Zdeněk Hustý

Über die Transformation und Äquivalenz homogener linearer Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung. I. Transformation regulärer Gleichungen Vorbemerkungen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 15 (1965), No. 4, 479,480–502

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100689

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Математический институт Чехословацкой Академии наук
Т. *15* (*90*) ПРАГА 19. XI. 1965 г., No 4

ÜBER DIE TRANSFORMATION UND ÄQUIVALENZ HOMOGENER LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN VON HÖHERER ALS DER ZWEITEN ORDNUNG

ZDENĚK HUSTÝ, Brno

(Eingelangt am 18. Januar 1962, in neuer umgearbeiteter Form am 3. Juli 1964.)

Diese Arbeit besteht aus drei Teilen. Im ersten Teil wird die Transformation homogener linearer Differentialgleichungen — kurz Gleichungen — studiert. Wenn wir in der Gleichung

$$\text{(a)} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k y^{(n-k)} = 0 \,,$$

$x \in I_{1x}$, die Substitutionen $y = uz$, $t = T(x)$ verwenden, wo die Funktionen $u(x)$, $T(x)$ gewiße Eigenschaften besitzen, erhalten wir eine Gleichung ($\bar{a}$), die wir das Bild der Gleichung (a) in I_{1x} der Koordinaten $T(x)$, $u(x)$ nennen. Die Menge aller Bilder der Gleichung (a) im Intervall I_{1x} bezeichnen wir mit dem Symbol $O_a(I_{1x})$. In der vorliegenden Arbeit werden die Eigenschaften der Menge $O_a(I_{1x})$ studiert. Von wesentlicher Bedeutung in der Theorie der Transformation sind gewiße Polynome mit Dimension, deren Eigenschaften in dieser Arbeit angeführt werden. Der zweite Teil beschäftigt sich mit der Äquivalenz regulärer Gleichungen. Im dritten Teil werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Äquivalenz regulärer Gleichungen mit stetiger Dimension abgeleitet, die ohne Beweis in einigen Arbeiten von Mathematikern des 19. Jahrhunderts angeführt sind.

I. TEIL. TRANSFORMATION REGULÄRER GLEICHUNGEN

VORBEMERKUNGEN

Anstatt „homogene lineare Differentialgleichung“ sagen wir kurz „Gleichung“. Die Symbole f', $f^{(n)}$ $[\dot{f}, f^{[n]}]$ bedeuten die Ableitungen der Funktion f nach x oder ξ $[t$ oder $\tau]$. Die Funktion $x = T_{-1}(t)$ ist die zu $t = T(x)$ inverse Funktion. Insofern kein Mißverständnis zu befürchten ist, werden wir kurz „T“ statt „$T(x)$“ schreiben. Ist q eine nichtnegative ganze Zahl, so bedeutet das Symbol $T(x) \in C_q(I_1)$, daß die

Funktion $T^{(q)}$ im Intervall I_1 stetig ist. Mit E_1 bezeichnen wir die Menge aller (endlichen) reellen Zahlen.

Bemerkungen 0.1. a) Es sei $T(x) \in C_3(I_1)$, $T' \neq 0$ in I_1. Der Ausdruck $\{T, x\} = \frac{1}{2}(T'''/T') - \frac{3}{4}(T''/T')^2$, $x \in I_1$, heißt die Schwarzsche Ableitung der Funktion $T(x)$ nach x im Intervall I_1.

b) Es habe $t = T(x)$ die in der Bemerkung a) angeführten Eigenschaften, $t_0 = T(x_0)$, $x_0 \in I_1$. So ist

$$(0.1) \qquad \left[\frac{\{T, x\}}{T'}\right]_{x=x_0} = -\left[\frac{\{T_{-1}, t\}}{\dot{T}_{-1}}\right]_{t=t_0} .$$

c) Es sei $X(t) \in C_3(I_2)$, $\dot{X} \neq 0$ in I_2, wo $I_2 = T(I_1)$. Dann gilt für die Schwarzsche Ableitung der Funktion $X[T(x)]$ nach x die Formel

$$(0.2) \qquad \{X, x\} = \{X, t\}\, T'^2 + \{T, x\}, \quad x \in I_1 ,$$

wo $t = T(x)$ gesetzt wird.

Unter *einer allgemeinen Gleichung* versteht man den Ausdruck

$$(\mathrm{a}) \qquad \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i(x)\, y^{(n-i)}(x) = 0 \quad a_i \in C_0(I_1),\ i = 0, 1, \ldots, n,\ a_0(x) \not\equiv 0 .$$

Wenn der Koeffizient $a_0(x)$ in I_1 eine Nullstelle hat, so ist (a) *eine singuläre Gleichung*. Die Gleichung (a) ist im Intervall I_1 *regulär*, wenn $a_i/a_0 \in C_0(I_1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ist $a_0 \neq 0$, so ist die Gleichung (a) regulär. Wenn $a_0 \equiv 1$ ($a_1 \equiv 0$) [$a_i \equiv 0$, $i = 1, 2$], so wird die Gleichung (a) *normale* (*halbkanonische*) [*kanonische*] Gleichung genannt. Ist die Gleichung (a) in I_1 regulär, so wird

$$y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \frac{a_i}{a_0} y^{(n-i)} = 0$$

die Normalform der Gleichung (a) genannt. Die Normalform der Gleichung (a) bezeichnen wir mit dem Symbol (a_n). Der Koeffizient a_i wird auch der i-te Koeffizient genannt.

Es sei die Gleichung

$$(\mathrm{b}) \qquad \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b_i(x)\, y^{(n-i)}(x) = 0$$

in I_2 definiert und es sei $I = I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$. Die Gleichungen (a), (b) sind in I identisch, wenn $a_i(x) \equiv b_i(x)$, $x \in I$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Bezeichnung: (a) = (b), $x \in I$. Es sei (a) [(b)] in I_1 [I_2] regulär. Die Gleichungen (a), (b) sind in I quasiidentisch, wenn sie in I dasselbe Hauptsystem haben. Bezeichnung: (a) $\doteq$ (b), $x \in I$.

Bemerkungen 0.2. a) (a) $\doteq$ (b) $\Leftrightarrow$ eine beliebige Lösung von (a) in I auch eine Lösung der Gleichung (b) ist.

b) (a) $\doteq$ (b), $x \in I \Leftrightarrow (\mathrm{a}_n) = (\mathrm{b}_n)$, $x \in I$.

c) (a) $\doteq$ (a), $x \in I$; (a) $\doteq$ (b), $x \in I \Rightarrow$ (b) $\doteq$ (a), $x \in I$; (a) $\doteq$ (b), (b) $\doteq$ (c), $x \in I \Rightarrow$ $\Rightarrow$ (a) $\doteq$ (c), $x \in I$.

1. DIMENSION

Definition 1,1. Eine zweigliedrige Folge $[f(x), i]$, wo $f(x) \in C_0(I_1)$ und i eine ganze nichtnegative Zahl ist, nennt man eine *Funktion mit Dimension*. Die Zahl i ist die Dimension der Funktion $f(x)$.

Für Funktionen mit Dimension gelten folgende Operationen:

1° $[f(x), i] = [g(x), k] \Leftrightarrow f(x) \equiv g(x)$ in I_1, $i = k$;

2° $0 \neq c \in E_1$, $c[f(x), i] = [c\, f(x), i]$;

3° $[f(x), i] \, . \, [g(x), k] = [f(x) \, . \, g(x), i + k]$;

4° $i \geqq k$, $g(x) \neq 0$ in I_1, $[f(x), i] : [g(x), k] = \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}, i - k\right]$;

5° $[f(x), i] + [g(x), i] = [f(x) + g(x), i]$;

6° $f(x) \in C_1(I_1)$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} [f(x), i] = \left[\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}, i + 1\right]$.

Die Dimension bei den Funktionen mit Dimension bezeichnen wir nicht; statt $[f(x), i]$ schreiben wir kurz $f(x)$. Oftmals wählen wir eine derartige Bezeichnung der Funktion mit Dimension mit Hilfe eines Indexes, so daß der Index gleichzeitig die Dimension bezeichnet.

Es sei $p_i(x) \in C_n(I_1)$ eine Funktion mit Dimension i,

$$i \leqq k \, , \quad k - i \leqq n \, . \tag{1,1}$$

Die Funktion mit Dimension k

$$f_k(p_i) = \sum_{j=1}^{r} c_j(p_i)^{s_{j,0}} (p_i')^{s_{j,1}} \dots (p_i^{(k-i)})^{s_{j,k-i}} \, , \quad c_j \in E_1 \, , \quad j = 1, 2, \dots, r \, , \tag{1,2}$$

wobei $s_{j,0} \, . \, i + s_{j,1}(i + 1) + \dots + s_{j,k-i}k = k$ ist, nennen wir *ein Polynom des Elementes p_i mit Dimension k*. Die Zahl $N_j = \sum_{v=0}^{k-i} s_{j,v}$ wird Grad des j-ten Gliedes und die Zahl $N = \max \{N_1, N_2, \dots, N_r\}$ Grad des Polynoms (1,2) genannt. Ist $i \geqq 1$, so gilt $N \leqq [k/i]$. Die höchste Ordnung M der Ableitung von p_i, die in (1,2) vorkommt, wird Ordnung des Polynoms (1,2) genannt. Es ist immer $M \leqq k - i$.

Es sei ferner $p_j(x) \in C_m(I_1)$ eine Funktion mit Dimension und es gelte (1,1), $j \leqq k$, $k - j \leqq m$. Die Funktion

$$f_k(p_i, p_j) = \sum_{v=1}^{q} c_v(p_i)^{s_{v,0}} (p_i')^{s_{v,1}} \dots (p_i^{(k-i)})^{s_{v,k-i}} (p_j)^{\sigma_{v,0}} \, .$$
$$. \, (p_j')^{\sigma_{v,1}} \dots (p_j^{(k-j)})^{\sigma_{v,k-j}} \, , \quad c_v \in E_1 \, , \quad v = 1, 2, \dots, q \, , \tag{1,3}$$

wobei $s_{\nu,0} \cdot i + s_{\nu,1}(i+1) + \ldots + s_{\nu,k-i}k + \sigma_{\nu,0}j + \sigma_{\nu,1}(j+1) + \ldots \sigma_{\nu,k-j}k = k$ ist, nennen wir ein *Polynom der Elemente p_i, p_j mit Dimension k*. Ähnlich wie in (1,2) wird der Grad und die Ordnung des Polynoms (1,3) eingeführt.

Entsprechend können wir den Begriff eines Polynoms der Elemente $p_i, p_j, p_s, \ldots, p_q$ mit Dimension k definieren.

Definition 1,2. Die Gleichung (a) wird eine *Gleichung mit Dimension* genannt, falls der Koeffizient $a_i(x)$ die Dimension i, $i = 0, 1, \ldots, n$ und die Funktion $y(x)$ die Dimension Null hat.

Gemäß der Definition 1,2 hat jedes Glied in der Gleichung (a) die Dimension n; daher sagen wir, daß jede Gleichung n-ter Ordnung mit Dimension die Dimension n hat.

Definition 1,3. Der Koeffizient a_i der Gleichung mit Dimension (a) hat in I_1 die *stetige Dimension*, falls $a_i \in C_{n-i}(I_1)$ ist.

Definition 1,4. Die Gleichung (a) wird *reguläre Gleichung mit stetiger Dimension* in I_1 genannt, falls $a_i/a_0 \in C_{n-i}(I_1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ist.

2. POLYNOME MIT DIMENSION

2,1. POLYNOM φ

Es sei $t = T(x) \in C_n(I_1)$, $T'(x) \neq 0$ in I_1 und es habe $T'(x)$ die Dimension 0. Dann hat die Funktion

$$\eta = \frac{T''}{T'} \in C_{n-2}(I_1) \tag{2,1.1}$$

die Dimension 1 und wir schreiben $T(I_1) = I_2$.

Hilfssatz 2,1.1. *Es sei die Funktion* $Z(x) \in C_n(I_1)$,

$$z(t) = Z[T_{-1}(t)]\,, \quad t \in I_2\,. \tag{2,1.2}$$

Dann ist

$$z(t) \in C_n(I_2)\,, \tag{2,1.3}$$

$$Z^{(m)}(x) = \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} \varphi_\mu^m(\eta)\, [T'(x)]^{m-\mu}\, z^{[m-\mu]}\,(t)\,, \quad x \in I_1\,, \tag{2,1.4}$$

$$\varphi_0^m = 1\,, \quad \varphi_s^s = \varphi_\nu^m = 0\,, \quad s = 1, 2, \ldots\,; \quad m = 0, 1, \ldots, n\,; \tag{2,1.5}$$
$$\nu = \ldots, -2, -1, m+1, m+2, \ldots\,,$$

wo $\varphi_\mu^m(\eta)$ das m-te Polynom des Elementes η mit Dimension μ, der Ordnung $\mu - 1$, des Grades μ ist. Die Funktion $\binom{m}{\mu}\varphi_\mu^m(\eta)$ ist eine Lösung der Differenzengleichung

$$\binom{m+1}{\mu}\varphi_\mu^{m+1}(\eta) = \binom{m}{\mu}\varphi_\mu^m(\eta) + \tag{2,1.6}$$

$$+ (m + 1 - \mu)\binom{m}{\mu - 1}\eta\,\varphi_{\mu-1}^m(\eta) + \binom{m}{\mu-1}[\varphi_{\mu-1}^m(\eta)]' ,$$

$$x \in I_1 , \quad m = 1, 2, \ldots, n ; \qquad \mu = 0, 1, \ldots, m - 1 .$$

Die Behauptung (2,1.3) ist bekannt. Die Formeln (2,1.4)–(2,1.6) werden mittels Induktion in bezug auf m bewiesen.

Bemerkungen 2,1.2. a) Nach (2,1.6) ist

$$\binom{m}{\mu}\varphi_\mu^m(\eta) = \eta\sum(m + 1 - \mu)\binom{m}{\mu - 1}\varphi_{\mu-1}^m(\eta) + \tag{2,1.7}$$

$$+ \sum\binom{m}{\mu - 1}[\varphi_{\mu-1}^m(\eta)]' + c_\mu ,$$

$$m = 1, 2, \ldots, n , \quad \mu = 0, 1, \ldots, m - 1 ,$$

wo $c_0 = 1$, $c_\mu = 0$ für $\mu \geqq 1$.

b) Aus (2,1.7) folgt

$$\varphi_1^m(\eta) = \frac{m-1}{2}\eta , \quad \varphi_2^m(\eta) = \frac{m-2}{3}\left(\frac{3m-5}{4}\eta^2 + \eta'\right) . \tag{2,1.8}$$

Hilfssatz 2,1.3. *Es habe die Funktion $A(x) \in C_{n-2}(I_1)$ die Dimension 2,*

$$\eta' = \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{6}{n+1}A , \quad x \in I_1 . \tag{2,1.9}$$

Dann ist

$$\binom{m}{\mu}\varphi_\mu^m(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\mu}\eta^{\mu-\nu}f_\nu^{m,\mu}(A) , \quad x \in I_1 , \quad m = 0, 1, \ldots, n , \tag{2,1.10}$$

$$f_0^{0,0} = 1 , \; f_1^{m,\mu} = f_{-s}^{m,\mu} = f_{\mu+s}^{m,\mu} = f_\mu^{m,m-1+s} = f_\mu^{m,-s} = 0 , \tag{2,1.11}$$

$$m = 1, 2, \ldots, n ; \; \mu = 0, 1, \ldots, m - 1 ; \; s = 1, 2, \ldots,$$

wo $f_\nu^{m,\mu}(A)$ für gegebenes m das μ-te Polynom des Elementes A mit Dimension ν, der Ordnung höchstens $\nu - 2$, des Grades höchstens $[\nu/2]$ ist, das der Differenzen-

gleichung

$$(2,1.12)\qquad f_\nu^{m+1,\mu}(A) = f_\nu^{m,\mu}(A) + \frac{2m+1-\mu-\nu}{2} f_\nu^{m,\mu-1}(A) + \\ + \frac{6(\mu-\nu+1)}{n+1} A f_{\nu-2}^{m,\mu-1}(A) + [f_{\nu-1}^{m,\mu-1}(A)]', \quad x \in I_1, \\ m = 1, 2, \ldots, n;\ \mu = 0, 1, \ldots, m-1;\ \nu = 0, 2, 3, \ldots, \mu$$

genügt.

Die Formeln (2,1.10)–(2,1.12) werden mittels Induktion in bezug auf m vermöge (2,1.8), (2,1.6) und (2,1.9) bewiesen.

Bemerkungen 2,1.4. a) Nach (2,1.12) ist

$$(2,1.13)\qquad f_\nu^{m,\mu}(A) = \sum \frac{2m+1-\mu-\nu}{2} f_\nu^{m,\mu-1}(A) + \\ + \frac{6(\mu-\nu+1)}{n+1} A \sum f_{\nu-2}^{m,\mu-1}(A) + \sum [f_{\nu-1}^{m,\mu-1}(A)]' + c_\mu, \\ m = 1, 2, \ldots, n;\ \mu = 0, 1, \ldots, m-1;\ \nu = 0, 2, 3, \ldots, \mu,$$

wo $c_0 = 1$, $c_\mu = 0$ für $\mu \geqq 1$.

b) Gemäß (2,1.13), (2,1.11) ist

$$(2,1.14)\qquad f_0^{m,0}(A) = 1, \quad m = 0, 1, \ldots, n.$$

c) Nach (2,1.12) ist

$$(2,1.15)\qquad f_0^{m+1,\mu}(A) = f_0^{m,\mu}(A) + \frac{2m+1-\mu}{2} f_0^{m,\mu-1}(A), \\ \mu = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Hilfssatz 2,1.5. Für $\mu = 0, 1, \ldots, m-1$ gilt

$$(2,1.16)\qquad f_0^{m,\mu}(A) = \binom{m}{\mu}\binom{m-1}{\mu} \mu!\, 2^{-\mu}.$$

Die Formel (2,1.16) wird mittels Induktion in bezug auf m vermöge (2,1.14), (2,1.15) bewiesen.

Bemerkungen 2,1.6. a) Nach (2,1.13) ist

$$(2,1.17)\qquad f_\mu^{m,\mu}(A) = \frac{6}{n+1} A \sum f_{\mu-2}^{m,\mu-1}(A) + \sum [f_{\mu-1}^{m,\mu-1}(A)]', \\ \mu = 2, 3, \ldots, m-1.$$

b) Vermöge (2,1.17), (2,1.16) beweisen wir mittels Induktion in bezug auf m, daß

(2,1.18) $$f_\mu^{m,\mu}(A) = \binom{m}{\mu+1}\frac{6}{n+1}A^{(\mu-2)} + \dots,$$
$$\mu = 2, 3, \dots, m-1 .$$

gilt.

2.2. POLYNOM χ

Es sei $u(x) \in C_n(I_1)$, $u(x) \neq 0$ in I_1 und es habe $u(x)$ die Dimension 0. Dann hat die Funktion

(2,2.1) $$\zeta = \frac{u'}{u} \in C_{n-1}(I_1)$$

die Dimension 1.

Hilfssatz 2,2.1. *Es gelten die Gleichungen*

(2,2.2) $$u^{(k)} = u\,\chi_k(\zeta)\,,\ \chi_0(\zeta) = 1\,,\quad k = 0, 1, \dots, n\,,\ x \in I_1\,,$$

(2,2.3) $$\chi_k(\zeta) = \zeta\,\chi_{k-1}(\zeta) + \chi'_{k-1}(\zeta)\,,\quad k = 1, 2, \dots, n\,,$$

wo $\chi_k(\zeta)$ das Polynom des Elementes ζ mit Dimension k, der Ordnung $k-1$, des Grades k ist.

Die Formeln (2,2.2), (2,2.3) werden mittels Induktion bewiesen.

Hilfssatz 2,2.2. *Es seien $u, v \in C_n(I_1)$ und es haben die Dimension* 0. *Dann ist*

(2,2.4) $$\chi_k(u+v) = \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\chi_{k-\nu}(u)\,\chi_\nu(v)\,,\quad k = 0, 1, \dots, n\,,\ x \in I_1\,.$$

Die Formel (2,2.4) wird mittels Induktion vermöge (2,2.3) bewiesen.

Bemerkung 2,2.3. Aus (2,2.3) folgt

(2,2.5) $$\chi_1(\zeta) = \zeta\,,\quad \chi_2(\zeta) = \zeta^2 + \zeta'\,.$$

Hilfssatz 2,2.4. *Es gelte* (2,1.9). *Dann ist*

(2,2.6) $$\chi_k\left(-\frac{n-1}{2}\eta\right) = \sum_{\mu=0}^{k}\eta^{k-\mu}h_\mu^k(A)\,,\qquad x \in I_1\,,\ k = 0, 1, \dots, n\,,$$
$$h_0^0(A) = 1\,,\ h_1^k(A) = h_{-s}^k(A) = h_{k+s}^k(A) = 0\,,\quad k = 1, 2, \dots, n\,,\ s = 1, 2, \dots\,,$$

wo $h_\mu^k(A)$ das k-te Polynom des Elementes A mit Dimension μ, der Ordnung höchstens

$\mu - 2$, *des Grades höchstens* $[\mu/2]$ *ist, das der Differenzengleichung*

$$(2,2.7) \qquad h^k_\mu(A) = -\frac{n + \mu - k}{2} h^{k-1}_\mu(A) + \frac{6(k - \mu + 1)}{n + 1} A\, h^{k-1}_{\mu-2}(A) + \\ + [h^{k-1}_{\mu-1}(A)]', \quad x \in I_1, \\ k = 1, 2, \dots, n; \; \mu = 0, 2, 3, \dots, k$$

genügt.

Die Formel (2,2.7) wird mittels Induktion in bezug auf m vermöge (2,2.5), (2,2.3) und (2,1.9) bewiesen.

Bemerkung 2,2.5. Nach (2,2.7) ist

$$(2,2.8) \qquad h^k_0(A) = -\frac{n - k}{2} h^{k-1}_0(A), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$(2,2.9) \qquad h^k_k(A) = \frac{6}{n + 1} A h^{k-1}_{k-2}(A) + [h^{k-1}_{k-1}(A)]', \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Hilfssatz 2,2.6. *Es gelten die Gleichungen*

$$(2,2.10) \qquad h^n_0(A) = 0,$$

$$(2,2.11) \qquad h^k_0(A) = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \binom{n-1}{k} k!, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Beweis. Wenn wir in (2,2.8) $k = n$ setzen, erhalten wir (2,2.10). Die Formel (2,2.11) wird mittels Induktion vermöge (2,2.8), (2,2.6) bewiesen.

Nach (2,2.9), (2,2.11) ist

$$(2,2.12) \qquad h^k_k(A) = -3 \frac{n - 1}{n + 1} A^{(k-2)} + \dots, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

2,3. POLYNOM Φ

Es seien $T(x)$, $u(x)$, $\zeta(x)$, $\eta(x)$, $Z(x)$, $z(t)$ Funktionen mit den in 2,1 und 2,2 angeführten Eigenschaften.

Hilfssatz 2,3.1. *Es gelten die Gleichungen*

$$(2,3.1) \qquad \binom{n}{k} [u(x)\, Z(x)]^{(n-k)} = u(x) \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \binom{i}{k} [T'(x)]^{n-i} \cdot \\ z^{[n-i]}(t)\, \Phi^{n,i}_{i-k}(\eta, \zeta), \quad x \in I_1, \\ k = 0, 1, \dots, n,$$

wo $\Phi^{n,i}_{i-k}(\eta, \zeta)$ *für gegebenes* n *das* i*-te Polynom der Elemente* η, ζ *mit Dimension* $i - k$, *der Ordnung* $i - k - 1$, *des Grades* $i - k$ *ist, das der Gleichung*

$$\Phi^{n,i}_{i-k}(\eta, \zeta) = \sum_{j=k}^{i} \binom{i-k}{j-k} \varphi^{n-j}_{i-j}(\eta)\, \chi_{j-k}(\zeta)\,, \tag{2,3.2}$$

$$i = 0, 1, \ldots, n\,;\; k = 0, 1, \ldots, i\,,\; x \in I_1$$

entspricht.

Beweis. Nach (2,2.2), (2,1.4) ist $\binom{n}{k}(uZ)^{(n-k)} = \binom{n}{k}\sum_{\nu=0}^{n-k}\binom{n-k}{\nu} u^{(n-k-\nu)} Z^{(\nu)} = = u\binom{n}{k}\sum_{\nu=0}^{n-k}\binom{n-k}{\nu}\chi_{n-k-\nu}(\zeta)\sum_{\mu=0}^{\nu}\binom{\nu}{\mu}\varphi^{\nu}_{\mu}(\eta)\,.\,(T')^{\nu-\mu} z^{[\nu-\mu]}$. Wenn wir $\nu = n - j$, $\mu = i - j$, $\binom{n}{k}\binom{n-k}{n-j}\binom{n-j}{i-j} = \binom{n}{i}\binom{i}{k}\binom{i-k}{j-k}$ setzen, so können wir die letzte Gleichung auf die Form $\binom{n}{k}(uZ)^{(n-k)} = u\sum_{j=k}^{n}\sum_{i=j}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}\binom{i-k}{j-k}\chi_{j-k}(\zeta)\,\varphi^{n-j}_{i-j}(\eta)\,.$ $.\,(T')^{n-i} z^{[n-i]} = u\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}(T')^{n-i} z^{[n-i]}\,.\,\sum_{j=k}^{i}\binom{i-k}{j-k}\varphi^{n-j}_{i-j}(\eta)\,\chi_{j-k}(\zeta)$ bringen. Daraus folgt (2,3.1) nach (2,3.2).

Bemerkungen 2,3.2. a) Nach (2,1.5) ist

$$\Phi^{n,n}_{n-k}(\eta, \zeta) = \chi_{n-k}(\zeta)\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n\,,\; x \in I_1\,. \tag{2,3.3}$$

b) Mittels (2,1.5), (2,1.8), (2,2.2), (2,2.5), (2,3.2) erhalten wir die Formeln

$$\Phi^{n,i}_{0}(\eta, \zeta) = 1\,, \quad \Phi^{n,i}_{1}(\eta, \zeta) = \frac{n-i}{2}\eta + \zeta\,, \quad \Phi^{n,i}_{2}(\eta, \zeta) = \tag{2,3.4}$$

$$= \frac{(n-i)(3n-3i+1)}{12}\eta^2 + (n-1)\left(\tfrac{1}{3}\eta' + \eta\zeta\right) + \zeta^2 + \zeta'\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n\,.$$

c) Wenn wir $\Phi^{n,i}_{i-k}(\eta) = \Phi^{n,i}_{i-k}(\eta, -(n-1)/2\,.\,\eta)$ setzen, so ist nach (2,3.2), (2,3.4)

$$\Phi^{n,i}_{i-k}(\eta) = \sum_{j=k}^{i}\binom{i-k}{j-k}\varphi^{n-j}_{i-j}(\eta)\,\chi_{j-k}\left(-\frac{n-1}{2}\eta\right), \quad x \in I_1\,, \tag{2,3.5}$$

$$\Phi^{n,i}_{0}(\eta) = 1\,, \quad \Phi^{n,i}_{1}(\eta) = -\frac{i-1}{2}\eta\,, \quad \Phi^{n,i}_{2}(\eta) = \tag{2,3.6}$$

$$= \frac{n + 3i^2 - 7i + 3}{12}\eta^2 - \frac{n + 2i - 3}{6}\eta'\,.$$

Hilfssatz 2,3.3. *Es seien p, q, r ganze Zahlen. Wenn sie die Ungleichungen*

$$p - 1 \geqq q \geqq r \geqq 0\,, \tag{2,3.7}$$

erfüllen, so ist

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{p}{s} \binom{q-s}{r-s} = (-1)^r \binom{p+r-q-1}{r}. \tag{2,3.8}$$

Wenn

$$p = q \geqq r \geqq 1\,, \tag{2,3.9}$$

gilt, so ist

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{p}{s} \binom{q-s}{r-s} = 0\,. \tag{2,3.10}$$

Die Formeln (2,3.8), (2,3.10) werden mittels Induktion in bezug auf q bewiesen.

Hilfssatz 2,3.4. *Es gelte* (2,1.9). *Dann ist*

$$\Phi^{n,i}_{i-k}(\eta) = \frac{1}{\binom{n-k}{n-i}} \sum_{\varrho=0}^{i-k} \eta^{i-k-\varrho} F^{n,i,k}_{\varrho}(A)\,, \quad F^{n,i,i}_0(A) = 1\,, \tag{2,3.11}$$
$$x \in I_1\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n\,; \quad k = 0, 1, \ldots, i\,,$$

wo $F^{n,i,k}_{\varrho}(A)$ für gegebene n, i das k-te Polynom des Elementes A mit Dimension ϱ, der Ordnung höchstens $\varrho - 2$, des Grades höchstens $[\varrho/2]$ ist, das den Gleichungen

$$F^{n,i,k}_{\varrho}(A) = \sum_{\nu=0}^{\varrho} \sum_{j=k}^{i} \binom{n-k}{j-k} f^{n-j,i-j}_{\nu}(A)\, h^{j-k}_{\varrho-\nu}(A)\,, \tag{2,3.12}$$
$$i = 1, 2, \ldots, n-1\,; \quad k = 0, 1, \ldots, i\,; \quad \varrho = 0, 1, \ldots, i-k\,,$$

$$F^{n,n,k}_{\varrho}(A) = h^{n-k}_{\varrho}(A)\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n\,; \quad \varrho = 0, 1, \ldots, n-k \tag{2,3.13}$$

entspricht.

Die Formeln (2,3.11)–(2,3.13) werden mittels (2,3.5), (2,3.3), (2,1.10), (2,1.11), (2,2.6) bewiesen.

Hilfssatz 2,3.5. *Es gelten die Formeln*

$$F^{n,i,k}_0(A) = \binom{n-k}{n-i} \left(-\frac{1}{2}\right)^{i-k} \binom{i-1}{i-k} (i-k)!\,, \tag{2,3.14}$$
$$i = 1, 2, \ldots, n\,; \quad k = 1, 2, \ldots, i\,,$$

$$F^{n,i,0}_0(A) = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{2,3.15}$$

Beweis. Nach (2,3.12), (2,3.13) ist

$$F_0^{n,i,k}(A) = \sum_{j=k}^{i} \binom{n-k}{j-k} f_0^{n-j,i-j}(A)\, h_0^{j-k}(A)\,, \tag{2,3.16}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n - 1\,;\ k = 0, 1, \ldots, i\,,$$

$$F_0^{n,n,k}(A) = h_0^{n-k}(A)\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n\,. \tag{2,3.17}$$

Wenn wir (2,1.16), (2,2.10), (2,2.11) in (2,3.16), (2,3.17) einsetzen, erhalten wir

$$F_0^{n,i,k}(A) = \frac{(n-k)!}{(n-i)!\,2^{i-k}} \sum_{j=k}^{i} (-1)^{j-k} \binom{n-1}{j-k} \binom{n-j-1}{i-j}, \tag{2,3.18}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n - 1\,;\ k = 0, 1, \ldots, i\,,$$

$$F_0^{n,n,k}(A) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k} \binom{n-1}{n-k} (n-k)!\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{2,3.19}$$

$$F_0^{n,n,0}(A) = 0\,. \tag{2,3.20}$$

Wenn wir in (2,3.18) $s = j - k$ setzen, erhalten wir

$$F_0^{n,i,k}(A) = \frac{(n-k)!}{(n-i)!\,2^{i-k}} \sum_{s=0}^{i-k} (-1)^s \binom{n-1}{s} \binom{n-k-1-s}{i-k-s}, \tag{2,3.21}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n - 1\,;\ k = 0, 1, \ldots, i\,.$$

Setzen wir $p = n - 1$, $q = n - 1 - k$, $r = i - k$, so gelten für $k \geqq 1$ [$k = 0$] die Ungleichungen (2,3.7) [(2,3.9)]. Wenn wir die Formeln (2,3.8), (2,3.10) auf (2,3.21) anwenden, erhalten wir

$$F_0^{n,i,k}(A) = \frac{(n-k)!}{(n-i)!} \left(-\frac{1}{2}\right)^{i-k} \binom{i-1}{i-k}, \quad i = 1, 2, \ldots, n - 1\,, \tag{2,3.22}$$

$$k = 1, 2, \ldots, i\,.$$

$$F_0^{n,i,0}(A) = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n - 1\,. \tag{2,3.23}$$

Nach (2,3.22), (2,3.19) gilt (2,3.14), nach (2,3.23), (2,3.20) gilt (2,3.15).

Bemerkung 2,3.6. Gemäß (2,3.12), (2,1.18), (2,2.12) ist

$$F_{i-k}^{n,i,k}(A) = \sum_{\nu=0}^{i-k} \sum_{j=k}^{i} \binom{n-k}{j-k} f_\nu^{n-j,i-j}(A)\, h_{i-k-\nu}^{j-k}(A) = \binom{n-k}{i-k} f_0^{n-i,0}(A)\,.$$

$$.\, h_{i-k}^{i-k}(A) + f_{i-k}^{n-k,i-k}(A)\, h_0^0(A) + \sum_{\nu=2}^{i-k-2} \binom{n-k}{i-k} f_\nu^{n-j,i-j}(A)\, h_{i-k-\nu}^{j-k}(A) =$$

$$= 3 \binom{n-k}{i-k} \frac{k(n-1) - (i-1)(n+1)}{(n+1)(i-k+1)} A^{(i-k-2)} + \ldots\,.$$

3. TRANSFORMATION

3,1. BILDER

Definition 3,1.1. Es sei $I_{1x} \neq \emptyset$ ein Intervall. Mit dem Symbol $M(I_{1x})$ bezeichnen wir die Menge, deren Elemente folgendermaßen definiert sind: ein geordnetes Paar von Funktionen $\{T(x), u(x)\} \in M(I_{1x})$, falls

$$T(x) \in C_n(I_{1x}), \quad T'(x) \neq 0 \text{ in } I_{1x}; \quad T'(x) \text{ hat die Dimension } 0, \tag{3,1.1}$$

$$u(x) \in C_n(I_{1x}), \quad u(x) \neq 0 \text{ in } I_{1x}; \quad u(x) \text{ hat die Dimension } 0. \tag{3,1.2}$$

Bemerkungen 3,1.2. a) Wenn $\bar{I}_{1x} \subset I_{1x}$, so ist $M(\bar{I}_{1x}) \supset M(I_{1x})$.

b) Es sei $\{T(x), u(x)\} \in M(I_{1x})$, so ist $\{T_{-1}(t), 1/(u[T_{-1}(t)])\} \in M(I_{2t})$, wo

$$T(I_{1x}) = I_{2t}. \tag{3,1.3}$$

c) $\{T(x), u(x)\} \in M(I_{1x}), \{X(t), u_1(t)\} \in M(I_{2t}) \Rightarrow \{X[T(x)], u(x)\, u_1[T(x)]\} \in M(I_{1x})$.

Es sei

$$L[y(x)] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k(x)\, y^{(n-k)}(x) = 0 \tag{a}$$

eine reguläre Gleichung mit Dimension im Intervall I_1 und es sei $I_{1x} \subset I_1$. Wählen wir das Element $\{T(x), u(x)\} \in M(I_{1x})$. Wenn wir in der Gleichung (a) die Substitution

$$y(x) = u(x)\, Z(x) \tag{I}$$

verwenden, so erhalten wir eine Gleichung von der Gestalt

$$\tilde{L}[Z(x)] = 0. \tag{ã}$$

Wenn wir ferner in der Gleichung (ã) die Substitution

$$t = T(x) \tag{II}$$

verwenden, so erhalten wir die Gleichung

$$\bar{L}[z(t)] = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \bar{a}_i(t)\, z^{[n-i]}(t) = 0, \tag{ā}$$

wobei (2,1.2) gilt.

Definition 3,1.3. Die Gleichung (ā) wird das Bild der Gleichung (a) in I_{1x} der Koordinaten $T(x)$, $u(x)$ genannt und mit (ā) $\{T(x), u(x)\}$ bezeichnet.

Bemerkung 3,1.4. Die Funktion $T(x)$ $[u(x)]$ wird als erste [zweite] Koordinate des Bildes (ā) betrachtet.

Definition 3,1.5. Wenn die Gleichung ($\bar{a}$) halbkanonisch [kanonisch] ist, so nennen wir sie halbkanonisches [kanonisches] Bild.

Definition 3,1.6. Mit dem Symbol $O_a(I_{1x})$ $[P_a(I_{1x})]$ $\{K_a(I_{1x})\}$ bezeichnen wir die Menge aller Bilder [halbkanonischer Bilder] {kanonischer Bilder} der Gleichung (a) in I_{1x}, deren Koordinaten Elemente der Menge $M(I_{1x})$ sind.

Bemerkungen 3,1.7. a) $K_a(I_{1x}) \subset P_a(I_{1x}) \subset O_a(I_{1x})$.

b) Die Menge $M(I_{1x})$ $[O_a(I_{1x})]$ werden wir die Menge der Koordinaten [der Bilder] nennen.

c) $\bar{I}_{1x} \subset I_{1x} \Rightarrow O_a(\bar{I}_{1x}) \supset O_a(I_{1x})$.

d) (a) $\{x, 1\} \in O_a(I_{1x})$.

Definition 3,1.8. Es seien $\{T(x), u(x)\} \in M(I_{1x})$ die Koordinaten des Bildes ($\bar{a}$) $\in$ $\in O_a(I_{1x})$. Dann nennen wir die mittels der Formeln (2,1.1), (2,2.1) definierten Funktionen η, ζ die *transformierte Koordinaten* des Bildes ($\bar{a}$).

Hilfssatz 3,1.9. *Es gelte* (2,1.1), (2,2.1). *Die zweigliedrige Folge* $\{T(x), u(x)\}$ *ist genau dann ein Element von* $M(I_{1x})$, *wenn die Funktionen* η, ζ *die Dimension* 1 *haben und* $\eta \in C_{n-2}(I_{1x})$, $\zeta \in C_{n-1}(I_{1x})$ *gilt.*

Den Beweis kann man dem Leser überlassen.

Satz 3,1.10. *Das Bild* ($\bar{a}$) $\{T(x), u(x)\} \in O_a(I_{1x})$ *ist im Intervall* (3,1.3) *eine reguläre Gleichung mit Dimension, die sich in der Gestalt*

$$(\bar{a}) \qquad \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \bar{a}_i(t)\, z^{[n-i]}(t) = 0\,, \quad t \in I_{2t}$$

mit

$$(3{,}1.4) \qquad \bar{a}_i(t) = u(x)\,[T'(x)]^{n-i} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} a_k(x)\, \Phi^{n,i}_{i-k}\,[\eta(x), \zeta(x)]\,,$$

$$x = T_{-1}(t)\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

schreiben läßt, wo (2,1.1), (2,1.2), (2,2.1), (2,3.2) *gilt.*

Beweis. Die Transformationen (I), (II) überführen (a) in eine Gleichung, die wir mit Hilfe der Formel (2,3.1) auf die Form ($\bar{a}$) bringen können, wo (3,1.4) gilt. Nach dem Hilfssatz 3,1.9 ist $\eta \in C_{n-2}(I_{1x})$, $\zeta \in C_{n-1}(I_{1x})$, so daß gemäß (2,3.2), (2,3.3) $\Phi^{n,i}_{i-k}(\eta, \zeta) \in C_{n-i+k-1}(I_{1x}) \subset C_0(I_{1x})$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $k = 0, 1, \ldots, i$, $\Phi^{n,n}_{n-k}(\eta, \zeta) \in C_k(I_{1x}) \subset C_0(I_{1x})$, $k = 0, 1, \ldots, n$ ist und die Funktion

$$(3{,}1.5) \qquad \frac{a_k(x)}{a_0(x)}\, \Phi^{n,i}_{i-k}[\eta(x), \zeta(x)] \in C_0(I_{1x})$$

die Dimension i hat. Wenn wir in (3,1.5) $x = T_{-1}(t)$ setzen, dann schließen wir nach (3,1.4), (3,1.5), daß die Funktion $\bar{a}_i(t)$ die Dimension i hat und

$$(3,1.6) \qquad \frac{\bar{a}_i(t)}{\bar{a}_0(t)} = \frac{1}{[T'(x)]^i} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \frac{a_k(x)}{a_0(x)} \Phi_{i-k}^{n,i} [\eta, \zeta] \in C_0(I_{2t}), \quad x = T_{-1}(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

ist. Nach (I), (2,1.2) hat $z(t)$ die Dimension 0. Der Satz 3,1.10 ist somit bewiesen.

Folgerung. Jedes Element der Menge $O_a(I_{1x})$ hat in I_{1x} seine Normalform.

Hilfssatz 3,1.11. *Es sei* $a_k(x)/a_0(x) \in C_{n-k}(I_{1x})$, $k = 1, 2, \ldots, r$; $1 \leqq r \leqq n$, $(\bar{a})$ $\{T(x), u(x)\} \in O_a(I_{1x})$, *wo* $T(x) \in C_{n+1}(I_{1x})$. *Dann ist* $\bar{a}_i(t)/\bar{a}_0(t) \in C_{n-i}(I_{2t})$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Beweis. Nach dem Hilfssatz 3,1.9 ist $\eta, \zeta \in C_{n-1}(I_{1x})$, so daß $\Phi_{i-k}^{n,i}(\eta, \zeta) \in C_{n-i+k}(I_{1x}) \subset C_{n-i}(I_{1x})$, $i = 0, 1, \ldots, n$; $k = 0, 1, \ldots, i$ gilt und (3,1.5) eine Funktion der Klasse $C_{n-i}(I_{1x})$ für $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 0, 1, \ldots, i$ ist. Daraus folgt leicht nach (3,1.6) die Behauptung des Hilfssatzes 3,1.11.

Folgerung. Es sei (a) in I_{1x} eine reguläre Gleichung mit stetiger Dimension. Dann ist das Bild $(\bar{a})$ $\{T(x), u(x)\} \in O_a(I_{1x})$, wo $T(x) \in C_{n+1}(I_{1x})$, im Intervall (3,1.3) eine reguläre Gleichung mit stetiger Dimension.

Bemerkung 3,1.12. Wenn wir in (3.1.4) $i = 0, 1$ setzen, erhalten wir im Hinblick auf (2,3.4) die Beziehungen

$$(3,1.7) \qquad \bar{a}_0(t) = u(x) [T'(x)]^n a_0(x), \quad x = T_{-1}(t),$$

$$(3,1.8) \qquad \bar{a}_1(t) = u(x) [T'(x)]^{n-1} \left\{ a_0(x) \left[\frac{n-1}{2} \eta(x) + \zeta(x) \right] + a_1(x) \right\}, \quad x = T_{-1}(t).$$

Definition 3,1.13. Den Intervall (3,1.3) betrachten wir als Definitionsbereich des Bildes $(\bar{a})$ $\{T(x), u(x)\} \in O_a(I_{1x})$.

Definition 3,1.14. Zwei Bilder, die in ihren Definitionsbereichen quasiidentisch (identisch) sind, nennen wir *quasiidentische* (*identische*) *Bilder.*

Bemerkungen 3,1.15. a) Wenn $z(t)$ eine Lösung von $(\bar{a})$ ist, so ist gemäß (2,1.2), (I), (II) die Funktion $u(x) z[T(x)]$ in I_{1x} eine Lösung von (a).

b) Ist $y(x)$ eine Lösung von (a), so ist nach (2,1.2), (I), (II) die Funktion $(1/u[T_{-1}(t)])\, y[T_{-1}(t)]$ im Intervall (3,1.3) eine Lösung von $(\bar{a})$.

c) Ist $y(x) = u(x)\, z[T(x)]$, so gilt in I_{1x} $[I_{2t}]$ nach (2,3.1) die Formel

(3,1.9)
$$y^{(k)}(x) = u(x) \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} [T'(x)]^j \, z^{[j]}(t)\, \Phi_{k-j}^{n,n-j}(\eta, \zeta)\,,$$
$$k = 0, 1, \ldots, n\,,$$

wo wir $t = (Tx)$ $[x = T_{-1}(t)]$ setzen. Wenn $z^{[j]}(t_0) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$, $z^{[k]}(t_0) = 1$ gilt, so ist

(3,1.10)
$$y^{(k)}(x_0) = u(x_0)\,[T'(x_0)]^k\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,,\ x_0 = T_{-1}(t_0)\,.$$

d) Das Hauptsystem $\bar{z}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ von $(\bar{\text{a}})$ ist im Punkt $t_0 \in I_{2t}$ normiert, wenn

(3,1.11)
$$\bar{z}_i(t_0) = \dot{\bar{z}}_i(t_0) = \ldots = \bar{z}_i^{[i-2]}(t_0) = \bar{z}_i^{[i-1]}(t_0) - 1 =$$
$$= \bar{z}_i^{[i]}(t_0) = \ldots = z_i^{[n-1]}(t_0) = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

gilt.

e) Mit dem Symbol $\overline{W}[y(x)]$ resp. $\dot{W}[y(x)]$ bezeichnen wir die Wronskische Determinante der Funktionen $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$, wo in der zweiten bis n-ten Zeile deren Ableitungen nach x resp. t stehen, wobei wir $x = T_{-1}(t)$ setzen.

f) Es bilden die Funktionen $\bar{z}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ein Hauptsystem von $(\bar{\text{a}})$, welches im Punkt $t_0 \in I_{2t}$ normiert ist. Dann ist

(3,1.12)
$$\dot{W}[\bar{z}(t_0)] = 1\,.$$

Die Funktionen $\bar{y}_i(x) = u(x)\,\bar{z}_i[T(x)]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ bilden in I_{1x} ein Hauptsystem von (a), weil mit Rücksicht auf (3.1.9)–(3,1.11)

(3,1.13)
$$\overline{W}[\bar{y}(x_0)] = [u(x_0)]^n\,[T'(x_0)]^{n(n-1)/2}\,, \quad x_0 = T_{-1}(t_0)$$

ist.

g) *Es gilt im Intervall $I_{1x}\{I_{2t}\}$ die Formel*

(3,1.14)
$$\overline{W}[y(x)] = [u(x)]^n\,[T'(x)]^{n(n-1)/2}\,\dot{W}[z(t)]\,, \quad t = T(x)\,\{x = T_{-1}(t)\}\,.$$

Beweis. Nach der Liouvilleschen Formel und (3,1.7), (3,1.8) ist

$$\frac{\dot{W}[z(t)]}{\dot{W}[z(t_0)]} = \exp\left\{-n \int_{t_0}^{t} \left(\frac{n-1}{2}\,\frac{T''[T_{-1}(s)]}{T'[T_{-1}(s)]} + \frac{u'[T_{-1}(s)]}{u[T_{-1}(s)]} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{a_1[T_{-1}(s)]}{a_0[T_{-1}(s)]}\right) \dot{T}_{-1}(s)\,\mathrm{d}s\right\} = \left(\frac{T'(x)}{T'(x_0)}\right)^{-n(n-1)/2} \left(\frac{u(x)}{u(x_0)}\right)^{-n} \cdot \frac{\overline{W}[y(x)]}{\overline{W}[y(x_0)]}\,,\ \text{d. h.}$$

(3,1.15)
$$\overline{W}[y(x)] = c[u(x)]^n\,[T'(x)]^{n(n-1)/2}\,\dot{W}[z(t)]\,,$$

(3,1.16)
$$c = \frac{1}{[u(x_0)]^n\,[T'(x_0)]^{n(n-1)/2}} \cdot \frac{\overline{W}[y(x_0)]}{\dot{W}[z(t_0)]}\,.$$

Da die Funktion $\overline{W}[y(x)]/\dot{W}[z(t)]$ in bezug auf die Wahl des Hauptsystems von (a) invariant ist, können wir voraussetzen, daß das Hauptsystem $z_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ im Punkt t_0 normiert ist, so daß nach (3,1.12), (3,1.13), (3,1.16) $c = 1$ ist. Gemäß (3,1.15) gilt (3,1.14), wo $z_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ein beliebiges Hauptsystem von (a) ist.

h) *Die Bilder* $(\bar{a}_i)$ $\{T(x), u_i(x)\} \in O_a(I_{1x})$, $i = 1, 2$ *sind quasiidentisch dann und nur dann, wenn*

$$(3,1.17) \qquad u_2(x) = c \,.\, u_1(x)\,, \quad 0 \neq c \in E_1\,, \quad x \in I_{1x}$$

gilt.

Beweis. Sind die Bilder $(\bar{a}_i)$, $i = 1, 2$ quasiidentisch, so sind ihre Normalformen identisch und nach (3,1.7), (3,1.8) gilt die Beziehung

$$(3,1.18) \qquad \frac{u_1'[T_{-1}(t)]}{u_1[T_{-1}(t)]} = \frac{u_2'[T_{-1}(t)]}{u_2[T_{-1}(t)]}\,, \quad t \in I_{2t}\,.$$

Wenn wir $t = T(x)$ in (3,1.18) einsetzen, so erhalten wir die Gleichung $\begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ u_1', & u_2' \end{vmatrix} = 0$, $x \in I_{1x}$, woraus (3,1.17) folgt. Der Beweis der notwendigen Bedingung ist nach der Bemerkung b) trivial.

Hilfssatz 3,1.16. *Es sei* $(\bar{a})$ $\{T(x), u(x)\} \in O_a(I_{1x})$, $(\bar{\bar{a}})$ $\{T_{-1}(t), 1/u[T_{-1}(t)]\} \in O_{\bar{a}}(I_{2t})$. *Wenn wir den Intervall* I_{1x} *als Definitionsbereich des Bildes* $(\tilde{a})$ $\{x, 1\} \in O_a(I_{1x})$ *betrachten, so sind die Bilder* $(\tilde{a})$, $(\bar{\bar{a}})$ *identisch.*

Beweis. Es bilden die Funktionen $z_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ein Hauptsystem von $(\bar{a})$. Nach der Bemerkung 3,1.15 a) resp. b) sind die Funktionen $u(x)\, z_i[T(x)]$ Lösungen der Gleichung $(\tilde{a})$ resp. $(\bar{\bar{a}})$. Die Gleichungen $(\tilde{a})$, $(\bar{\bar{a}})$ sind in I_{1x} quasiidentisch, denn gemäß (3,1.14) sind die Funktionen $u(x)\, z_i[T(x)]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ in I_{1x} linear unabhängig. Wenn wir $\bar{\bar{a}}_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ als Koeffizienten der Gleichung $(\bar{\bar{a}})$ bezeichnen, erhalten wir durch Vergleich der Normalformen von $(\tilde{a})$, $(\bar{\bar{a}})$ die Beziehungen

$$(3,1.19) \qquad \frac{a_k(x)}{a_0(x)} = \frac{\bar{\bar{a}}_k(x)}{\bar{\bar{a}}_0(x)}\,, \quad x \in I_{1x}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Da gemäß (3,1.7) in I_{1x} $\bar{\bar{a}}_0(x) = [1/u(x)]\, \{\dot{T}_{-1}[T(x)]\}^n\, \bar{a}_0[T(x)] = a_0(x)$ ist, folgt aus (3,1.19) $a_k(x) = \bar{\bar{a}}_k(x)$, $x \in I_{1x}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Hilfssatz 3,1.17. *Es sei* (b) *eine reguläre Gleichung mit Dimension in* I_2 *und es sei* $I_1 \cap I_2 = I \neq \emptyset$. *Es seien die Gleichungen* (a), (b) *in* I *quasiidentisch und es sei* $\{T(x), u(x)\} \in M(I)$. *Dann sind die Bilder* $(\bar{a})$ $\{T(x), u(x)\} \in O_a(I)$, $(\bar{b})$ $\{T(x), u(x)\} \in O_b(I)$ *quasiidentisch.*

Der Beweis ist trivial.

Folgerung. Wenn die Gleichungen (a), (b) in I identisch sind, so sind die Bilder $(\bar{a})$ $\{T(x), u(x)\} \in O_a(I)$, $(\bar{b})$ $\{T(x), u(x)\} \in O_b(I)$ identisch.

Hilfssatz 3,1.18. *Es sei* $O_{\bar{a}}I({}_{2t})$ *die Menge der Bilder der Gleichung* $(\bar{a})$ $\{T(x), u(x)\} \in$ $\in O_a(I_{1x})$, *deren Koordinaten Elemente der Menge* $M(I_{2t})$ *sind. Dann ist* $O_{\bar{a}}(I_{2t}) =$ $= O_a(I_{1x})$.

Beweis. I. Es sei $(\bar{\bar{a}})$ $\{X(t), u_1(t)\} \in O_{\bar{a}}(I_{2t})$. Wählen wir $(\bar{a}_1)$ $\{X[T(x)], u(x)\,.$ $.\, u_1[T(x)]\} \in O_a(I_{1x})$. Gemäß der Folgerung des Hilfssatzes 3,1.17 sind die Bilder $(\bar{a}_1)$, $(\bar{a})$ identisch. II. Es sei $(\bar{a}_1)$ $\{X(x), u_1(x)\} \in O_a(I_{1x})$. Wählen wir $(\bar{\bar{a}})$ $\{X[T_{-1}(t)],$ $u_1[T_{-1}(t)]/u[T_{-1}(t)]\} \in O_{\bar{a}}(I_{2t})$. Nach dem Hilfssatz 3,1.16 und der Folgerung des Hilfssatzes 3,1.17 sind die Bilder $(\bar{a}_1)$, $(\bar{\bar{a}})$ identisch.

Folgerung. $P_a(I_{1x}) = P_{\bar{a}}(I_{2t})$, $K_a(I_{1x}) = K_{\bar{a}}(I_{2t})$.

3,2. HALBKANONISCHE BILDER

Hilfssatz, 3,2.1. *Das Bild* $(\bar{a})$ $\{T(x), u(x)\} \in O_a(I_{1x})$ *ist halbkanonisch dann und nur dann, wenn seine transformierten Koordinaten* η, ζ *die Gleichung*

$$\frac{n-1}{2}\eta + \zeta + \frac{a_1}{a_0} = 0\,, \quad x \in I_{1x} \tag{3,2.1}$$

erfüllen.

Der Beweis wird mittels (3,1.8) leicht erbracht.

Hilfssatz 3,2.2. *Die Bilder* $(\bar{a})$ $\{T(x), u(x)\} \in P_a(I_{1x})$, $(\bar{a}_1)$ $\{T(x), u_1(x)\} \in P_a(I_{1x})$ *sind quasiidentisch.*

Beweis. Laut (3,2.1), (2,1.1), (2,2.1) genügen die Funktionen $u(x)$, $u_1(x)$ der Gleichung

$$y' + \left(\frac{n-1}{2}\frac{T''}{T'} + \frac{a_1}{a_0}\right) y = 0\,, \quad x \in I_{1x}\,, \tag{3,2.2}$$

so daß $u_1(x) = c\, u(x)$, $0 \neq c \in E_1$ ist und unsere Behauptung folgt nun unmittelbar aus den Bemerkungen 3,1.15.

Definition 3,2.3. Das Bild (A) $\{x, u(x)\} \in P_a(I_{1x})$, wobei $u(x)$ eine beliebige Funktion mit der Eigenschaft (3,1.2) ist, nennen wir das *halbkanonische Hauptbild* der Gleichung (a) oder auch die *halbkanonische Hauptform* der Gleichung (a) im Intervall I_{1x}.

Bemerkungen 3,2.4. a) Aus dem Hilfssatz 3,2.2 folgt, daß alle halbkanonischen Hauptbilder von (a) in I_{1x} quasiidentisch sind.

b) Ist die Gleichung (a) halbkanonisch, so hat sie in I_1 ein halbkanonisches Hauptbild $(\bar{a})$ $\{x, c\} \in P_a(I_1)$, $0 \neq c \in E_1$.

c) Es sei (b) eine reguläre Gleichung mit Dimension in I_2 und es sei $I_1 \cap I_2 =$ $= I \neq \emptyset$. Wenn die Gleichungen (a), (b) in I quasiidentisch sind, dann sind nach den

Hilfssätzen 3,1.17 und 3,2.2 die halbkanonischen Bilder $(\bar{\mathrm{A}})$ $\{T(x), u(x)\} \in P_a(I)$, $(\bar{\mathrm{B}})$ $\{T(x), u_1(x)\} \in P_b(I)$ quasiidentisch.

Hilfssatz 3,2.5. *Die Gleichung* (a) *hat in* I_{1x} *eine halbkanonische Hauptform dann und nur dann, wenn*

$$\frac{a_1}{a_0} \in C_{n-1}(I_{1x}) . \tag{3,2.3}$$

Der Hilfssatz 3,2.5 folgt leicht aus der Gleichung (3,2.1), wo wir $\eta = 0$ setzen.

Hilfssatz 3,2.6. *Das Bild* (ā) $\{T(x), u(x)\} \in O_a(I_{1x})$ *hat im Intervall* (3,1.3) *eine halbkanonische Hauptform dann und nur dann, wenn*

$$\frac{n-1}{2}\eta + \zeta + \frac{a_1}{a_0} \in C_{n-1}(I_{1x}) , \tag{3,2.4}$$

wo η, ζ *die transformierten Koordinaten des Bildes* (ā) *sind.*

Beweis. Nach dem Hilfssatz 3,2.5 und den Formeln (3,1.7), (3,1.8) schließen wir, daß die Gleichung (ā) in I_{2t} dann und nur dann eine halbkanonische Hauptform hat, wenn

$$\frac{n-1}{2}\eta + \zeta + \frac{a_1}{a_0} \in C_{n-1}(I_{2t}) , \tag{3,2.5}$$

wo $x = T_{-1}(t)$ ist. Wenn wir in (3,2.5) $t = T(x)$ einsetzen, erhalten wir (3,2.4).

Definition 3,2.7. Mit dem Symbol $\mu(I_{1x})$ bezeichnen wir die Menge der Funktionen der Klasse $C_{n+1}(I_{1x})$, deren erste Ableitung in I_{1x} von Null verschieden ist und die Dimension Null hat. Mit dem Symbol $m(I_{1x})$ bezeichnen wir die folgendermaßen definierte Menge: das Element $\{T(x), u(x)\} \in M(I_{1x})$ ist ein Element von $m(I_{1x})$, wenn $T(x) \in \mu(I_{1x})$.

Definition 3,2.8. Mit dem Symbol $o_a(I_{1x})$ $[p_a(I_{1x})]$ bezeichnen wir die Menge der Bilder [der halbkanonischen Bilder] der Gleichung (a) in I_{1x}, deren Koordinaten Elemente der Menge $m(I_{1x})$ sind.

Bemerkung 3,2.9. Es ist $m(I_{1x}) \subset M(I_{1x})$, $o_a(I_{1x}) \subset O_a(I_{1x})$, $p_a(I_{1x}) \subset P_a(I_{1x})$.

Hilfssatz 3,2.10. *Es gelte* (3,2.3). *Das Bild* (ā) $\{T(x), u(x)\} \in O_a(I_{1x})$ *hat dann und nur dan eine halbkanonische Hauptform*, wenn

$$(\bar{a})\ \{T(x), u(x)\} \in o_a(I_{1x}) \tag{3,2.6}$$

ist.

Beweis. I. Wenn das Bild (ā) $\{T(x), u(x)\} \in O_a(I_{1x})$ eine halbkanonische Hauptform hat, so gilt (3,2.4). Nach (3,2.4), (3,2.3) und dem Hilfssatz 3,1.9 ist $\eta \in C_{n-1}(I_{1x})$, so daß gemäß (2,1.1) $T(x) \in \mu(I_{1x})$ ist und (3,2.6) gilt. II. Es gelte (3,2.6). Wenn wir die Funktion

$$u_1(t) = \frac{c|T'[T_{-1}(t)]|^{(1-n)/2}}{u[T_{-1}(t)]} \exp\left\{-\int_{T_{-1}(t_0)}^{T_{-1}(t)} \frac{a_1(s)}{a_0(s)}\, \mathrm{d}s\right\}, \quad 0 \neq c \in E_1$$

wählen, so ist das Bild $(\bar{a})$ $\{t, u_1(t)\} \in p_{\bar{a}}(I_{2t})$ eine halbkanonische Hauptform der Gleichung (a) im Intervall I_{2t}.

Satz 3,2.11. *Es sei* $(a) \in \bar{O}_a(I_{1x}) \subset O_a(I_{1x})$. *Jedes Element* $(\bar{a}) \in \bar{O}_a(I_{1x})$ *hat dann und nur dann eine halbkanonische Hauptform, wenn* $\bar{O}_a(I_{1x}) \subset o_a(I_{1x})$ *ist und* (3,2.3) *gilt.*

Es folgt aus den Hilfssätzen 3,2.5 und 3,2.10.

Folgerung. Jedes Element $(\bar{a}) \in o_a(I_{1x})$ hat dann und nur dann eine halbkanonische Hauptform, wenn (3,2.3) gilt.

Bemerkung 3,2.12. *Wenn die Menge* $p_a(I_{1x})$ *wenigstens ein Element hat, so ist* $p_a(I_{1x}) = P_a(I_{1x})$. Beweis. Es sei $(\bar{a})$ $\{T(x), u(x)\} \in p_a(I_{1x})$, so daß $T(x) \in \mu(I_{1x})$ ist. Nach (3,2.1) gilt (3,2.3). Es sei $(\bar{a}_1)$ ein beliebiges Element der Menge $P_a(I_{1x})$. Gemäß der Bemerkung 3,2.4 b) und des Hilfssatzes 3,2.10 ist $(\bar{a}_1) \in p_a(I_{1x})$, so daß $P_a(I_{1x}) \subset$ $\subset p_a(I_{1x})$. Nach der Bemerkung 3,2.9 ist $p_a(I_{1x}) = P_a(I_{1x})$.

Folgerung. Wenn (3,2.3) gilt, so ist $p_a(I_{1x}) = P_a(I_{1x})$.

Bemerkung 3,2.13. Es gelte (3,2.3), $(\bar{a})$ $\{T(x), u(x)\} \in o_a(I_{1x})$. Gemäß der Hilfssätze 3,1.11, 3,2.10 und der Bemerkung 3,2.12 ist $p_{\bar{a}}(I_{2t}) = P_{\bar{a}}(I_{2t})$.

In den weiteren Betrachtungen werden wir uns nur mit solchen Gleichungen beschäftigen, welche halbkanonische Bilder haben und wir werden nur solche Bilder zulassen, welche halbkanonische Hauptformen haben. Es genügt also gemäß des Satzes 3,2.11 vorauszusetzen, daß die Gleichung (a) in I_{1x} die Eigenschaft (3,2.3) hat und daß ihre Bilder in I_{1x} nur derartige Koordinaten haben, welche Elemente der Menge $m(I_{1x})$ sind. Nach demselben Satz schließen wir, daß diese Voraussetzungen auch notwendig sind.

Im folgenden setzen wir voraus, daß

$$\frac{a_1}{a_0} \in C_{n-1}(I_1) \tag{3,2.7}$$

gilt. Aus (3,2.2) folgt, daß wir als zweite Koordinate des halbkanonischen Hauptbildes der Gleichung (a) in I_1 die Funktion $u(x) = c \,.\, \exp\{-\int_{x_0}^{x}(a_1/a_0)\,\mathrm{d}s\}$, $0 \neq$ $\neq c \in E_1$ wählen können. Wenn wir in (2,3.2) $\eta = 0$, $\zeta = -a_1/a_0$ setzen, erhalten wir die Beziehung $\Phi^{n;i}_{i-k}(0, -a_1/a_0) = \chi_{i-k}(-a_1/a_0)$. Ist

$$A_i(x) = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} a_k(x)\, \chi_{i-k}(-a_i/a_0), \quad i = 0, 1, \ldots, n, \; x \in I_1, \tag{3,2.8}$$

so können wir gemäß (3,1.4) und der Gleichung $(\bar{a})$ das halbkanonische Hauptbild (A) $\{x, c\exp(-\int_{x_0}^{x}(a_1/a_0)\,ds)\} \in p_a(I_1)$, $0 \neq c \in E_1$ in der Form

$$(\mathrm{A}) \quad c\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\frac{a_1}{a_0}\,ds\right)\left[A_0(x)\,Z^{(n)}(x) + \sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i}A_i(x)\,Z^{(n-i)}(x)\right] = 0\,, \quad x \in I_1$$

schreiben, wo nach (2,2.2), (2.2.5), (3,2.8) $A_0 = a_0$, $A_1 = 0$,

$$\frac{A_2}{A_0} = \frac{a_2}{a_0} - \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{a_0}\right)' \tag{3,2.9}$$

ist.

Definition 3,2.14. Die Funktionen

$$\mathfrak{A}_i(x) = \frac{A_i(x)}{A_0(x)}\,, \quad i = 2, 3, \ldots, n\,, \; x \in I_1\,, \tag{3,2.10}$$

wo die Koeffizienten A_i, $i = 0, 2, 3, \ldots, n$ mittels der Formeln (3,2.8) definiert sind, nennen wir *Hauptkoeffizienten* der Gleichung (a).

Wenn (3,2.7) gilt, so werden wir die Elemente der Menge $p_a(I_{1x})$ meistens nur mittels der ersten Koordinate bestimmen. Wenn z.B. das Bild $(\bar{a})p_a \in (I_{1x})$ die erste Koordinate $T(x)$ hat, so ist seine zweite Koordinate $U(x)$ durch die Formel

$$U(x) = c|T'|^{(1-n)/2}\exp\left\{-\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(s)}{a_0(s)}\,ds\right\}, \quad 0 \neq c \in E_1\,, \; x \in I_{1x} \tag{3,2.11}$$

gegeben und statt $(\bar{a})\,\{T(x), U(x)\} \in p_a(I_{1x})$ schreiben wir kurz $(\bar{a})\,\{T(x)\} \in p_a(I_{1x})$.

Satz 3,2.15. *Es gelte* (3,2.7). *Das halbkanonische Bild* $(\bar{\mathrm{A}})\,\{T(x)\} \in p_a(I_{1x})$ *ist von der Gestalt*

$$(\bar{\mathrm{A}}) \qquad U[T_{-1}(t)]\left[\bar{A}_0(t)\,z^{[n]}(t) + \sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i}\bar{A}_i(t)\,z^{[n-i]}(t)\right] = 0\,, \quad t \in I_{2t}\,,$$

mit

$$\bar{A}_0(t) = [T'(x)]^n\,a_0(x)\,, \quad x = T_{-1}(t)\,, \tag{3,2.12}$$

$$\bar{A}_i(t) = [T'(x)]^{n-i}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}A_k(x)\,\Phi_{i-k}^{n,i}\,[\eta(x)]\,, \tag{3,2.13}$$

$$x = T_{-1}(t)\,, \quad i = 2, 3, \ldots, n\,,$$

wo (2,1.1), (2,1.2), (2,3.5), (3,2.8), (3,2.11) *gilt.*

Beweis. Es sei $(\bar{\mathrm{A}})\,\{T(x)\} \in p_a(I_{1x})$. Nach dem Hilfssatz 3,2.1 erfüllen die transformierten Koordinaten des Bildes $(\bar{A})$ die Gleichung (3,2.1), so daß die zweite Koordinate $U(x)$ mittels der Formel (3,2.11) bestimmt wird. Wenn wir

$$\zeta = -\frac{a_1}{a_0} - \frac{n-1}{2}\eta, \tag{3,2.14}$$

in (3,1.4) einsetzen, so können wir mit dem Ausdruck $D_i(x) = \sum_{r=0}^{i} \binom{i}{r} a_r \Phi_{i-r}^{n;i}(\eta, \zeta)$ im Hinblick auf (2,3.2), (2,2.4), (3,2.8) folgende Umformungen durchführen:

$$D_i(x) = \sum_{r=0}^{i}\sum_{j=r}^{i}\binom{i}{r}\binom{i-r}{j-r} a_r \varphi_{i-j}^{n-j}(\eta)\,\chi_{j-r}\left(-\frac{a_1}{a_0} - \frac{n-1}{2}\eta\right) =$$

$$= \sum_{r=0}^{i}\sum_{j=r}^{i}\sum_{\nu=0}^{j-r}\binom{i}{r}\binom{i-r}{j-r}\binom{j-r}{\nu} a_r\, \varphi_{i-j}^{n-j}(\eta)\,\chi_{j-r-\nu}\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)\chi_\nu\left(-\frac{n-1}{2}\eta\right).$$

Wenn wir $\nu = j - k$, $\binom{i}{r}\binom{i-r}{j-r}\binom{j-r}{j-k} = \binom{k}{r}\binom{i}{j}\binom{j}{k}$ setzen, so ist $D_i(x) =$

$$= \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\varphi_{i-j}^{n-j}(\eta)\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}\chi_{j-k}\left(-\frac{n-1}{2}\eta\right)\cdot\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}a_r\,\chi_{k-r}\left(-\frac{a_1}{a_0}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}A_k\cdot\sum_{j=k}^{i}\binom{i-k}{j-k}\varphi_{i-j}^{n-j}(\eta)\,\chi_{j-k}\left(-\frac{n-1}{2}\eta\right).$$ Daraus folgt (3,2.12), (3,2.13) nach (2,3.5), (3,1.4), wenn wir $\bar{A}_i(t) = [T'(x)]^{n-i}D_i(x)$, $x = T_{-1}(t)$, $i = 0, 2, 3, \ldots, n$ setzen.

Bemerkung 3,2.16. Gemäß (3,2.12), (3,2.13), (2,3.6) ist

$$\bar{A}_2(t) = [T'(x)]^{n-2}\left\{A_0(x)\frac{n+1}{6}\left[\frac{1}{2}\eta^2(x) - \eta'(x)\right] + A_2(x)\right\}, \quad x = T_{-1}(t). \tag{3,2.15}$$

Satz 3,2.17. *Es gelte (3,2.7) und es sei (ā) $\{T(x), u(x)\} \in o_a(I_{1x})$. Dann ist die Gleichung $(\bar{A})$ die halbkanonische Hauptform des Bildes (ā), wobei (2,1.1), (2,1.2), (2,3.5), (3,2.8), (3,2.11)–(3,2.13) gilt.*

Beweis. Es seien (3,1.4) die Koeffizienten des Bildes (ā). Nach der Definition 3,2.3 ist das Bild $(\bar{A})$ $\{t, U_1(t)\} \in p_{\bar{a}}(I_{2t})$ das halbkanonische Hauptbild von (ā) in I_{2t} mit

$$U_1(t) = c\exp\left\{-\int_{t_0}^{t}\frac{\bar{a}_1(s)}{\bar{a}_0(s)}\,ds\right\}, \quad 0 \neq c \in E_1.$$

Laut (3,1.7), (3,1.8) ist

$$U_1(t) = c\left|T'[T_{-1}(t)]\right|^{(1-n)/2}\cdot\frac{1}{|u[T_{-1}(t)]|}\exp\left\{-\int_{T_{-1}(t_0)}^{T_{-1}(t)}\frac{a_1(s)}{a_0(s)}\,ds\right\}. \tag{3,2.16}$$

Gemäß des Hilfssatzes 3,1.17 sind die Bilder $(\bar{\mathrm{A}})\ \{t, U_1(t)\} \in p_{\bar{a}}(I_{1t})$, $(\bar{\mathrm{A}})\ \{T(x), |u(x)| \cdot$ $\cdot\, U_1[T(x)]\} \in p_a(I_{1x})$ im Intervall (3,1.3) identisch. Laut (3,2.16), (3,2.11) ist $|u(x)| \cdot$ $\cdot\, U_1[T(x)] = U(x)$, so daß die Behauptung des Satzes 3,2.17 in Kraft ist.

Folgerung. Halbkanonische Hauptbilder aller Bilder von (a) in I_{1x}, die dieselbe erste Koordinate haben, sind quasiidentisch.

Bemerkungen 3,2.18. a) Wenn die Gleichung (a) halbkanonisch ist, d.h. $a_1 \equiv 0$ in I_1, so ist das halbkanonische Bild $(\bar{\mathrm{A}})\ \{T(x)\} \in p_a(I_{1x})$ von der Gestalt

$$(3,2.17) \qquad U_2(x) \left\{[T'(x)]^n a_0(x)\, z^{[n]}(t) + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} z^{[n-i]}(t)\, [T'(x)]^{n-i} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} a_k(x)\, \Phi^{n,i}_{i-k}[\eta(x)]\right\} = 0\,, \quad t \in I_{2t}\,,$$

wo wir $x = T_{-1}(t)$ und

$$(3,2.18) \qquad U_2(x) = c|T'(x)|^{(1-n)/2}\,, \quad 0 \neq c \in E_1$$

setzen.

b) Es sei $(\bar{\mathrm{A}})\ \{T(x)\} \in p_a(I_{1x})$. Dann ist $p_a(I_{1x}) = p_{\bar{A}}(I_{2t})$. Die Behauptung beweist man ähnlich wie den Hilfssatz 3,1.18.

3,3. KANONISCHE BILDER

Hilfssatz 3,3.1. *Es gelte* (3,2.7). *Das Bild* $(\bar{\alpha})\ \{T(x)\} \in p_a(I_{1x})$ *ist dann und nur dann kanonisch, wenn*

$$(3,3.1) \qquad \frac{a_2}{a_0} \in C_{n-2}(I_{1x})\,,$$

$$(3,3.2) \qquad \{T, x\} = \frac{3}{n+1}\,\mathfrak{A}_2\,, \quad x \in I_{1x}$$

gilt, wobei $\mathfrak{A}_2$ *der Hauptkoeffizient von* (a) *ist.*

Beweis. Es sei das Bild $(\bar{\alpha})\ \{T(x)\} \in p_a(I_{1x})$ kanonisch. Laut (3,2.15) gilt die Gleichung

$$(3,3.3) \qquad \eta' = \tfrac{1}{2}\eta^2 + \frac{6}{n+1}\,\mathfrak{A}_2\,,$$

woraus

$$(3,3.4) \qquad \mathfrak{A}_2 \in C_{n-2}(I_{1x})$$

folgt. Aus (3,3.4), (3,2.10), (3,2.9), (3,2.7) folgt (3,3.1). Wenn wir (2,1.1) in (3,3.3) einsetzen, erhalten wir (3,3.2). Den Beweis der notwendigen Bedingung kann man dem Leser überlassen.

Im folgenden setzen wir voraus, daß

$$\frac{a_i}{a_0} \in C_{n-i}(I_1), \quad i = 1, 2. \tag{3,3.5}$$

gilt. Dann ist nach (3,3.5), (3,2.9) $\mathfrak{A}_2 \in C_{n-2}(I_1)$.

Definition 3,3.2. Mit dem Symbol $\mu_{\mathfrak{A}}(I_{1x})$ bezeichnen wir die Menge, deren Elemente folgendermaßen definiert sind: $T(x) \in \mu(I_{1x})$ ist ein Element der Menge $\mu_{\mathfrak{A}}(I_{1x})$, wenn $T(x)$ in I_{1x} eine Lösung von (3,3.2) ist.

Definition 3,3.3. Mit dem Symbol $k_a(I_{1x})$ bezeichnen wir die Menge der kanonischen Bilder der Gleichung (a) im Intervall I_{1x}.

Bemerkungen 3,3.4. a) Es ist $k_a(I_{1x}) \subset p_a(I_{1x})$. Gemäß des Hilfssatzes 3,3.1 ist das Bild $(\bar{\alpha})$ $\{T(x)\} \in p_a(I_{1x})$ dann und nur dann kanonisch, wenn $T(x) \in \mu_{\mathfrak{A}}(I_{1x})$ ist.
b) Wenn wir in der Gleichung (3,3.2) die Substitution $T(x) = \int_{x_0}^{x} (1/y^2)\, ds$, $x_0 \in I_{1x}$ verwenden, so erhalten wir die Gleichung

$$y'' + \frac{3}{n+1} \mathfrak{A}_2 y = 0. \tag{3,3.6}$$

Diese wird die *die Gleichung* (a) *begleitende Gleichung* bezeichnet. Wählen wir eine Lösung $v_1(x)$ von (3,3.6), die in I_{1x} von Null verschieden ist und setzen wir

$$T(x) = \frac{v_2(x)}{v_1(x)}, \quad u(x) = c v_1^{n-1} \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1}{a_0}\, ds\right\}, \quad x \in I_{1x}, \tag{3,3.7}$$

wo die Funktionen $v_1(x)$, $v_2(x)$ ein Hauptsystem von (3,3.6) bilden. Wenn (3,3.4) gilt, so ist $T(x) \in \mu_{\mathfrak{A}}(I_{1x})$, $(\bar{\alpha})$ $\{T(x), u(x)\} \in k_a(I_{1x})$.

Satz 3,3.5. *Es gelte* (3,3.5). *Das kanonische Bild* $(\bar{\alpha})$ $\{T(x)\} \in k_a(I_{1x})$ *ist von der Gestalt*

$$U[T_{-1}(t)]\left[\bar{\alpha}_0(t)\, z^{[n]}(t) + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \bar{\alpha}_i(t)\, z^{[n-i]}(t)\right] = 0, \quad t \in I_{2t}, \tag{$\bar{\alpha}$}$$

mit

$$\bar{\alpha}_0(t) = [T'(x)]^n a_0(x), \quad x = T_{-1}(t), \tag{3,3.8}$$

$$\bar{\alpha}_i(t) = [T'(x)]^{n-i} \sum_{\nu=0}^{i} \eta^{\nu} \sum_{\mu=\nu}^{i} \frac{\binom{i}{\mu}}{\binom{n-i+\mu}{\mu}} A_{i-\mu}(x)\, F_{\mu-\nu}^{n,i,i-\mu}[\mathfrak{A}_2(x)], \tag{3,3.9}$$

$$x = T_{-1}(t), \quad i = 3, 4, \ldots, n,$$

wo (2,1.1), (2,1.2), (2,3.12), (2,3.13), (3,2.8), (3,2.11), (3,3.3) *gilt.*

Beweis. Laut (3,3.3), (3,2.15) ist $\bar{\alpha}_2(t) \equiv 0$ in I_{1x}. Da (2,1.9) gemäß (3,3.3) gilt, können wir (2,3.11) in (3,2.13) einsetzen und erhalten wir

$$\bar{\alpha}_i = (T')^{n-i} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} A_k \frac{1}{\binom{n-k}{n-i}} \sum_{\varrho=0}^{i-k} \eta^{i-k-\varrho} F_{\varrho}^{n,i,k}(\mathfrak{A}_2), \tag{3,3.10}$$

$$i = 3, 4, \ldots, n.$$

Wenn wir ferner in (3,3.10) $k = i - \mu$, $\varrho = \mu - \nu$, $x = T_{-1}(t)$ einsetzen, erhalten wir leicht (3,3.9). Die Formel (3,3.8) gilt nach (3,2.12).

Satz 3,3.6. *Wenn die Gleichung* (a) *kanonisch ist,* d.h. $a_i \equiv 0$ in I_1, $i = 1, 2$, *so ist das kanonische Bild* $(\bar{\alpha})$ $\{T(x)\} \in k_a(I_{1x})$ *von der Gestalt* $(\bar{\alpha})$, *wo wir* (3,3.8), (3,2.18) *statt* (3,2.11),

$$\bar{\alpha}_i(t) = [T'(x)]^{n-i} \sum_{\nu=0}^{i-3} \eta^{\nu} \left(-\frac{1}{2}\right)^{\nu} \binom{i}{\nu} \binom{i-1}{\nu} \cdot \nu!\, a_{i-\nu}(x), \tag{3,3.11}$$

$$x = T_{-i}(t), \quad i = 3, 4, \ldots, n$$

setzen und (2,1.1), (2,1.2)

$$\{T, x\} = 0. \tag{3,3.12}$$

gilt.

Beweis. Da gemäß der Voraussetzung und der Gleichungen (3,2.10) $\mathfrak{A}_2 \equiv 0$ ist, können wir (3,3.9) in der Form

$$\bar{\alpha}_i = (T')^{n-i} \sum_{\nu=0}^{i} \eta^{\nu} \frac{\binom{i}{\nu}}{\binom{n-i+\nu}{\nu}} a_{i-\nu} F_0^{n,i,i-\nu}(\mathfrak{A}_2), \tag{3,3.13}$$

$$i = 3, 4, \ldots, n$$

schreiben. Wenn wir die Formeln (2,3.14), (2,3.15) in (3,3.13) einsetzen, erhalten wir (3,3.11).

Bemerkungen 3,3.7. a) Es sei $(\bar{A})$ $\{T(x)\} \in p_a(I_{1x})$. Dann ist $k_a(I_{1x}) = k_{\bar{A}}(I_{2t})$, wobei $k_{\bar{A}}(I_{2t})$ die Menge der kanonischen Bilder der Gleichung $(\bar{A})$ ist, deren erste Koordinaten in I_{2t} die Gleichung

$$\{X, t\} = [T'(x)]^{-2} \left[\frac{3}{n+1} \mathfrak{A}_2(x) - \{T, x\}\right], \quad x = T_{-1}(t)$$

erfüllen. Die Behauptung beweist man ähnlich wie den Hilfssatz 3,1.18.

b) Es sei $(\bar{\alpha})$ $\{T(x)\} \in k_a(I_{1x})$. Dann ist $k_a(I_{1x}) = k_{\bar{\alpha}}(I_{2t})$, wobei $k_{\bar{\alpha}}(I_{2t})$ die Menge der kanonischen Bilder der Gleichung $(\bar{\alpha})$ ist, deren erste Koordinaten in I_{2t} die Gleichung $\{X, t\} = 0$ erfüllen.

(Fortsetzung)