

Jan Kadlec

О регулярности решения задачи Пуассона на области с границей, локально подобной границе выпуклой области

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 14 (1964), No. 3, 386–393

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100628>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1964

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

О РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПУАССОНА
НА ОБЛАСТИ С ГРАНИЦЕЙ,
ЛОКАЛЬНО ПОДОБНОЙ ГРАНИЦЕ ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ

ЯН КАДЛЕЦ (Jan Kadlec), Прага

(Поступило в редакцию 1/II 1963 г.)

Доказывается существование и интегрируемость с квадратом вторых производных решения задачи Пуассона на области, локально подобной границе выпуклой области, если правая часть уравнения интегрируема с квадратом.

1. Введение. В настоящей работе расширим достижения работы [1] на области типа \mathfrak{R} . Для $\Omega \in \mathfrak{R}$ мы докажем теорему:

Теорема. Если $u \in \dot{W}_2^{(1)}(\Omega)$ — решение задачи Пуассона $Au = f$, где $f \in L_2(\Omega)$ и эллиптический дифференциальный оператор второго порядка A обладает коэффициентами, удовлетворяющими условию Литшица, тогда справедливо неравенство

$$|u|_{W_2^{(2)}(\Omega)} \leq C |f|_{L_2(\Omega)},$$

где C не зависит от выбора функции f .

Множество \mathfrak{R} , данное определением 11, является множеством таких областей, которые в окрестности всякой точки границы подобны некоторой выпуклой области.

Так как мы будем пользоваться достижениями работы [1], то сохраним обозначения этой работы.

В настоящей работе повторяются идеи доказательств некоторых теорем работы [1]; итак, соответствующие теоремы не будем подробно доказывать.

Существенную роль при обобщении теоремы 20 работы [1] играет следующее определение и теоремы 3 и 4.

2. Определение. Пусть $\Omega \in \mathfrak{A}$, $\Omega_k \in \mathfrak{A}$. Скажем, что $\Omega_k \rightarrow \Omega$ изнутри, если справедливо:

1) $\Omega_k \subset \Omega$. 2) Если $M \subset \Omega$ — замкнутое множество, то существует k_0 (которое зависит от M) такое, что для всех $k \geq k_0$ справедливо $M \subset \Omega_k$.

$\dot{W}_2^{(-1)}(\Omega)$ обозначает пространство линейных непрерывных функционалов над $\dot{W}_2^{(1)}(\Omega)$. Известно, что $L_2(\Omega) \subset \dot{W}_2^{(-1)}(\Omega)$. Обозначим $*W_2^{(2)}(\Omega) = W_2^{(2)}(\Omega) \cap \dot{W}_2^{(1)}(\Omega)$.

3. Теорема. Пусть $\Omega \in \mathfrak{A}$ и пусть $\Omega_k \rightarrow \Omega$ изнутри. Пусть a^{ij} — ограниченные измеримые функции и A — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка. Пусть, далее, $f \in \dot{W}_2^{(-1)}(\Omega)$ и u_k , и являются решениям задач Пуассона

$$\begin{aligned} Au_k &= f \text{ в } \Omega_k, \quad u_k = 0 \text{ на } \Omega_k^c, \\ Au &= f \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \text{ на } \Omega^c. \end{aligned}$$

Тогда имеет место следующее утверждение: Если определим $u_k(X) = 0$ для всех $X \notin \Omega_k$, то $u_k \in \dot{W}_2^{(1)}(\Omega)$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u$ в пространстве $\dot{W}_2^{(1)}(\Omega)$.

Доказательство находится в работе [2].

4. Теорема. Пусть $\Omega \in \mathfrak{A}$ и $u_m \in L_1(\Omega)$ такие, что

$$\frac{\partial^k u_m}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \in L_p(\Omega) \quad (p > 1)$$

и

$$\left| \frac{\partial^k u_m}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \right|_{L_p(\Omega)} \leq C$$

для всех m .

Пусть $u \in L_1(\Omega)$ и пусть для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ имеет место

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_m \varphi \, d\Omega = \int_{\Omega} u \varphi \, d\Omega.$$

Тогда u обладает обобщенной производной

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \in L_p(\Omega).$$

Доказательство. Если $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, то

$$\begin{aligned} (1) \quad & \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_m \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \, d\Omega = \\ & = \lim_{m \rightarrow \infty} (-1)^k \int_{\Omega} \frac{\partial^k u_m}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \varphi \, d\Omega = \int_{\Omega} u \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \, d\Omega. \end{aligned}$$

Так как $\mathcal{D}(\Omega)$ плотно в $L_q(\Omega)$ ($1/p + 1/q = 1$) и последовательность

$$v_m = \frac{\partial^k u_m}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}$$

является ограниченной в $L_p(\Omega)$, то v_m слабо стремится в $L_p(\Omega)$ к некоторой функции $v \in L_p(\Omega)$.

Из (1) предельным переходом получим

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} d\Omega = (-1)^k \int_{\Omega} v \varphi d\Omega ;$$

итак, v является обобщенной производной функции u .

5. Определение. Открытое ограниченное множество Ω , замыкание которого является пересечением конечного числа полупространств Q_i пространства E_n , будем называть \mathfrak{L} -многогранником, если для всех $X \in \Omega'$ верно следующее:

Если $X \in \bigcap_{j=1}^l Q_{i_j}$, где $Q_{i_j} \neq Q_{i_k}$ для $j \neq k$ и $X \notin Q_i$ для $i \notin \{i_1, \dots, i_l\}$, то $l \leq n$, и гиперплоскости Q_{i_j} линейно независимы.

6. Замечание. \mathfrak{L} -многогранник является элементом \mathfrak{L} . Можно предполагать, что все отображения S и T из определения множества типа \mathfrak{L} являются линейными.

Доказательство. Пусть $X \in \Omega'$, значит, $X \in \bigcap_{j=1}^l Q_{i_j}$. Так как $X \notin \bigcup_{k \notin \{i_1, \dots, i_l\}} Q_k$, то существует ограниченная окрестность U точки X такая, что $U \cap \bigcup_{k \notin \{i_1, \dots, i_l\}} Q_k = \emptyset$ и $U \subset \bigcup_{k \notin \{i_1, \dots, i_l\}} Q_k$. Из этого следует, что $\Omega \cap U = \Omega \cap \bigcap_{j=1}^l Q_{i_j}$.

Пусть Q_i задано неравенством $\sum_{j=1}^n d_{ij} x_j < d_{i0}$. Обозначим $\mathbf{d}_i = (d_{i1}, \dots, d_{in})$. Векторы \mathbf{d}_{i_j} ($j = 1, \dots, l$) линейно независимы; итак, существует $n - l$ векторов $\mathbf{d}'_{i_1}, \dots, \mathbf{d}'_{i_n}$ таких, что векторы $\mathbf{d}_{i_1}, \dots, \mathbf{d}_{i_l}, \mathbf{d}'_{i_1}, \dots, \mathbf{d}'_{i_n}$ образуют базис пространства E_n . Пусть $\mathbf{d}'_i = (d'_{i1}, \dots, d'_{in})$.

Теперь определим отображение T с помощью равенств

$$y_k = \sum_{j=1}^n d_{ikj} x_j \quad \text{для } k = 1, \dots, l,$$

$$y_k = \sum_{j=1}^n d'_{kj} x_j \quad \text{для } k = l + 1, \dots, n.$$

Если $V = TU$, то, очевидно, $T(\Omega \cap U) = K \cap V$, где K — достаточно большой куб такой, что его грани, проходящие через точку $Y = TX$ лежат в гиперплоскостях

$$y_k = d_{ik0} \quad (k = 1, \dots, l).$$

7. Теорема. Пусть Ω является \mathfrak{L} -многогранником. Тогда ${}^* \mathcal{E}(\Omega)$ -плотное множество в ${}^* W_2^{(2)}(\Omega)$.

Доказательство. $\Omega \in \mathfrak{L}$; итак, если $X \in \bar{\Omega}$, то существует окрестность \mathcal{U} , которая обладает свойствами, данными в определении области типа \mathfrak{L} (смотри работу [1]).

Мы тоже будем требовать, чтобы имели место утверждения замечания 16 работы [1]. Теперь существует конечное число $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_m$ выше описанных окрестностей, которые покрывают $\bar{\Omega}$.

Далее, существуют открытые \mathcal{U}'_i так, что \mathcal{U}'_i ($i = 1, \dots, m$) тоже покрывают $\bar{\Omega}$ и $\bar{\mathcal{U}}'_i \subset \mathcal{U}_i$. Множествам $\mathcal{U}'_1, \dots, \mathcal{U}'_m$ соответствует разложение единицы $\varphi_1, \dots, \dots, \varphi_m$. Далее, существуют функции $\psi_i \in \mathcal{E}(\Omega)$, которые обладают следующими свойствами:

$$\psi_i(X) = 1 \quad \text{для всех } X \in \mathcal{U}'_i \quad \text{и} \quad \psi_i(X) = 0 \quad \text{для всех } X \notin \mathcal{U}_i.$$

Пусть $u \in {}^*W_2^{(2)}(\Omega)$ и пусть, далее, $\varepsilon > 0$. Обозначим $u_i = u\varphi_i$. Очевидно, что $u_i \in {}^*W_2^{(2)}(\mathcal{U}_i \cap \Omega)$, и вследствие свойств отображений T, S и окрестности \mathcal{U}_i можно по теореме 12 работы [1] приближать u_i в норме ${}^*W_2^{(2)}(\mathcal{U}_i \cap \Omega)$ с любой точностью функцией из ${}^*\mathcal{E}(\mathcal{U}_i \cap \Omega)$.

Итак, существует $u_i^* \in {}^*\mathcal{E}(\mathcal{U}_i \cap \Omega)$ так, что для $u_i = \psi_i u_i$ и $\psi_i u_i^*$, которую мы на $\Omega - \mathcal{U}_i$ продолжим нулем, справедливо:

- 1) $\psi_i u_i^* \in {}^*\mathcal{E}(\Omega)$,
- 2) $|\psi_i u_i^* - u_i|_{*W(\Omega)} = |\psi_i(u_i^* - u_i)|_{*W(\Omega)} \leq C(\psi_i) |u_i^* - u_i|_{W_2^{(2)}(\mathcal{U}_i \cap \Omega)} \leq \varepsilon/m$ ($i = 1, \dots, m$).

Если обозначим

$$u^* = \sum_{i=1}^m \psi_i u_i^*,$$

$$\text{то } u^* \in {}^*\mathcal{E}(\Omega) \text{ и } |u^* - u|_{*W(\Omega)} = \left| \sum_{i=1}^m (\psi_i u_i^* - u_i) \right|_{*W(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Теорема доказана.

8. Теорема. Пусть Ω является \mathfrak{L} -многогранником. Пусть $u \in {}^*W_2^{(2)}(\Omega)$, A — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами и константой эллиптичности α . Тогда имеет место оценка

$$(2) \quad |u|_{*W} \leq \frac{1}{\alpha} |Au|_{L_2}.$$

Доказательство. Так как имеет место теорема 7, можно (2) доказывать только для $u \in {}^*\mathcal{E}(\Omega)$.

Мы можем тоже предполагать, что A является симметричным оператором. Если два раза воспользуемся интегрированием по частям, получим (смотри работу [1], теорему 11)

$$\int_{\Omega} |Au|^2 d\Omega = \int_{\Omega} a^{ij} a^{kl} u''_{ik} u''_{jl} d\Omega + \int_{\Omega} (a^{ij} a^{kl} - a^{ik} a^{jl}) u''_{ki} u'_j v_j d\Omega.$$

Второе слагаемое разделим на сумму интегралов, каждый из которых берется по некоторой плоской части Ω' .

Пусть теперь A — некоторая из этих частей. Введем местные координаты $[y_1, \dots, y_n]$ так, что координатная ось y_n направлена по внешней нормали к A . Пусть $x_i = c^{ij}y_j$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial y_j} c^{ij}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l} c^{ik} c^{jl}, \quad v_i = c^{ij} v_j^*,$$

где v_j^* — координаты внешней нормали в новой системе координат.

Итак

$$(a^{ij} a^{kl} - a^{ik} a^{jl}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_i} v_j = (\tilde{a}^{ij} \tilde{a}^{kl} - \tilde{a}^{ik} \tilde{a}^{jl}) \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l} \frac{\partial u}{\partial y_i} v_j^*,$$

где

$$\tilde{a}^{ij} = \sum_{k,l} a^{kl} c^{ki} c^{lj}.$$

Теперь точно таким образом, как в доказательстве теоремы 11 работы [1] получим

$$(\tilde{a}^{ij} \tilde{a}^{kl} - \tilde{a}^{ik} \tilde{a}^{jl}) \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l} \frac{\partial u}{\partial y_i} v_j^* = 0$$

и

$$\int_A (a^{ij} a^{kl} - a^{ik} a^{jl}) u''_{ki} u''_{lj} v_j dA = 0.$$

Это рассуждение имеет место на всех плоских частях Ω' ; итак,

$$\int_{\Omega} |Au|^2 d\Omega = \int_{\Omega} a^{ij} a^{kl} u''_{ik} u''_{jl} d\Omega,$$

откуда (смотри лемму 10 работы [1]) вытекает соотношение (2).

9. Теорема. Пусть Ω — выпуклая ограниченная область в E_n . Тогда существует последовательность ξ -многогранников Ω_n , которая изнутри стремится к области Ω .

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Ω' является компактным множеством; следовательно существует конечная $\frac{1}{2}\varepsilon$ — сеть X_1, \dots, X_m границы Ω' .

Если $X \in \Omega'$, то существует гиперплоскость $\pi(X)$, проходящая через точку X и такая, что $\pi(X) \cap \Omega = \emptyset$.

Полупространство, определенное гиперплоскостью $\pi(X)$, в котором находится Ω , обозначим $P(\pi(X))$. Обозначим, далее,

$$P_i = P(\pi(X_i)), \quad i = 1, \dots, m$$

и P'_i — полупространство в E_n , определенное соотношениями

$$P'_i \subset P_i, \quad \rho(P'_i, X_i) = \varepsilon.$$

Далее, существуют полупространства Q_i так, что

- 1) $\varrho(X_i, Q_i) > \frac{1}{2}\varepsilon$,
- 2) $P_i \cap \Omega \subset Q_i$,
- 3) $Q_i \neq Q_j$ ($i \neq j$), причем каждые n гиперплоскостей Q_i линейно независимы.

Обозначим

$$\Omega^{(\varepsilon)} = \bigcap_{i=1}^m Q_i.$$

$\Omega^{(\varepsilon)}$ является, очевидно, или ξ -многогранником или пустым множеством.

Если $X \in \Omega'$, то существует i так, что $\varrho(X, X_i) < \frac{1}{2}\varepsilon$, итак, $X \notin Q_i$ и $X \notin \Omega^{(\varepsilon)}$. Из этого вытекает, что $\Omega' \cap \Omega^{(\varepsilon)} = \emptyset$.

Пусть M — компактное подмножество Ω и обозначим $\varepsilon(M) = \varrho(M, \Omega')$. Очевидно, что для $\varepsilon < \varepsilon(M)$ справедливо $M \subset \Omega^{(\varepsilon)}$. Пусть точка $S \in \Omega$ и $\varepsilon_0 = \varrho(S, \Omega')$. Для $\varepsilon < \varepsilon_0$ является $\Omega^{(\varepsilon)}$ связной областью, значит, $\Omega^{(\varepsilon)} \subset \Omega$.

Пусть, далее, $n_0 > 1/\varepsilon_0$, n_0 — целое число. Если теперь определим

$$\Omega_n = \Omega^{1/(n+n_0)},$$

то теорема является вполне доказанной.

10. Теорема. Пусть Ω — выпуклая ограниченная область в E_n . Пусть A — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с константой эллиптичности α и постоянными коэффициентами. Пусть, далее, $u \in \dot{W}_2^{(1)}(\Omega)$ является решением задачи Пуассона $Au = f$, где $f \in L_2(\Omega)$.

Тогда $u \in *W_2^{(2)}(\Omega)$ и имеет место оценка

$$|u|_{*W} \leq \frac{1}{\alpha} |f|_{L_2}.$$

Доказательство. (Упрощенное Й. Нечасом.) Пусть Ω_n — области из теоремы 9. Обозначим через u_n решение задачи $Au_n = f$ в Ω_n , $u_n \in \dot{W}_2^{(1)}(\Omega_n)$.

Из теоремы 20 работы [1] вытекает $u_n \in *W_2^{(2)}(\Omega_n)$, и из теоремы 8 настоящей работы следует

$$|u_n|_{*W(\Omega_n)} \leq \frac{1}{\alpha} |f|_{L_2(\Omega)}.$$

Пусть Ω^* обозначает подобласть Ω , $\overline{\Omega^*} \subset \Omega$. Из теоремы 3 следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - u|_{L_2(\Omega^*)} = 0,$$

где предполагаем, что $n > n_0(\Omega^*)$ так, чтобы $\Omega_n \supset \Omega^*$.

Теперь

$$|u_n|_{*W(\Omega^*)} \leq |u_n|_{*W(\Omega_n)} \leq \frac{1}{\alpha} |f|_{L_2(\Omega)}.$$

Существует выбранная последовательность u_n , для которой существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{L_2(\Omega^*)} = l_{ij},$$

для всех i, j .

Из теоремы 4 следует существование обобщенной производной $\partial^2 u / \partial x_i \partial x_j$ и имеет место оценка

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{L_2(\Omega^*)} \leq l_{ij}.$$

Итак,

$$|u|_{*W(\Omega^*)} \leq \sqrt{\sum l_{ij}^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|_{*W(\Omega^*)} \leq \frac{1}{\alpha} |f|_{L_2(\Omega)}.$$

Теперь из неравенства

$$|u|_{*W(\Omega^*)} \leq \frac{1}{\alpha} |f|_{L_2(\Omega)}$$

предельным переходом $\Omega^* \rightarrow \Omega$ следует утверждение теоремы.

11. Определение. Мы скажем, что $\Omega \in \mathfrak{R}$, если Ω обладает следующими свойствами:

- 1) $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$,
- 2) Каждой точке $X \in \bar{\Omega}$ соответствует окрестность \mathcal{U} и обратимое отображение T окрестности \mathcal{U} на окрестность $\mathcal{V} = T(\mathcal{U})$ точки $Y = TX$ так, что
 - а) S и T непрерывны, и вторые обобщенные производные функций, определяющих S и T , являются ограниченными функциями.
 - б) Справедливо соотношение $\mathcal{U} \cap \Omega = S(K \cap \mathcal{V})$, где K – выпуклая ограниченная область.

Если $\Omega \in \mathfrak{R}$, то будем говорить, что граница Ω (локально) подобна границе выпуклой области.

Если имеет место 2) в точке X , то граница Ω в точке X подобна границе выпуклой области.

12. Замечание. Окрестности \mathcal{U}, \mathcal{V} , очевидно, можно уменьшить так, чтобы $\mathcal{V} \cap K$ была выпуклой областью.

Следующее утверждение мы введем без доказательства:

13. Теорема. Если Ω является ограниченной выпуклой областью, то $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$.

14. Теорема. Пусть $\Omega \in \mathfrak{R}$. Пусть u – решение задачи Пуассона $\Delta u = f$ на Ω , $u = 0$ на Ω' и $f \in L_2(\Omega)$. Пусть a_k^{ij} – ограниченные измеримые функции на Ω . Пусть, далее, оператор A является эллиптическим в области Ω .

Тогда $u \in *W_2^{(2)}(\Omega)$ и существует постоянная C такая, что

$$|u|_{*W} \leq C|f|_{L_2}.$$

Доказательство является точным повторением доказательства теоремы 20 работы [1], если воспользоваться соответствующими теоремами для K , которая является выпуклой областью, и мы его не будем повторять.

Литература

- [1] Ян Кадлец: О регулярности решения задачи Пуассона на области с границей подобной границе куба. Чехосл. мат. журн., 13 (88), 1963, 599—611.
- [2] И. Бабушка: Устойчивость областей определения по отношению к основным задачам теории дифференциальных уравнений в частных производных, главным образом в связи с теорией упругости. Чехосл. мат. журн. 11 (86), 1961, 76—165.
- [3] А. И. Кошелев: Априорные оценки в L_p и обобщенные решения эллиптических уравнений и систем. Успехи мат. науке XII, вып. 4, 1958, 29—86.
- [4] О. А. Ладыженская: Об интегральных оценках, сходимости приближенных методов и решений в функционалах для линейных эллиптических операторов. Вестник Ленинград. Унив., 1958, № 7, 60—69.
- [5] E. Magenes, G. Stampacchia: I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico. Annali di Pisa, Ser. III., Vol. XII., Fasc. III (1958), 247—357.
- [6] А. И. Мальцев: Основы линейной алгебры. Москва 1948.
- [7] Й. Нечас: О решениях эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с неограниченным интегралом Дирихле. Чехосл. мат. журн. 10 (85), 1960, 283—298.
- [8] L. Nirenberg: Remarks on Strongly Elliptic Partial Differential Equations. Communications on Pure and Applied Mathematics, VIII, 1955, 649—675.
- [9] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов: Функциональный анализ в нормированных пространствах. Москва 1959.

Summary

ON THE REGULARITY OF THE SOLUTION OF THE POISSON PROBLEM ON A DOMAIN WITH BOUNDARY LOCALLY SIMILAR TO THE BOUNDARY OF A CONVEX OPEN SET

JAN KADLEC, Praha

In this paper, it is proved that the solution of the elliptic differential equation of the second order

$$-(a^{ij}u_i)'_j = f$$

with the boundary condition $u = 0$ on Ω' , where $a^{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha\delta^{ij}\xi_i\xi_j$ ($\alpha > 0$) for all ξ_i , coefficients a^{ij} fulfil a Lipschitz condition on Ω and $f \in L_2(\Omega)$, has all derivatives of the second order and these derivatives are square integrable on Ω if the following conditions hold:

To each point $X \in \Omega'$ there exist a neighbourhood \mathcal{U} of X and a one-to-one regular transformation T of \mathcal{U} on a domain \mathcal{V} such that $T(\mathcal{U} \cap \Omega)$ is a convex set and all the second order derivatives of T are bounded on \mathcal{U} .