Alois Švec

Sur la différentiabilité du repère de Winternitz d'une courbe

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 12 (1962), No. 3, 356–365

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100523`

Чехословацкий математический журнал, т. 12 (87) 1962, Прага

SUR LA DIFFÉRENTIABILITÉ DU REPÈRE DE WINTERNITZ D'UNE COURBE

ALOIS ŠVEC, Praha

(Reçu le 15 juillet 1960)

Dans cet article l'auteur étudie la dépendance qui existe entre les classes différentielles des éléménts particuliers du repère canonique d'une courbe plongée dans un espace affin unimodulaire à trois dimensions, et les classes différentielles des courbures. Des questions analogues, concernant le cas d'une courbe plongée dans un espace euclidien, ont été traitées par E. ČECH; voir [1] – [5].

1. Dans un espace affin unimodulaire A_3 à trois dimensions considérons une courbe engendrée par un point $X(t)$. Je dirai que la courbe est régulière (et que le paramètre t est régulier) si cl $X \geqq 1$ et qu'il existe un système de vecteurs $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$ et un système de fonctions $K_0(t)$, $K_1(t)$, $K_2(t)$ tels que

$$(e_1 e_2 e_3) = 1\,, \tag{1.1}$$

$$\min\left(\operatorname{cl} e_1, \operatorname{cl} e_2, \operatorname{cl} e_3\right) \geqq 1\,, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{cl} K_0 \geqq 0\,, \quad \operatorname{cl} K_1 \geqq 0\,, \quad \operatorname{cl} K_2 \geqq 0\,, \tag{1.3}$$

$$K_0(t)\, K_1(t)\, K_2(t) \neq 0 \tag{1.4}$$

et que les équations

$$X' = K_0 e_1\,, \tag{1.5}$$

$$e_1' = K_0 e_2\,, \tag{1.6}$$

$$e_2' = K_1 e_1 + K_0 e_3\,, \tag{1.7}$$

$$e_2' = K_2 e_1 + 3K_1 e_2\,, \tag{1.8}$$

soient vérifiées. Dans le cas où le paramètre est l'arc affin $s = \int K_0 \,\mathrm{d}t$, j'obtiens à partir de (1·5)–(1·8)

$$X^{\cdot} = e_1\,, \quad \dot{e}_1 = e_2\,, \quad \dot{e}_2 = k_1 e_1 + e_3\,, \quad \dot{e}_3 = k_2 e_1 + 3k_1 e_2\,, \tag{1.9}$$

de sorte que le repère $\{X; e_1, e_2, e_3\}$ soit le repère de Winternitz associé au point X de la courbe, considérée; voir [6]. Dans ce qui suit, je désignerai par la dérivée par rapport au paramètre général et par celle par rapport à l'arc affin.

Je vais commencer par m'occuper du problème suivant: Etant donné trois nombres cl K_0, cl K_1, cl K_2, que peut-on dire des nombres cl X, cl e_1, cl e_2, cl e_3?

Soit

$$r = \min(\mathrm{cl}\, K_0, \mathrm{cl}\, K_1, \mathrm{cl}\, K_2)\,, \tag{1.10}$$

alors

$$\mathrm{cl}\, e_1 \geqq r+1\,, \quad \mathrm{cl}\, e_2 \geqq r+1\,, \quad \mathrm{cl}\, e_3 \geqq r+1\,, \quad \mathrm{cl}\, X \geqq r+1\,. \tag{1.11}$$

Soit en effet cl $e_2 = s \leqq r$, il résulte alors de (1.6) que l'on a cl $e_1' \geqq \min(\mathrm{cl}\, K_0, \mathrm{cl}\, e_2) \geqq s$, c'est-à-dire que cl $e_1 \geqq s + 1$. De (1.8) il découle

$$\mathrm{cl}\, e_3' \geqq \min(\mathrm{cl}\, K_1, \mathrm{cl}\, K_2, \mathrm{cl}\, e_1, \mathrm{cl}\, e_2) \geqq s\,,$$

c'est-à-dire que cl $e_3 \geqq s + 1$. Ensuite, il s'ensuit de (1.7) que l'on a

$$\mathrm{cl}\, e_2' \geqq \min(\mathrm{cl}\, K_0, \mathrm{cl}\, K_1, \mathrm{cl}\, e_1, \mathrm{cl}\, e_3) \geqq \min(r, s+1)\,,$$

donc $s - 1 \geqq \min(r, s + 1)$ ce qui est une contradiction. On a donc cl $e_2 \geqq r + 1$; il découle de (1.6) que l'on a cl $e_1 \geqq r + 1$; à l'aide de (1.5) et (1.8) j'obtiens alors déjà (1.11).

Dans la suite, je distinguerai des cas particuliers différents, suivant les relations existant entre les nombres cl K_i.

2. Supposons que nous ayons

$$\mathrm{cl}\, K_0 = \mathrm{cl}\, K_1 = \mathrm{cl}\, K_2 = r\,. \tag{2.1}$$

Dans toutes les considérations qui vont suivre, un rôle essentiel sera joué par la proposition suivante que le Lecteur démontrera facilement lui-même: Soit $a(t)$ une fonction et $v(t)$ une fonction vectorielle, soit cl $a \neq$ cl v, alors cl $av = \min(\mathrm{cl}\, a, \mathrm{cl}\, v)$. Dans le cas où cl a = cl v, nous avons seulement cl $av \geqq$ cl a. A l'aide de cette remarque et de (2·1) et (1·11) nous obtenons de (1·5) et (1·6) l'égalité cl X = cl e_1 = $= r + 1$. Ensuite, on a

$$(e_2'e_2e_3) = K_1\,, \quad (e_1e_3'e_3) = 3K_1\,. \tag{2.2}$$

Dans le cas de cl $e_2' \geqq r + 1$, ou bien de cl $e_3' \geqq r + 1$, nous aurions cl $K_1 \geqq r + 1$; il en résulte que cl e_2 = cl $e_3 = r + 1$.

3. Faisons l'hypothèse que

$$\mathrm{cl}\, K_0 \geqq r+1\,, \quad \mathrm{cl}\, K_1 = r\,, \quad \mathrm{cl}\, K_2 \geqq r\,. \tag{3.1}$$

A l'aide des équations (2.2) il est possible d'en tirer de nouveau la conclusion cl e_2 = cl $e_3 = r + 1$.

A. Considérons d'abord le cas où

$$\mathrm{cl}\, K_0 \geqq r+3\,, \quad \mathrm{cl}\, K_1 = r\,, \quad \mathrm{cl}\, K_2 \geqq r\,. \tag{3.2}$$

Alors il découle de (1.6) que cl $e_1' = \min(\mathrm{cl}\, K_0, \mathrm{cl}\, e_2) = r + 1$, donc aussi cl e_1 = $= r + 2$, et, d'une façon analogue, de (1.5) il découle que cl $X = r + 3$.

B. Voici un autre cas possible:

$$\text{cl}\, K_0 = r + 1\,, \quad \text{cl}\, K_1 = r\,, \quad \text{cl}\, K_2 \geqq r\,. \tag{3.3}$$

Il résulte de (1.6) que cl $e_1 \geqq r + 2$, d'où en vertu de (1.5) cl $X = r + 2$. Vu que

$$e_1'' = K_0 K_1 e_1 + K_0' e_2 + K_0^2 e_3\,, \tag{3.4}$$

on a

$$\text{cl}\,(e_1 e_1'' e_3) = \text{cl}\, K_0' = r\,,$$

de sorte que cl $e_1'' = r$ et cl $e_1 = r + 2$.

C. Passons maintenant au cas très intéressant de

$$\text{cl}\, K_0 = r + 2\,, \quad \text{cl}\, K_1 = r\,, \quad \text{cl}\, K_2 \geqq r\,. \tag{3.5}$$

En vertu de (1.6) nous avons cl $e_1 = r + 2$. Ensuite, nous avons certainement cl $X - 1 = \text{cl}\,(K_0 e_1) \geqq r + 2$, donc cl $X \geqq r + 3$. Considérons de plus près les valeurs que peut prendre le nombre cl X. Nous avons

$$X''' = (K_0'' + K_0^2 K_1)\, e_1 + 3K_0 K_0' e_2 + K_0^3 e_3 \tag{3.6}$$

et cl $(3K_0 K_0' e_2 + K_0^3 e_3) \geqq r + 1$. Donc cl $X = \text{cl}\, X''' + 3 \geqq r + 4$ si et seulement si

$$\text{cl}\,(K_0'' + K_0^2 K_1) \geqq r + 1\,. \tag{3.7}$$

Si (3.7) n'a pas lieu, nous aurons cl $X = r + 3$.

Supposons dans ce qui suit que (3.7) ait lieu, c'est-à-dire que cl $X \geqq r + 4$. Dans ce cas-là nous aurons

$$\begin{aligned} X^{\text{IV}} = {} & \{(K_0'' + K_0^2 K_1)' + 3K_0 K_1 K_0' + K_0^3 K_2\}\, e_1 + \\ & + \{4(K_0'' + K_0^2 K_1)\, K_0 + 3K_0'^2\}\, e_2 + 6K_0^2 K_0' e_3 \equiv \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3\,. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Nous avons cl $X \geqq r + 5$ si et seulement si cl $X^{\text{IV}} \geqq r + 1$, c'est-à-dire si cl $\alpha_1 \geqq r + 1$, cl $\alpha_2 \geqq r + 1$, cl $\alpha_3 \geqq r + 1$, car $(X^{\text{IV}}, e_i, e_j) = \pm\, \alpha_k$ pour i, j, k différents. Or, compte, tenu des hypothèses faites, nous voyons que cl $\alpha_3 \geqq r + 1$; en vertu de (3.7) il en vient aussi cl $\alpha_2 \geqq r + 1$. Pour que cl $X \geqq r + 5$, il faut donc que l'on ait (3.7) et

$$\text{cl}\, \{(K_0'' + K_0^2 K_1)' + 3K_0 K_1 K_0' + K_0^3 K_2\} \geqq r + 1\,. \tag{3.9}$$

Si (3.7) a lieu et (3.9) n'a pas lieu, nous avons cl $X = r + 4$.

Supposons les inégalités (3.7) et (3.9) satisfaites et posons-nous la question de savoir si l'inégalité cl $X \geqq r + 6$ peut avoir lieu. Nous avons

$$X^{\text{V}} = (.)\, e_1 + (.)\, e_2 + (\alpha_2 K_0 + 12K_0 K_0'^2 + 6K_0^2 K_0')\, e_3\,, \tag{3.10}$$

de sorte que notre condition donne

$$\text{cl}\,(10K_0^2 K_0'' + 15K_0 K_0'^2 + 4K_0^4 K_1) \geqq r + 1\,.$$

Or, cette condition est équivalente à l'inégalité

$$\text{cl}\,(K_0'' + \tfrac{2}{5} K_0^2 K_1) \geqq r + 1\,. \tag{3.11}$$

Il résulte de (3.7) et (3·11) que cl $K_0'' \geqq r + 1$, donc cl $K_0 \geqq r + 3$, en contradiction avec notre hypothèse. Il s'en ensuit $\operatorname{cl} X \geqq r + 5$, donc $\operatorname{cl} X = r + 5$ a lieu si et seulement si (3.7) et (3.9) ont lieu.

Dans le cas de $\operatorname{cl} K_2 = r$ il est sans doute possible de choisir les fonctions K_0, K_1, K_2 de façon à avoir (3.7) et (3.9), ou bien (3.7) seulement (sans que (3.9) ait lieu). Considérons le cas où $\operatorname{cl} K_2 \geqq r + 2$. Alors (3.9) est équivalent à

$$\operatorname{cl} \{(K_0'' + K_0^2 K_1)' + 3K_0 K_1 K_0'\} \geqq r + 1 . \tag{3.12}$$

Le cas de $\operatorname{cl} X = r + 5$ se présente donc effectivement seulement s'il est possible de choisir les fonctions K_0 et K_1 de telle façon que l'on ait (3.5), (3.7) et (3.12). Cherchons donc des fonctions K_0, K_1 pour lesquelles

$$K_0'' + K_0^2 K_1 = f , \quad f' + 3K_0 K_1 K_0 = 0 ; \tag{3.13}$$

f étant une fonction arbitraire, $\operatorname{cl} f = r + 1$. Si les fonctions K_0, K_1 vérifient les équations (3.13), elles vérifient aussi les inégalitées (3.7) et (3.12). En éliminant K_1 de (3.13) nous obtenons

$$K_0' K_0'' = \tfrac{1}{3} K_0 f' + f K' . \tag{3.14}$$

Considérons sa solution non-nulle K_0 et soit $\operatorname{cl} K_0 = s + 2$. Nous avons alors $\varepsilon_1 = \operatorname{cl}(K_0' K_0'') = s$; $\varepsilon_2 = \operatorname{cl}(f' K_0) \geqq \min(s + 2, r)$; $\varepsilon_3 = \operatorname{cl}(f K_0') \geqq \min(s + 1, r + 1)$. Supposons tout d'abord $s > r$. Alors $\varepsilon_2 = r$, $\varepsilon_3 = r + 1$ et la classe du second membre de l'équation (3.14) est $\varepsilon = r$, ce qui est impossible. Soit ensuite $s < r$. Alors $\varepsilon_3 = s + 1$ et $\varepsilon_2 = s + 2$ ou $\varepsilon_2 \geqq r$. Alors, nous avons $\varepsilon = s + 1$, ou bien $\varepsilon \geqq s + 1$, mais dans aucun cas on n'a $\varepsilon = s$. Donc $s + 2 = \operatorname{cl} K_0 = r + 2$. La fonction K_1 trouvée à partir de (3.13), est sûrement de la classe $\operatorname{cl} K_1 = r$.

4. Les cas où

$$\operatorname{cl} K_0 = r , \quad \operatorname{cl} K_1 \geqq r + 1 , \quad \operatorname{cl} K_2 = r , \tag{4.1}$$

ou bien

$$\operatorname{cl} K_0 = r , \quad \operatorname{cl} K_1 = r , \quad \operatorname{cl} K_2 \geqq r + 1 , \tag{4.2}$$

peuvent être traités simultanément. Il résulte de (1.5) et (1.6) que $\operatorname{cl} X = \operatorname{cl} e_1 = r + 1$. Ensuite nous avons aussi $\operatorname{cl} e_3' = \operatorname{cl}(K_2 e_1 + 3K_1 e_2) = r$, c'est-à-dire $\operatorname{cl} e_3 = r + 1$. Dans le cas de (4.1) nous aurons $\operatorname{cl}(e_1 e_2 e_2') = \operatorname{cl} K_0 = r$; dans le cas de (4.2) nous aurons $\operatorname{cl}(e_2' e_2 e_3) = \operatorname{cl} K_1 = r$; dans les deux cas il faut donc que l'on ait $\operatorname{cl} e_2' = r$, c'est-à-dire $\operatorname{cl} e_2 = r + 1$.

5. Passons à l'étude du cas de

$$\operatorname{cl} K_0 = r , \quad \operatorname{cl} K_1 \geqq r + 1 , \quad \operatorname{cl} K_2 \geqq r + 1 . \tag{5.1}$$

Comme tout à l'heure, nous obtenons de (1.5) et (1.6) l'égalité $\operatorname{cl} X = \operatorname{cl} e_1 = r + 1$. De plus, $\operatorname{cl} e_2' = \operatorname{cl}(K_1 e_1 + K_0 e_3) = r$, donc $\operatorname{cl} e_2 = r + 1$. Il découle de (1·8) l'inégalité $\operatorname{cl} e_3 \geqq r + 2$. On a

$$e_3'' = (K_2' + 3K_1^2) e_1 + (3K_1' + K_0 K_2) e_2 + 3K_0 K_1 e_3 . \tag{5.2}$$

Vu que $\operatorname{cl}(e_1 e_2 e_3'') = \operatorname{cl}(3K_0 K_2) = r$, nous avons $\operatorname{cl} e_3 = r + 2$.

6. Considérons le cas où

$$\text{(6.1)} \qquad \mathrm{cl}\, K_0 = r + 1\,, \quad \mathrm{cl}\, K_1 \geqq r + 1\,, \quad \mathrm{cl}\, K_2 = r\,.$$

Nous avons $\mathrm{cl}\,(e_3' e_2 e_3) = \mathrm{cl}\, K_2 = r$, de sorte que $\mathrm{cl}\, e_3 = r + 1$. Or (1.7) nous donne $\mathrm{cl}\, e_2 \geqq r + 2$, mais $\mathrm{cl}\, e_1 = r + 2$ en vertu de (1.6) et $\mathrm{cl}\, X = r + 2$ en vertu de (1.5). Ensuite

$$\text{(6.2)} \qquad e_2'' = (K_1' + K_0 K_2)\, e_1 + 4K_0 K_1 e_2 + K_0' e_3\,,$$

de sorte que $\mathrm{cl}\,(e_1 e_2 e_2'') = \mathrm{cl}\, K_0' = r$, donc $\mathrm{cl}\, e_2 = r + 2$.

Ayons ensuite

$$\text{(6.3)} \qquad \mathrm{cl}\, K_0 \geqq r + 4\,, \quad \mathrm{cl}\, K_1 \geqq r + 2\,, \quad \mathrm{cl}\, K_2 = r\,.$$

Comme dans le cas précédent, nous obtenons $\mathrm{cl}\, e_3 = r + 1$, d'où $\mathrm{cl}\, e_2 \geqq r + 2$. Il résulte de (6.2) que $\mathrm{cl}\,(e_2'' e_2 e_3) = \mathrm{cl}\,(K_1' + K_0 K_2) = r$, donc $\mathrm{cl}\, e_2 = r + 2$. Il découle de (1.6) que $\mathrm{cl}\, e_1 = r + 3$ et de (1.5) que $\mathrm{cl}\, X = r + 4$.

Considérons le cas où

$$\text{(6.4)} \qquad \mathrm{cl}\, K_0 = r + 2\,, \quad \mathrm{cl}\, K_1 \geqq r + 2\,, \quad \mathrm{cl}\, K_2 = r\,.$$

On a de nouveau $\mathrm{cl}\, e_3 = r + 1$, $\mathrm{cl}\, e_2 = r + 2$. Il résulte de (1.6) que $\mathrm{cl}\, e_1 \geqq r + 3$ et de (1.5) $\mathrm{cl}\, X = r + 3$. On a

$$\text{(6.5)} \qquad e_1''' = (2K_1 K_0' + K_0 K_1' + K_0^2 K_2)\, e_1 + (K_0'' + 4K_0^2 K_1)\, e_2 + 3K_0 K_0' e_3\,,$$

de sorte que $b \equiv (e_1 e_1''' e_3) = K_0'' + 4K_0^2 K_1$. Or $\mathrm{cl}\,(K_0^2 K_1) \geqq r + 2$, donc $\mathrm{cl}\, b = r = \mathrm{cl}\, e_1'''$, d'où $\mathrm{cl}\, e_1 = r + 3$.

7. Considérons le cas où

$$\text{(7.1)} \qquad \mathrm{cl}\, K_0 = r + 3\,, \quad \mathrm{cl}\, K_1 \geqq r + 2\,, \quad \mathrm{cl}\, K_2 = r\,.$$

Tout comme dans le cas de (6.3) nous établissons $\mathrm{cl}\, e_3 = r + 1$, $\mathrm{cl}\, e_2 = r + 2$, $\mathrm{cl}\, e_1 = r + 3$. Maintenant $\mathrm{cl}\, X \geqq r + 4$. On a

$$\text{(7.2)} \qquad X^{\mathrm{IV}} = (K_0''' + 5K_0 K_1 K_0' + K_0^2 K_0^1 + K_0^3 K_2)\, e_1 + \\ + (4K_0 K_0'' + 3K_0'^2 + 4K_0^3 K_1)\, e_2 + 6K_0^2 K_0' e_3\,.$$

Cherchons à déterminer le cas où $\mathrm{cl}\, X \geqq r + 5$, c'est-à-dire $\mathrm{cl}\, X^{\mathrm{IV}} \geqq r + 1$. Pour cela, il faut et il suffit que l'on ait

$$\text{(7.3)} \qquad \mathrm{cl}\,(K_0''' + K_0^3 K_2) \geqq r + 1\,.$$

Dans le cas où (7.3) n'a pas lieu, on a $\mathrm{cl}\, X = r + 4$. Supposons maintenant (7.3) satisfait, alors

$$\text{(7.4)} \qquad X^{\mathrm{V}} = (.)\, e_1 - 4K_0^4 K_2 e_2 + \beta$$

où $\mathrm{cl}\, \beta \geqq r + 1$, et $\mathrm{cl}\,(e_1 X^{\mathrm{V}} e_3) = \mathrm{cl}\,(K_0^4 K_2) = r$, donc $\mathrm{cl}\, X^{\mathrm{V}} = r$, c'est-à-dire $\mathrm{cl}\, X = r + 5$. Si (7.3) a lieu, nous avons donc $\mathrm{cl}\, X = r + 5$; le cas de $\mathrm{cl}\, X \geqq r + 6$ n'est pas possible.

8. Ayons maintenant

$$(8.1)\qquad \mathrm{cl}\, K_0 \geqq r + 2\,, \quad \mathrm{cl}\, K_1 = r + 1\,, \quad \mathrm{cl}\, K_2 = r\,.$$

D'une manière évidente cl $e_3 = r + 1$. Il déc oule de (1.7) que cl $e_2 = r + 2$. Compte tenu de (6.2) nous voyons que cl $e_2'' \geqq r + 1$ si et seulement si

$$(8.2)\qquad \mathrm{cl}\,(K_1' + K_0K_2) \geqq r + 1\,.$$

Donc, si (8.2) n'a pas lieu, nous avons cl $e_2 = r + 2$. Supposons donc (8.2) satisfait, c'est-à-dire que cl $e_2 \geqq r + 3$. On a

$$(8.3)\qquad e_2''' = (.)\, e_1 + (7K_1K_0' + 5K_0K_1' + K_0^2K_2)\, e_2 + (.)\, e_3\,.$$

La classe du coefficient de e_2 est déterminée par la fonction $K_0(K_1' + \frac{1}{5}K_0K_2)$ et, en vertu de (8.2), par la fonction K_0K_2, elle est donc r. Il en vient cl $(e_1e_2'''e_3) = r$, d'où cl $e_2''' = r$ et cl $e_2 = r + 3$. Si (8.2) a lieu, on a cl $e_2 = r + 3$; le cas de cl $r_2 \geqq$ $\geqq r + 4$ n'est pas possible.

A. Soit cl $e_2 = r + 2$, donc (8.2) n'a pas lieu. Il résulte de (1.6) que cl $e_1 \geqq r + 3$. Si cl $e_1 \geqq r + 4$, cela signifie que cl $e_1''' \geqq r + 1$; e_1''' étant donné par la formule (6.5). Or il s'ensuit de cette condition que le coefficient de e_1 est de classe $\geqq r + 1$, ce qui est équivalent à (8.2). On a donc cl $e_1 = r + 3$. Dans le cas de cl $K_0 = r + 2$ nous avons cl $X = r + 3$; dans le cas de cl $K_0 \geqq r + 4$ nous avons cl $X = r + 4$.

Il nous reste à étudier le cas où

$$(8.4)\qquad \mathrm{cl}\, K_0 = r + 3\,, \quad \mathrm{cl}\, K_1 = r + 1\,, \quad \mathrm{cl}\, K_2 = r\,, \quad \mathrm{cl}\, e_1 = r + 3\,,$$
$$\mathrm{cl}\, e_2 = r + 2\,, \quad \mathrm{cl}\, e_3 = r + 1\,.$$

A présent, nous avons cl $X \geqq r + 4$, l'expression pour X^{IV} étant donnée par la formule (7.2), Demandons-nous quand cl $X \geqq r + 5$. Alors tous les coefficients des e_i dans (7.2) sont de classe $\geqq r + 1$, c'est-à-dire

$$(8.5)\qquad \mathrm{cl}\,(K_0''' + K_0^2K_1' + K_0^3K_2) \geqq r + 1\,.$$

Si (8.5) n'a pas lieu, on a cl $X = r + 4$. Soit donc (8.5) satisfait de sorte que cl $X \geqq$ $\geqq r + 5$. Nous avons

$$(8.6)\quad X^{\mathrm{V}} = (.)\, e_1 + (5K_0K_0''' + 5K_0^3K_1' + 2K_0^4K_2 + 35K_0^2K_1K_0' + 10K_0'K_0'')\, e_2 + $$
$$+ (.)\, e_3\,.$$

Compte tenu de (8.5) on voit aisément que le coefficient d' e_2 dans (8.6) est de classe r, de façon que cl $X = r + 5$, le cas de cl $X \geqq r + 6$ n'étant pas possible.

B. Nous avons (8.2), c'est-à-dire en somme: (8.1), cl $e_3 = r + 1$, cl $e_2 = r + 3$. Dans le cas où cl $K_0 \geqq r + 5$, nous avons cl $e_1 = r + 4$ et cl $X = r + 5$. Dans le cas où cl $K_0 = r + 2$, on a cl $e_1 = r + 3$ et cl $X = r + 3$. Il nous reste donc deux cas:

$$\text{cl } K_0 = r + 4\,, \quad \text{cl } K_1 = r + 1\,, \quad \text{cl } K_2 = r\,; \tag{8.7}$$

$$\text{cl } K_0 = r + 3\,, \quad \text{cl } K_1 = r + 1\,, \quad \text{cl } K_2 = r\,. \tag{8.8}$$

Dans le cas de (8.7) nous avons cl $e_1 = r + 4$ et cl $X \geqq r + 5$. Soit cl $X \geqq r + 6$, alors le coefficient d' e_2 dans (8.6) est de classe $\geqq r + 1$. Nous avons donc cl $(K_1' + \frac{2}{5}K_0K_2) \geqq r + 1$ ce qui donne avec (8.2) le résultat cl $K_2 \geqq r + 1$, mais c'est impossible; donc cl $X = r + 5$.

Dans le cas de (8.8) nous avons cl $X = r + 4$ et cl $e_1 \geqq r + 4$. Il résulte de (6.5) que

$$\begin{aligned} e_1^{\mathrm{IV}} = \{&3K_0'K_1' + 3K_0K_1'' + K_0'(K_1' + K_0K_2) + K_0(K_1' + K_0K_2)' + \\ &+ 4K_0^2K_1^2 + 5K_0K_2K_0'\}\, e_1 + \{19K_0K_1K_0' + K_0^2(K_1' + K_0K_2) + K_0''' + 4K_0^2K_1'\}\, e_2 + \\ &+ (4K_0K_0'' + 4K_0^3K_1 + 3K_0'^2)\, e_3 \equiv \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3\,, \end{aligned} \tag{8.9}$$

$$\begin{aligned} e_1^{\mathrm{V}} &= (.)\, e_1 + (.)\, e_2 + \\ &+ \{10K_0'K_0'' + 5K_0K_0''' + 31K_0^2K_1K_0' + 8K_0^3K_1' + K_0^3(K_1' + K_0K_2)\}\, e_3\,. \end{aligned} \tag{8.10}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que cl $e_1 \geqq r + 5$, est que cl $\beta_1 \geqq r + 1$, cl $\beta_2 \geqq r + 1$, cl $\beta_3 \geqq r + 1$. On voit aisément que la dernière des inégalités est vérifiée, les deux autres donnent

$$\text{cl } \{(K_1' + K_0K_2)' + 2K_2K_0'\} \geqq r + 1\,, \tag{8.11}$$

$$\text{cl } (K_0''' + 4K_0^3K_2) \geqq r + 1\,. \tag{8.12}$$

Comme cl $K_2 = r$, il résulte de (8.11) que le signe d'égalité est le seul possible dans (8.2).

Supposons que nous ayons (8.2), (8.11) et (8.12) et demandons-nous s'il est possible que nous ayons cl $e_1 \geqq r + 6$. Dans ce cas-là nous aurions cl $e_1^{\mathrm{V}} \geqq r + 1$ et le coefficient d' e_3 dans (8.10) serait de classe $\geqq r + 1$. Or, cela signifie que

$$\text{cl } (5K_0''' + 8K_0^2K_1') \geqq r + 1\,. \tag{8.13}$$

En vertu de (8.2) et (8.12) il est possible de montrer que la condition (8.13) est équivalente à cl $K_2 \geqq r + 1$ ce qui contredit nos hypothèses, donc le cas de cl $e_1 \geqq r + 6$ ne se présente pas.

9. Résumons les résultats donnés ci-dessus. Pour pouvoir nous exprimer plus facilement, introduisons les fonctions

$$t_1 = K_0'' + K_0^2K_1\,, \quad t_2 = t_1' + 3K_0K_1K_0' + K_0^3K_2\,, \tag{9.1}$$

$$u = K_0''' + K_0^3K_2\,, \tag{9.2}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= K_1' + K_0K_2\,, \quad v_2 = K_0''' + K_0^2v_1\,, \\ v_3 &= v_1' + 2K_2K_0'\,, \quad v_4 = K_0''' + 4K_0^3K_2\,. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Un aperçu de tous les cas possibles est donné par le tableau I.

TAB. I.

Type	cl $K_0(t)$	cl $K_1(t)$	cl $K_2(t)$		cl $X(t)$	cl $e_1(t)$	cl $e_2(t)$	cl $e_3(t)$
1	r	r	$\geqq r$		$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$
	r	$\geqq r$	r					
2	$r+1$	r	$\geqq r$		$r+2$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
3	$\geqq r+3$	r	$\geqq r$		$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
	$r+2$	r	$\geqq r$	cl $t_1 = r$				
4	$r+2$	r	$\geqq r$	cl $t_1 \geqq r+1$, cl $t_2 = r$	$r+4$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
5	$r+2$	r	$\geqq r$	cl $t_1 \geqq r+1$, cl $t_2 \geqq r+1$	$r+5$	$r+2$	$r+1$	$r+1$
6	r	$\geqq r+1$	$\geqq r+1$		$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
7	$r+1$	$\geqq r+1$	r		$r+2$	$r+2$	$r+2$	$r+1$
8	$\geqq r+4$	$\geqq r+2$	r		$r+4$	$r+3$	$r+2$	$r+1$
	$r+3$	$\geqq r+1$	r	cl $u = r$				
	$\geqq r+4$	$r+1$	r	cl $v_1 = r$				
	$r+3$	$r+1$	r	cl $v_1 = r$, cl $v_2 = r$				
9	$r+3$	$\geqq r+2$	r	cl $u \geqq r+1$	$r+5$	$r+3$	$r+2$	$r+1$
	$r+3$	$r+1$	r	cl $v_1 = r$, cl $v \geqq r+1$				
10	$r+2$	$\geqq r+2$	r		$r+3$	$r+3$	$r+2$	$r+1$
	$r+2$	$r+1$	r	cl $v_1 = r$				
11	$\geqq r+4$	$r+1$	r	cl $v_1 \geqq r+1$	$r+5$	$r+4$	$r+3$	$r+1$
12	$r+3$	$r+1$	r	cl $v_1 \geqq r+1$, cl $v_3 = r$, ou cl $v_4 = r$	$r+4$	$r+4$	$r+3$	$r+1$
13	$r+3$	$r+1$	r	cl $v_1 \geqq r+1$, cl $v_3 \geqq$ $\geqq r+1$, cl $v_4 \geqq r+1$	$r+4$	$r+5$	$r+3$	$r+1$
14	$r+2$	$r+1$	r	cl $v_1 \geqq r+1$	$r+3$	$r+3$	$r+3$	$r+1$

10. Passons au cas où c'est l'arc affin qui joue le rôle du paramètre; alors $K_0 = 1$ et les équations fondamentales sont (1.9). Vu que cl $K_0 = \infty$ on voit au tableau I que les seuls cas possibles sont 3, 8a, 8c et 11. Désignons par

$$\mathscr{E}_1 = \{X, e_1\}\,, \quad \mathscr{E}_2 = \{X, e_2\}\,, \quad \mathscr{E}_3 = \{X, e_3\} \tag{10.1}$$

les arrêtes et par

$$\mathscr{F}_1 = \{X, e_2, e_3\}\,, \quad \mathscr{F}_2 = \{X, e_1, e_3\}\,, \quad \mathscr{F}_3 = \{X, e_1, e_2\} \tag{10.2}$$

les faces du repère. Alors

$$\begin{gathered} \operatorname{cl} \mathscr{E}_i = \min\left(\operatorname{cl} e_i, \operatorname{cl}\left[X e_i\right]\right), \\ \operatorname{cl} \mathscr{F}_i = \min\left(\operatorname{cl}\left[e_j e_k\right], \operatorname{cl}\left(X e_j e_k\right)\right), \quad i, j, k \text{ différents}. \end{gathered} \tag{10.3}$$

Tab. II.

Type	$\operatorname{cl} k_1(s)$	$\operatorname{cl} k_2(s)$		$\operatorname{cl} X$	$\operatorname{cl} e_1$	$\operatorname{cl} e_2$	$\operatorname{cl} e_3$	$\operatorname{cl} \mathscr{E}_1$	$\operatorname{cl} \mathscr{E}_2$	$\operatorname{cl} \mathscr{E}_3$	$\operatorname{cl} \mathscr{F}_1$	$\operatorname{cl} \mathscr{F}_2$	$\operatorname{cl} \mathscr{F}_3$
I	r	$\geqq r$		$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$r+2$
II	$\geqq r+2$	r		$r+4$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$
	$r+1$	r	$\operatorname{cl} w_1 = r, \operatorname{cl} w_2 = r$										
III	$r+1$	r	$\operatorname{cl} w_1 = r, \operatorname{cl} w_2 \geqq r+1$	$r+4$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+3$	$r+2$	$r+1$	$r+1$	$r+3$	$r+4$
IV	$r+1$	r	$\operatorname{cl} w_1 \geqq r+1, \operatorname{cl} w_2 = r$	$r+5$	$r+4$	$r+3$	$r+1$	$r+4$	$r+3$	$r+1$	$r+1$	$r+2$	$r+3$

A partir de cela il est déjà possible d'établir $\operatorname{cl} \mathscr{E}_i$, car en vertu des résultats précédents $\operatorname{cl} \mathscr{E}_i = \operatorname{cl} e_i$. Dans la suite, je vais déterminer $\operatorname{cl} \mathscr{F}_i$ dans tous les cas possibles. Citons les formules fondamentales

$$(10.4)\qquad \begin{aligned} [e_1e_2]^{\cdot} &= [e_1e_3]\,, \\ [e_1e_3]^{\cdot} &= [e_2e_3] + 3k_1[e_1e_2]\,, \\ [e_2e_3]^{\cdot} &= k_1[e_1e_3] - k_2[e_1e_2]\,, \end{aligned}$$

$$(10.5)\qquad \begin{aligned} (Xe_1e_2)^{\cdot} &= (Xe_1e_3)\,, \\ (Xe_1e_3)^{\cdot} &= (Xe_2e_3) + 3k_1(Xe_1e_2)\,, \\ (Xe_2e_3)^{\cdot} &= 1 + k_1(Xe_1e_3) - k_2(Xe_1e_2)\,. \end{aligned}$$

Supposons d'abord $\operatorname{cl} k_1 = r$. Alors nécessairement, comme il découle de (10.4), nous avons $\operatorname{cl}[e_1e_3] = r + 1$, $\operatorname{cl}[e_1e_2] = r + 2$, $\operatorname{cl}[e_2e_3] = r + 1$. Vu que $\operatorname{cl}(Xe_1e_2) \geqq r + 2$, nous avons $\operatorname{cl} \mathscr{F}_1 = r + 1$, $\operatorname{cl} \mathscr{F}_2 = r + 1$, $\operatorname{cl} \mathscr{F}_3 = r + 2$.

Soit ensuite $\operatorname{cl} k_1 \geqq r + 2$, $\operatorname{cl} k_2 = r$. Alors $\operatorname{cl}[e_1e_2] = \operatorname{cl}[e_1e_3] + 1 \geqq r + 3$. On a

$$(10.6)\qquad [e_1e_3]^{\cdot\cdot} = [e_1e_2]^{\cdot\cdot\cdot} = (3k_1^{\cdot} - k_2)[e_1e_2] + 4k_1[e_1e_3]\,,$$

c'est-à-dire $\operatorname{cl}[e_1e_2] = r + 3$, $\operatorname{cl}(Xe_1e_2) \geqq r + 3$, donc $\operatorname{cl} \mathscr{F}_3 = r + 3$. D'une manière analogue, nous obtenons $\operatorname{cl}[e_1e_3] = r + 2$, $\operatorname{cl} \mathscr{F}_2 = r + 2$. Enfin $\operatorname{cl}[e_2e_3] = r + 1$, donc $\operatorname{cl} \mathscr{F}_1 = r + 1$.

Passons au cas de $\operatorname{cl} k_1 = r + 1$, $\operatorname{cl} k_2 = r$. Il découle de (10.6) que si $\operatorname{cl}(3k_1^{\cdot} - k_2) = r$, on a $\operatorname{cl}[e_1e_2] = r + 3$, donc $\operatorname{cl} \mathscr{F}_3 = r + 3$. Dans le cas contraire nous avous

$$[e_1e_2]^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = (.)[e_1e_2] + (7k_1^{\cdot} - k_2)[e_1e_3] + (.)[e_2e_3]\,,$$

et, vu que $\operatorname{cl} k_1^{\cdot} = r$, on a $\operatorname{cl}[e_1e_2] = r + 4$, c'est-à-dire $\operatorname{cl} \mathscr{F}_3 = r + 4$. Comme $\operatorname{cl}[e_1e_3] = \operatorname{cl}[e_1e_2] = 1$, nous avons $\operatorname{cl} \mathscr{F}_2 = r + 2$ dans le premier cas et $\operatorname{cl} \mathscr{F}_2 = r + 3$ dans le deuxième cas; mais toujours $\operatorname{cl}[e_2e_3] = r + 1$, donc $\operatorname{cl} \mathscr{F}_1 = r + 1$.

Il est possible maintenant de résumer nos résultats. Introduisons les fonctions

$$w_1(s) = k_1^{\cdot} + k_2\,, \quad w_2(s) = 3k_1^{\cdot} - k_2\,; \tag{10.7}$$

la fonction $w_1(s)$, c'est la fonction $v_1(t)$ de (9.3) pour l'argument s. Si nous tenons compte de ce que, pour cl $k_1 = r + 1$, les inégalités cl $w_1 \geqq r + 1$, cl $w_2 \geqq r + 1$ ne peuvent pas être vérifiées simultanèment, nous pouvons résumer les résultats sous forme du tableau II que voici.

Littérature

[1] *E. Čech:* Détermination du type différentiel d'une courbe de l'espace à deux, trois ou quatre dimensions; Czech. Math. Journal, *7* (*82*) 1957, 599–631.

[2] *E. Čech:* Classe différentielle des courbes. Sections et projections; Revue Math. Pur. Appl., *II*, 1957, 151–159.

[3] *E. Čech:* Sur le type différentiel anallagmatique d'une courbe plane ou gauche; Coll. Math., 1958, 141–143.

[4] *E. Čech:* Classe différentielle des courbes. Cercles osculateurs et sphères osculatrices; Bull. Inst. Polit. Iassi, *V* (*IX*), 1959, 1–4.

[5] *E. Čech:* Sulla differenziabilità del triedro di Frenet.; Ann. Mat. Pur. Appl., Ser. *IV*, t. LXIX, 1960, 91–96.

[6] *J. Favard:* Cours de géométrie différentielle locale; Paris, 1957.

Резюме

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ВИНТЕРНИЦОВСКОГО РЕПЕРА КРИВОЙ

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Прага

Пусть (X) — кривая в трехмерном аффинном унимодулярном пространстве, s — ее аффинная дуга, а $\{X, e_1, e_2, e_3\}$ — репер (т. е. трехгранник) Винтерница; тогда имеют место основные уравнения (1.1), (1.9) и при общем параметре t уравнения (1.5)–(1.8). Обозначим через (10.1) ребра и через (10.2) — грани репера. Пусть cl$f \geqq 0$ означает, что f непрерывна; cl$f \geqq 1$ означает, что f' существует и непрерывна; cl$f \geqq r + 1$ означает, что cl$f' \geqq r$; здесь f есть скалярная, векторная или поливекторная функция. Введем функции (при условии, что соответственные производные существуют) (9.1)–(9.3), (10.7). Тогда легко показать, что, зная дифференциальные классы функций $K_i(t)$ и (9.1)–(9.3) (причем исключается тривиальный случай cl$K_i = \infty$), можно определить дифференциальный класс векторных функций $X(t)$, $e_i(t)$; все возможные случаи приводятся в табл. I. Зная дифференциальные классы функций $k_i(s)$ и (10.7), можно далее определить дифференциальный класс $X(s)$, $e_i(s)$, $\mathscr{E}_i(s)$, $\mathscr{F}_i(s)$; см. табл. II. Здесь имеет, конечно, место (10.3).