x_{2i}} = \frac{[\partial a_1(h\, x_{21} + \lambda_1, \ldots)/\partial x_{1i}]}{[\partial a_1(h, x_{21} + \lambda_1, \ldots)/\partial x_{1n-1}] \sin \varphi + \cos \varphi} \tag{3.6}$$

для $i = 1, 2, \ldots, n-2$ и

$$\frac{\partial b(h, X_2)}{\partial x_{2n-1}} = \frac{[\partial a_1(h, x_{21} + \lambda_1, \ldots)/\partial x_{1n-1}] \cos \varphi - \sin \varphi}{[\partial a_1(h, x_{21} + \lambda_1, \ldots/\partial x_{1n-1}] \sin \varphi + \cos \varphi}\,.$$

Теперь из леммы 2.4 и неравенства (3.4) следует второе утверждение.

Посредством функции $a_1(h, X_1)$ мы определим теперь отображение множества G_h в K следующим образом:

$$(3.7) \qquad x_{2i} = x_{1i} - \lambda_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-2\,,$$
$$x_{2n-1} = x_{1n-1}\cos\varphi + a_1(h, X_1)\sin\varphi - \lambda_{n-1}\cos\varphi - \lambda_n\sin\varphi$$

и обозначим его через Z_h. Это отображение непрерывно и взаимно однозначно, первые производные этого отображения непрерывны и его определитель Якоби

$$D_h(X_1) = \sin\varphi\left[\frac{\partial a_1(h, X_1)}{\partial x_{1n-1}} + \operatorname{cotg}\varphi\right] \neq 0\,.$$

Посредством функции $a_1(X_1)$ мы определим отображение множества G_0 на K при помощи (3.7), если заменим $a_1(h, X_1)$ через $a_1(X_1)$. Обозначим это отображение через Z. Это обторажение непрерывно и взаимно однозначно и обладает важным свойством

$$(3.8) \qquad |Z(X_1) - Z(Y_1)| \leqq C|X_1 - Y_1|\,.$$

Также и отображение Z^{-1} непрерывно и обладает свойством

$$(3.9) \qquad |Z^{-1}(X_2) - Z^{-1}(Y_2)| \leqq C|X_2 - Y_2|\,.$$

Из (3.8), (3.9) следует: если $m \subset G_0$ и $\mu(m) = 0$, то и $\mu(Z(M)) = 0$, и наоборот.

Итак, имеем для почти всех X_2 из K (полный дифференциал от $a_1(X_1)$ существует почти всюду в G_0)

$$(3.10) \quad \frac{\partial a_2(X_2)}{\partial x_{2i}} = \frac{\partial a_1(Z^{-1}(X_1))/\partial x_{1i}}{[\partial a_1(Z^{-1}(X_1))/\partial x_{1n-1}]\sin\varphi + \cos\varphi}\,, \quad i = 1, 2, \ldots n-2\,,$$
$$\frac{\partial a_2(X_2)}{\partial x_{2n-1}} = \frac{[\partial a_1(Z^{-1}(X_1))/\partial x_{1n-1}]\cos\varphi - \sin\varphi}{[\partial a_1(Z^{-1}(X_1))/\partial x_{1n-1}]\sin\varphi + \cos\varphi}\,.$$

Из (3.6) и (3.10) следует, что для доказательства третьего утверждения леммы 3.3 достаточно показать, что

$$\lim_{h\to 0}\left[\int_K\left|\frac{\partial a_1}{\partial x_{1i}}(h, Z_h^{-1}(X_2)) - \frac{\partial a_1}{\partial x_{1i}}(Z^{-1}(X_2))\right|^p \mathrm{d}X_2\right]^{1/p} = 0$$

для $i = 1, 2, \ldots, h-1$. Имеем

$$\left\|\frac{\partial a_1(h, Z_h^{-1})}{\partial x_{1i}} - \frac{\partial a_1(Z^{-1})}{\partial x_{1i}}\right\|_{L_p(K)} \leqq$$
$$\leqq \left\|\frac{\partial a_1(h, Z_h^{-1})}{\partial x_{1i}} - \frac{\partial a_1(Z_h^{-1})}{\partial x_{1i}}\right\|_{L_p(K)} + \left\|\frac{\partial a_1}{\partial x_{1i}}(Z_h^{-1}) - \frac{\partial a_1}{\partial x_{1i}}(Z^{-1})\right\|_{L_p(K)}\,.$$

Что касается первого слагаемого в правой части то оно стремится к нулю, вследствие возможности применения теоремы о замене переменных.

Теперь существует последовательность функций f_l, непрерывных в $\bar{\Delta}_\alpha$, равномерно ограниченных постоянной C и таких ,что

$$\lim_{l\to\infty}\left\|f_l - \frac{\partial a_1}{\partial x_{1i}}\right\|_{L_p(\Delta_{\alpha 1})} = 0\,, \quad \lim_{l\to\infty} f_l(X_1) = \frac{\partial a_1(X_1)}{\partial x_{1i}}$$

почти всюду в Δ_{α_1}. Пусть $\varepsilon > 0$. Имеем

$$\left[\iint_K \left|\frac{\partial a_1}{\partial x_{1i}}(Z_h^{-1}(X_2)) - \frac{\partial a_1}{\partial x_{1i}}(Z^{-1}(X_2))\right| \mathrm{d}X_2\right]^{1/p} \leqq \tag{3.11}$$
$$\leqq \left[\iint_K \left|\frac{\partial a_1}{\partial x_{1i}}(Z_h^{-1}(X_2)) - f_l(Z_h^{-1}(X_2))\right|^p \mathrm{d}X_2\right]^{1/p} +$$
$$+ \left[\iint_K |f_l(Z_h^{-1}(X_2)) - f_l(Z^{-1}(X_2))|^p\, \mathrm{d}X_2\right]^{1/p} +$$
$$+ \left[\iint_K \left|f_l(Z^{-1}(X_2)) - \frac{\partial a_1}{\partial x_{1i}}(Z^{-1}(X_2))\right|^p \mathrm{d}X_2\right]^{1/p}.$$

Ввиду того, что якобиян D_h ограничен и независим от h, можно найти такое l_0, что

$$l \geqq l_0 \Rightarrow \left[\iint_K \left|\frac{\partial a_1}{\partial x_{1i}}(Z_h^{-1}(X_2)) - f_l(Z_h^{-1}(X_2))\right|^p \mathrm{d}X_2\right]^{1/p} < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Что касается третьего интеграла в правой части (3.11), то он стремится к нулю ввиду того, что

$$f_l(Z^{-1}(X_2)) \to \frac{\partial a_1}{\partial x_{1i}}(Z^{-1}(X_2))$$

почти всюду в K и ввиду того, что существует суммируемая мажоранта. Итак, можно считать l_0 столь большим, что

$$\left[\iint_K \left|f_l(Z^{-1}(X_2)) - \frac{\partial a_1}{\partial x_{1i}}(Z^{-1}(X_2))\right|^p \mathrm{d}X_2\right]^{1/p} < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Но из леммы 3.2 следует, что $\lim\limits_{h\to 0} Z_h^{-1} = Z^{-1}$ равномерно относительно X_2 из K. Так как f — непрерывная функция, то существует h_0 таким образом, что для $h \leqq h_0$ имеем

$$\left[\iint_K |f_{l_0}(Z_h^{-1}(X_p)) - f_{l_0}(Z^{-1}(X_2))|^p\, \mathrm{d}X_2\right]^{1/p} < \frac{\varepsilon}{3}\,,$$

в результате чего лемма 3.3 полностью доказана.

Обозначим

$$M_h^1 = \mathop{\mathscr{E}}_X\big(X = [X_1, x_{1n}]\,, \quad X_1 \in \Delta_{\alpha_1}, \quad a_1(h, X_1) \leqq x_{1n} < a_1(X_1)\big)$$

и положим $\Omega_h^1 = \Omega - M_h^1$. Тогда из леммы 3.1—3.3 вытекает следующая

Лемма 3.4. *Можно найти* $0 < h_0$ *таким образом, что для* $h \leqq h_0$ Ω_h^1 *будут области, расположенные в* Ω *и удовлетворять следующим условиям*:

$$\Omega_h^1 \subset \Omega\,, \quad \lim_{h\to 0} \Omega_h^1 = \Omega\,,$$

границы областей Ω_h^1 *можно представить в системах координат* $[X_r, x_{rn}]$ *в виде функций* $a_r^1(h, X_r)$ *удовлетворяющих в* $|X_r| < \alpha_1$ *условию Липшица, причем* $K(a_r^1(h)) \leqq \mathrm{const}$. *Далее,*

$$\lim_{h\to 0} \Big(\sup_{X_r \in \Delta_{\alpha_1}} |a_r^1(h, X_r) - a_r^1(X_r)| \Big) = 0\,,$$

$$\lim_{h\to 0} \int_{\Delta_{\alpha_1}} \left| \frac{\partial a_r^1(h, X_r)}{\partial x_{ri}} - \frac{\partial a_r^1(X_r)}{\partial x_{ri}} \right|^p \mathrm{d}X_r = 0\,, \quad r = 1, 2, \ldots, m, \ i = 1, 2, \ldots, n-1\,.$$

При этом $a_1^1(h, X_1)$ — *бесконечно непрерывно дифференцируемые функции.*

Во избежание излишнего усложнения этого доказательства мы не будем останавливаться на некоторых деталях, которые можно рассмотреть при помощи рассуждений, сделанных в предыдущих леммах; для ориентировки мы укажем надлежащую лемму.

В самом деле, первой стадией построения совокупности Ω_h является лемма 3.4. Возмем теперь α_2, β_2, построим области U_r^2, $r = 1, 2, \ldots, m$ и заменим функции $a_r^1(h, X_r)$ функциями $a_r^2(h, X_r)$. (h в первой и второй стадии то же самое). Это значит, что исходной областью теперь будет Ω_h^2, причем граница изменяется в области U_2^2. Таким образом получим область Ω_h^2, для которой 3.4 остается в силе при замене Ω_h^1 посредством Ω_h^2, α_1 посредством α_2. (Если нужно, уменьшаем h_0.) Третья стадия: Исходной областью является Ω_h^2, граница изменяется в U_3^3, и получаем Ω_h^3 и. т. д. Таким образом получаем для $h \leqq h_0$ область Ω_h так, что

$$\overline{\Omega}_h \subset \Omega\,, \quad h_1 < h_2 \Rightarrow \overline{\Omega}_{h_2} \subset \Omega_{h_1}$$

и что границы Ω_h представлены в виде функций $a_r(h, X_r)$ в $|X_r| < \alpha_m$ и удовлетворяют там условию Липшица

$$|a_r(h, X_r) - a_r(h, Y_r)| \leqq K|X_r - Y_r|\,,$$

где K — постоянная и

$$\lim_{h\to 0} \Big(\sup_{X_r \in |X_r| < \alpha_m} |a_r(h, X_r) - a_r(X_r)| \Big) = 0\,,$$

$$\lim_{h\to 0} \int_{\Delta_{\alpha_m}} \left| \frac{\partial a_r(h, X_r)}{\partial x_{ri}} - \frac{\partial a_r(X_r)}{\partial x_{ri}} \right|^p \mathrm{d}X_r = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \ r = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Надо еще доказать, что $a_r(h, X_r)$ в Δ_{α_m} бесконечно непрерывно дифференцируемы. Рассмотрим функцию $a_r(h, X_r)$. Из построения вытекает, что бесконечно непрерывно дифференцируемая функция — $a_r^r(h, X_r)$. Но в дальнейших стадиях это свойство не может быть потеряно. В самом деле, пусть $X_r^0 \in \Delta_{\alpha_m}$.

Пусть $s > r$ — первый индекс такой, что $U_s^s \, . \, U_r^m \neq \emptyset$. Если точка

$$X_r^0 = [X, a_r^r(h, X^0)] \quad \text{лежит в} \quad U_r^m U_s^m \, ,$$

то она может быть представлена в виде

$$X = [X_s^0, a_s^{s-1}(h, X_s^0)] \, .$$

В s-той стадии функция $a_s^{s-1}(h, X_s)$ изменяется и приобретает вид $a_s^s(h, X_s)$, которая бесконечно непрерывно дифференцируема — и по лемме 3.3 функция $a_r^s(h, X_r)$ бесконечно непрерывно дифференцируема в окрестности точки X_r^0.

Но может теперь случиться, что точка $[X_r^0, a_r^r(h, X_r^0)]$ будет на границе U_s^s, т. е. на границе цилиндра $|X_s| < \alpha_s$. Но опять по лемме 3.3 $a_s^{s-1}(h, X_s)$ бесконечно непрерывно дифференцируема в окрестности точки X_s^0.

Но из леммы 2.6 следует, что функция $a_s^s(h, X_s)$ также бесконечно непрерывно дифференцируема в этой окрестности в случае, если ее определить посредством $a_s^{s-1}(h, X_s)$ для $X_s \notin \Delta_{\alpha_s}$. (Таким образом была определена граница области Ω_h^s.) Но опять по лемме 3.3 функция $a_r^s(h, X_r)$ бесконечно непрерывно дифференцируема в окрестности точки X_r^0. Итак, доказательство основной теоремы завершено.

Литература

[1] *С. Л. Соболев:* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинград 1950.

[2] *H. Rademacher:* Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrer Variabeln. Mathematische Annalen, *79* Band, 1919, 340—359.

[3] *J. Deny, J. L. Lions:* Les espaces du type de Beppo Levi. Annales de l'Institut Fourier, tome *5*, 1953—54, 305—370.

Résumé

SUR LES DOMAINES DU TYPE $\mathfrak{N}$

Jindřich Nečas, Praha

Les domaines dont la frontière est représentable par les fonctions satisfaisants à la condition de Lipschitz semblent avoir une grande importance dans la théorie des espaces de Beppo Levi. On montre dans cet article un théorème sur l'approximation d'un tel domaine par les domaines aux frontières indéfiniment différentiables. Ce théorème est énoncé dans la première partie de l'article.