Czechoslovak Mathematical Journal

Ladislav Procházka

Заметка о $\mathfrak{m}$-сепарабельных абелевых группах без кручения

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 15 (1965), No. 4, 526–539

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100692`

ЗАМЕТКА О $\mathfrak{m}$-СЕПАРАБЕЛЬНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

ЛАДИСЛАВ ПРОХАЗКА (Ladislav Procházka), Прага

(Поступило в редакцию 12/V 1964 г.)

В этой статье обобщены главные результаты из [5] в том смысле, что требование полной разложимости группы без кручения заменено более слабым требованием $\mathfrak{m}$-сепарабельности такой группы.

Так как мы будем заниматься только абелевыми группами, то под словом „группа" будем подразумевать аддитивно записанную абелеву группу. Притом будем пользоваться следующей символикой: $O(g)$ обозначает порядок элемента g, $\mathscr{C}(p^\infty)$ — полную группу типа p^∞, $\mathscr{C}(p^k)$ — циклическую группу порядка p^k, $G^{(p)}$ — p-примарное слагаемое периодической группы G и тому подобно; буквой p условимся всюду обозначать некоторое (положительное) простое число. Ещё отметим, что все понятия, определение которых в статье не даётся, можно найти в книге [1].

Пусть n — натуральное число и g — элемент некоторой группы G; если в группе G разрешимо уравнение $nx = g$, то будем писать $g \equiv 0 \pmod{n}_G$.

Пусть $g_1, g_2, \ldots, g_r$ — элементы некоторой группы без кручения G и пусть $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_r$ — целые p-адические числа, представленные в виде бесконечных p-адически сходящихся последовательностей целых рациональных чисел:

$$\mathfrak{a}_i = (a_i^{(k)})_{k=1}^\infty \quad (i = 1, 2, \ldots, r)\,;$$

если выполнены соотношения

$$\sum_{i=1}^r a_i^{(k)} g_i \equiv 0 \pmod{p^k}_G \quad (k = 1, 2, \ldots)\,,$$

то будем писать (смотри [6])

$$\sum_{i=1}^r \mathfrak{a}_i g_i \equiv 0 \pmod{p^\infty}_G\,. \qquad (1)$$

Определение. Если $g_1, g_2, \ldots, g_r$ — элементы группы без кручения G, то будем говорить, что они p^∞-независимы в G, если соотношение вида (1) выполнено только тогда, когда $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Множество M элементов группы без кручения G называется p^∞-независимым в G, если каждая его конечная часть p^∞-независима в G.

Из определения непосредственно видно, что в каждой группе без кручения G существуют максимальные p^∞-независимые множества элементов (пустое множество будем считать p^∞-независимым в каждой группе без кручения). Каждое такое максимальное p^∞-независимое множество элементов из G будем называть p^∞-базисом группы G. Кроме того, каждое максимальное линейно независимое множество элементов из G назовём базисом группы G.

Для каждой группы без кручения G и каждого простого числа p определено кардинальное число $r_p(G)$, называемое p-рангом группы G (смотри [3], [2]). Для p-ранга $r_p(G)$ была в [3] доказана теорема (смотри [3], теорему 1), которую мы здесь выскажем в виде следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть G — группа без кручения и A — произвольный её p^∞-базис. Если B — базис группы G такой, что $A \subseteq B$, то имеет место формула*

$$r_p(G) = \operatorname{moh}(B - A),$$

где $\operatorname{moh}(B - A)$ *представляет мощность множества* $B - A$.

Следующее утверждение касается групп без кручения конечного ранга.

Лемма 2. *Если G — группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и если $B = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ — какой-то её базис, то p-примарное слагаемое периодической группы $G/\{B\}$ является прямой суммой конечной группы и конечного числа k групп типа $\mathscr{C}(p^\infty)$, где k определено равенством $k = r_p(G)$.*

(Смотри [2], теоремы 1 и 4.)

Из определения p^∞-независимости элементов непосредственно следует, что линейно зависимые элементы не являются p^∞-независимыми. Следовательно, если искать условия p^∞-независимости, то достаточно ограничиться только семействами линейно независимых элементов, и это мы в дальнейшем сделаем. Раньше формулировки следующей леммы ещё напомним, что если G — группа без кручения и M — некоторое множество ее элементов, то символом $\mathscr{S}_G(M)$ будем обозначать наименьшую сервантную подгруппу группы G, содержащую множество M.

Лемма 3. *Пусть $g_1, g_2, \ldots, g_r$ — некоторые линейно независимые элементы группы без кручения G. Если положим $S = \mathscr{S}_G(g_1, g_2, \ldots, g_r)$, то элементы g_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ p^∞-независимы в G в точности тогда, когда $r_p(S) = 0$.*

Доказательство. Если элементы g_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ p^∞-независимы в G, то они также p^∞-независимы в S, следовательно, они состовляют одновременно p^∞-базис и также базис группы S. Отсюда по лемме 1 имеем $r_p(S) = 0$.

Если элементы $g_1, g_2, \ldots, g_r$ не являются p^∞-независимыми в G, то существуют целые p-адические числа α_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$, не все равные нулю, для которых выполнено соотношение (1). Так как S сервантна в G и $g_i \in S$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, то должно уже быть

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{r} \alpha_i g_i \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ p^\infty)_S\,.$$

Очевидно, можно предполагать, что по крайней мере одно α_i $(1 \leqq i \leqq r)$ не делится на p (в кольце целых p-адических чисел); пусть, ради определенности, $p \nmid \alpha_1$. Пусть $\alpha_i = (a_i^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ и пусть y_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — элементы из S, удовлетворяющие согласно (2) соотношениям

$$(3) \qquad p^k y_k = a_1^{(k)} g_1 + a_2^{(k)} g_2 + \ldots + a_r^{(k)} g_r\,.$$

Положим $\bar{S} = S/U$, где $U = \{g_1\} \dotplus \ldots \dotplus \{g_r\}$ и обозначим $\bar{y}_k = y_k + U \in \bar{S}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Так как $p \nmid \alpha_1$, то $p \nmid a_1^{(1)}$, и в силу (3) $y_1 \notin U$. Но согласно (3) $py_1 \in U$; итак, $O(\bar{y}_1) = p$. Из формулы (3) при помощи соотношений $a_i^{(k)} \equiv \equiv a_i^{(k+1)} (\mathrm{mod}\ p^k)$ $(k = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots, r)$ непосредственно следует, что $p\bar{y}_{k+1} = \bar{y}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Это значит, что p-примарное слагаемое периодической группы $\bar{S} = S/U$ не является редуцированной группой; итак, по лемме 2 $r_p(S) \geqq 1$.

Этим лемма полностью доказана.

В статье [5] являлось основным понятие p^∞-независимости вполне разложимой подгруппы H группы без кручения G. Сейчас напомним это определение (смотри [5], определение 4 и 5): Вполне разложимая подгруппа H группы без кручения G называется p^∞-независимой в G, если существует полное разложение $H = \sum_{\iota \in I} J_\iota$ и элементы $x_\iota \in J_\iota$ так, что множество элементов $(x_\iota;\ \iota \in I)$ p^∞-независимо в G. В [5] было уже доказано, что если такая подгруппа H p^∞-независима в G, то для всякого её полного разложения $H = \sum_{\iota \in I} J_\iota$ и всякого набора элементов $x_\iota \in J_\iota$, $x_\iota \neq 0$ $(\iota \in I)$ будет множество $(x_\iota;\ \iota \in I)$ p^∞-независимо в G (смотри [5], лемму 3 и 5). Так как в этой статье не будем заниматься вполне разложимыми группами, то надо будет сформулировать определение p^∞-независимости подгруппы группы без кручения в более общем виде. И это мы теперь сделаем.

Если G — группа и $g \in G$, то p-высотой элемента g в группе G называется точная верхняя грань множества всех целых $k \geqq 0$, для которых разрешимо в G уравнение $p^k x = g$.

Определение. Скажем, что подгруппа H группы без кручения G p^∞-независима в G, если

a) подгруппа H не содержит ненулевых элементов бесконечной p-высоты в H,

b) каждое множество элементов из H, которое p^∞-независимо в H, также p^∞-независимо в G.

Лемма 4. *Пусть G — группа без кручения и H — некоторая её вполне разложимая подгруппа. Если $H = \sum_{\iota \in I} J_\iota$ — произвольное полное разложение группы H*

и $x_\iota \in J_\iota$, $x_\iota \neq 0$ $(\iota \in I)$ — произвольно выбранные элементы, то подгруппа H p^∞-независима в G в точности тогда, когда множество $X = (x_\iota;\ \iota \in I)$ p^∞-независимо в G.

Доказательство. Пусть множество X p^∞-независимо в G. Убедимся в том, что в этом случае подгруппа H p^∞-независима в G.

Пусть $h \in H$, $h \neq 0$. Тогда существуют индексы $\iota_j \in I$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ такие, что $h \in \sum_{j=1}^{n} J_{\iota_j}$. Ради простоты положим $K = \sum_{j=1}^{n} J_{\iota_j}$. Ясно, что $K = \mathscr{S}_H(x_{\iota_1}, x_{\iota_2}, \ldots$ $\ldots, x_{\iota_n})$; так как элементы x_{ι_j} $(j = 1, 2, \ldots, n)$ p^∞-независимы в G, то они также p^∞-независимы в H, и по лемме 3 будет $r_p(K) = 0$. В K можно найти элементы $h_2, \ldots, h_n$ так, что семейство $B = (h = h_1, h_2, \ldots, h_n)$ служит базисом в K. Теперь уже ясно, что элемент h должен обладать конечной p-высотой в H, так как в противном случае p-примарное слагаемое периодической группы $K / \{B\}$ не являлось бы редуцированной группой и по лемме 2 должно было бы быть $r_p(K) \geqq 1$.

Таким образом мы доказали, что H не содержит ненулевых элементов бесконечной p-высоты в H.

Если теперь $g_i \in H$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ — некоторые p^∞-независимые в H элементы, то при некоторых индексах ι_j $(j = 1, 2, \ldots, s)$ будем иметь

$$g_i \in \sum_{j=1}^{s} J_{\iota_j} \quad (i = 1, 2, \ldots, r)\,. \tag{4}$$

Если положим

$$S = \mathscr{S}_G(g_1, \ldots, g_r)\,, \quad T = \mathscr{S}_G(x_{\iota_1}, \ldots, x_{\iota_s})\,,$$

то $\sum_{j=1}^{s} J_{\iota_j} \subseteq T$, и в силу (4) должно быть $S \subseteq T$. Так как множество X p^∞-независимо в G, то по лемме 3 будет $r_p(T) = 0$. Отсюда и из включения $S \subseteq T$ уже следует, что $r_p(S) = 0$ (смотри [2], теорему 7). Так как элеметны $g_1, \ldots, g_r$ линейно независимы, то они по лемме 3 p^∞-независимы в G. Но тем самым мы уже доказали, что всякое множество элементов из H, которое p^∞-независимо в H, будет p^∞-независимым в G.

Итак, мы доказали, что подгруппа H p^∞-независима в G.

Теперь предположим, что подгруппа H p^∞-независима в G и убедимся в p^∞-независимости множества X в G.

Пусть $x_{\iota_1}, \ldots, x_{\iota_r}$ $(\iota_i \neq \iota_j,\ i \neq j)$ — некоторое конечное множество элементов из X. Так как H не содержит ненулевых элементов бесконечной p-высоты в H, то $r_p(J_{\iota_j}) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ (смотри [2], лемму 6.1). Если положим $S =$ $= \mathscr{S}_H(x_{\iota_1}, \ldots, x_{\iota_r})$, то, очевидно, $S = \sum_{j=1}^{r} J_{\iota_j}$ и, следовательно, $r_p(S) = 0$ (смотри [2], замечание после теоремы 6). По лемме 3 элементы $x_{\iota_1}, \ldots, x_{\iota_r}$ p^∞-независимы в H, значит, они p^∞-независимы в G, так как подгруппа H p^∞-независима в G. Но этим уже доказано, что все множество X p^∞-независимо в G.

Лемма полностью доказана.

Замечание. Из только что доказанной леммы 4 следует, что вышеприведенное определение p^∞-независимости подгруппы H в группе без кручения G сводится для вполне разложимой подгруппы H к определению из [5]. Это значит, что пользуясь этим обобщенным определением, можем применять результаты из [5].

Лемма 5. *Пусть G — группа без кручения и пусть H — такая её подгруппа, что G/H является периодической группой. Если подгруппа H не содержит ненулевых элементов бесконечной p-высоты в H и если p-примарное слагаемое группы G/H редуцировано, то подгруппа H p^∞-независима в G.*

Доказательство. Достаточно доказать, что каждое конечное множество элементов из H, p^∞-независимых в H, также p^∞-независимо в G.

Пусть элементы $g_i \in H$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ p^∞-независимы в H. Если положим

$$S = \mathscr{S}_H(g_1, \dots, g_r), \quad T = \mathscr{S}_G(g_1 \dots, g_r),$$

то, очевидно, $S = T \cap H$. Притом в силу леммы 3 имеем $r_p(S) = 0$. В силу первой теоремы об изоморфизме можно писать

$$T/S = T/(T \cap H) \cong \{T, H\}/H \subseteq G/H ;$$

итак, ввиду предположения о G/H, p-примарное слагаемое группы T/S будет редуцированной группой. Отсюда по теореме 5 из [2] следует, что $r_p(T) = r_p(S) = 0$, или, по лемме 3 элементы $g_1, g_2, \dots, g_r$ p^∞-независимы в G, и лемма доказана.

Ещё напомним, что группа без кручения называется однородной, если все её сервантные подгруппы ранга 1 изоморфны.

Лемма 6. *Пусть G — группа без кручения и пусть H — однородная её подгруппа такая, что G/H является периодической группой. Если p-примарное слагаемое группы G/H является ненулевой редуцированной группой, то подгруппа H p^∞-независима в G.*

Доказательство. Имея ввиду лемму 4, остается нам только доказать, что H не содержит ненулевых элементов бесконечной p-высоты в H.

Если бы подгруппа H содержала ненулевые элементы бесконечной p-высоты в H, то, в силу однородности H, каждый ненулевой её элемент обладал бы в H бесконечной p-высотой. Итак, каждое уравнение вида $px = h$, где $h \in H$, было бы разрешимо в H. Так как p-примарное слагаемое группы G/H является ненулевой группой, то существует элемент $g \in G - H$ такой, что $pg = h_0 \in H$. Но тогда уравнение $px = h_0$ неразрешимо в H, так как G — группа без кручения. Значит, группа H не содержит ненулевых элементов бесконечной p-высоты в H, и лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть G — группа без кручения и пусть H — p^∞-независимая подгруппа в G. Если K — сервантная подгруппа в H, то подгруппа K p^∞-независима в G.*

Доказательство. Очевидно, подгруппа K не содержит ненулевых элементов бесконечной p-высоты в K. Так как для каждого $M \subseteq K$ имеем $\mathscr{S}_K(M) = \mathscr{S}_H(M)$, то в силу леммы 3 p^∞-независимость в группе K сводится к p^∞-независимости в группе H. Отсюда уже следует утверждение леммы.

Теперь выскажем в виде леммы одну из основных теорем из [5]. Для этого напомним, что группа G называется расширением группы H при помощи группы K, если G содержит подгруппу H' такую что $H \cong H'$ и $G/H' \cong K$. О периодической группе P скажем, что она Π-примарна, где Π — некоторое непустое множество простых чисел, если порядок любого элемента группы P можно представить в виде произведения степеней простых чисел из Π. Группа G называется расщепляемой, если периодическая часть P группы G служит прямым слагаемым в G. В заключение ещё отметим, что под „счетностью" будем понимать всюду или конечность, или же счетную бесконечность.

Лемма 8. *Пусть G — группа с периодической частью P, пусть G содержит расщепляемую подгруппу H вида $H = A \dotplus Q$, где A — однородная вполне разложимая группа без кручения и $Q \subseteq P$, и пусть G/H является периодической Π-примарной группой, где Π — конечное множество простых чисел. Если G/H служит расширением группы с ограниченными в совокупности порядками элементов при помощи счётной группы, если для каждого $p \in \Pi$ подгруппа $\{H, P\}/P$ p^∞-независима в G/P и если порядки элементов группы P/Q ограничены в совокупности, то группа G расщепляема, $G = A_0 \dotplus P$ и $A_0 \cong A$.*

(Смотри [5], теорему 13.)

Пусть $\mathfrak{m}$ — некоторое бесконечное кардинальное число. Группа без кручения называется $\mathfrak{m}$-сепарабельной (смотри [1], проблему 29), если каждое множество элементов из G, мощности меньшей $\mathfrak{m}$, содержится в некотором вполне разложимом прямом слагаемом группы G; $\aleph_0$-сепарабельная группа называется просто сепарабельной.

Теорема 1. *Пусть G — группа без кручения, содержащая однородную $\mathfrak{m}$-сепарабельную подгруппу H, и пусть G/H — периодическая Π-примарная группа мощности меньшей $\mathfrak{m}$, где Π — конечное множество простых чисел. Если G/H служит расширением группы с ограниченными в совокупности порядками элементов при помощи счётной группы и если подгруппа H p^∞-независима в G для каждого $p \in \Pi$, то $G \cong H$. Даже существуют подгруппы G_0, H_0 и K группы G такие, что $G = G_0 \dotplus K$, $H = H_0 \dotplus K$, $H_0 \subseteq G_0$, $H_0 \cong G_0$, и группы G_0, H_0 вполне разложимы.*

Доказательство. В каждом смежном классе $\bar{y}$ фактор-группы $\bar{G} = G/H$ выберем некоторый элемент в качестве представителя. Если M — множество всех выбраных представителей, то обозначим $S = \mathscr{S}_G(M)$ и $T = S \cap H$. Значит,

T является сервантной подгруппой в H. Для каждого $y \in M$ положим $n_y = O(\bar{y})$; это значит, что $n_y y \in H$ $(y \in M)$.

Теперь убедимся в том, что $T = \mathscr{S}_H(n_y y;\ y \in M)$.

Так как подгруппа T сервантна в H и так как $n_y y \in S \cap H = T$ $(y \in M)$, то необходимо будет

$$\mathscr{S}_H(n_y y;\ y \in M) \subseteq T.$$

Пусть теперь $g \in T$. Итак, $g \in S$, следовательно, имеет место соотношение вида

$$kg = k_1 y_1 + k_2 y_2 + \ldots + k_r y_r, \tag{5}$$

где $y_i \in M$ и $k \neq 0$, k_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ — удобные целые рациональные числа. Если n — натуральное число такое, что $n_{y_i} \mid n$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, то из (5) следует

$$nkg = k_1 n y_1 + \ldots + k_r n y_r \in \mathscr{S}_H(n_y y;\ y \in M),$$

или, $g \in \mathscr{S}_H(n_y y;\ y \in M)$, так как $g \in H$. Это значит, что имеет место доказываемое равенство.

Так как мощность множества M меньше $\mathfrak{m}$, то существует вполне разложимое прямое слагаемое H_0 группы H такое, что $n_y y \in H$ $(y \in M)$. Следовательно, можем писать $H = H_0 \dotplus K$, и притом $T \subseteq H_0$.

Если положим $G_0 = \{S, H_0\}$, то имеем

$$G = \{S, H\} = \{G_0, K\}. \tag{6}$$

Пусть $g \in G_0 \cap K$. Так как $g \in G_0 = \{S, H_0\}$, то можно писать $g = s + h_0$, где $s \in S$, $h_0 \in H_0$. Так как

$$S/T = S/(H \cap S) \cong \{H, S\}/H = G/H,$$

то, ввиду периодичности G/H, существует натуральное число m такое, что $ms \in T \subseteq H_0$, итак, $mg = ms + mh_0 \in H_0$. Но одновременно имеем $g \in K$ и $mg \in K$, следовательно, $mg \in H_0 \cap K = (\mathit{0})$; это значит, что $g = \mathit{0}$. Этим мы доказали, что $G_0 \cap K = (\mathit{0})$, итак, в силу (6) имеем

$$G = G_0 \dotplus K. \tag{7}$$

Так как $H_0 \subseteq G_0$, то имеет место соотношение

$$G/H = (G_0 \dotplus K)/(H_0 \dotplus K) \cong G_0/H_0;$$

отсюда вытекает, что G_0/H_0 является периодической Π-примарной группой, служащей расширением группы с ограниченными в совокупности порядками элементов при помощи счётной группы. Пусть $p \in \Pi$. Так как подгруппа H p^∞-независима в G, то такой же будет по лемме 7 подгруппа H_0 в группе G

и тем более в группе G_0. Если применим к группе G_0 и к её подгруппе H_0 лемму 8, то получим $G_0 \cong H_0$, и в силу (7) имеем

$$G = G_0 \dotplus K \cong H_0 \dotplus K = H .$$

Этим теорема полностью доказана.

Теорема 2. *Пусть G — группа без кручения, содержащая однородную $\mathfrak{m}$-сепарабельную подгруппу H, и пусть G/H — периодическая Π-примарная группа мощности меньшей $\mathfrak{m}$, где Π — конечное множество простых чисел. Если G/H служит расширением группы с ограниченными в совокупности порядками элементов при помощи счётной редуцированной группы, то $G \cong H$. Даже существуют подгруппы G_0, H_0 и K группы G такие, что $G = G_0 \dotplus K$, $H = H_0 \dotplus K$, $H_0 \subseteq G_0$, $G_0 \cong H_0$, и группы G_0, H_0 вполне разложимы.*

Доказательство. Не умаляя общности, можем предполагать, что для каждого $p \in \Pi$ p-примарное слагаемое группы G/H является ненулевой группой. Так как расширение группы с ограниченными в совокупности порядками элементов при помощи редуцированной группы должно быть опять редуцированной группой, то по лемме 6 для каждого $p \in \Pi$ подгруппа H p^∞-независима в G. Доказываемое утверждение представляет теперь простое следствие теоремы 1.

Замечание. Частным случаем теоремы 2 является утверждение, что если группа без кручения G служит расширением однородной сепарабельной группы H при помощи конечной группы, то $G \cong H$. Но выпущением условия однородности из этого последнего утверждения уже получим неправильное утверждение, как вытекает из следующего примера.

Пример. Пусть J_1, J_2 — две группы без кручения ранга 1 несравнимых типов, обе без ненулевых элементов бесконечной p-высоты (p — определенное простое число). Выберем элементы $x_i \in J_i$ $(i = 1, 2)$ так, что элемент x_i обладает нулевой p-высотой в J_i $(i = 1, 2)$, и построим группу $H = J_1 \dotplus J_2$. Группу G теперь определим так, что $G = \{H, y\}$, где $py = x_1 + x_2$. Можно убедиться в том, что G является неразложимой (в прямую сумму) группой без кручения ранга 2 и $G/H \cong \mathscr{C}(p)$. Значит, группа без кручения G представляет расширение сепарабельной группы H при помощи конечной группы $\mathscr{C}(p)$, но группы G, H неизоморфны. Даже верно утверждение, что группа G уже несепарабельна.

Теперь обратим внимание на смешанные группы и будем заниматься прежде всего их расщепляемостью.

Лемма 9. *Пусть G — смешанная группа, периодическая часть P которой p-примарна, и пусть в G имеется расщепляемая подгруппа H вида $H = A \dotplus P$, где A — однородная $\mathfrak{m}$-сепарабельная группа без кручения. Если G/H — периодическая p-примарная группа мощности меньшей $\mathfrak{m}$, являющаяся расширением группы с ограниченными в совокупности порядками элементов при помощи счётной группы, и если подгруппа H/P p^∞-независима в G/P, то $G = A_0 \dotplus P$ и $A_0 \cong A$.*

Доказательство. Если положим $\bar{G} = G/P$ и $\bar{H} = H/P$, то $\bar{G}$, $\bar{H}$ являются группами без кручения, $\bar{H} \cong A$ и имеет место изоморфизм

$$\bar{G}/\bar{H} \cong G/H \; ; \tag{8}$$

значит, к группам $\bar{G}$ и $\bar{H}$ можно применить теорему 1. Таким образом $\bar{G} \cong \bar{H}$, и существуют подгруппы $\bar{G}_0$, $\bar{H}_0$ и $\bar{K}$ группы $\bar{G}$ такие, что $\bar{G} = \bar{G}_0 \dotplus \bar{K}$, $\bar{H} = \bar{H}_0 \dotplus \bar{K}$, $\bar{H}_0 \subseteq \bar{G}_0$, и притом группа $\bar{H}_0$ вполне разложима (и однородна, будучи прямым слагаемым однородной группы $\bar{H} \cong A$). Отсюда и из (8) следует изоморфизм

$$\bar{G}_0/\bar{H}_0 \cong G/H \, . \tag{9}$$

Если H_0 — подгруппа группы H такая, что $P \subseteq H_0$ и $H_0/P = \bar{H}_0$, то $H_0 = A' \dotplus P$, где $A' = A \cap H_0$. Далее, символом G_0 обозначим подгруппу в G такую, что $P \subseteq G_0$ и $G_0/P = \bar{G}_0$. В силу леммы 7 и p^∞-независимости подгруппы $\bar{H}$ в $\bar{G}$ группа $\bar{H}_0$ должна быть p^∞-независимой в $\bar{G}$ и, следовательно, в группе $\bar{G}_0$. Так как группа $A' \cong H_0/P = \bar{H}_0$ вполне разложима и однородна, то можно в силу (9) применить к группам G_0 и H_0 лемму 8, и получим разложение $G_0 = A^* \dotplus P$, где $A^* \cong A'$.

Если K — подгруппа группы H такая, что $P \subseteq K$ и $K/P = \bar{K}$, то $K = A^{**} \dotplus P$, где $A^{**} = A \cap K$. Так как имеем

$$\{A^*, A^{**}, P\}/P = \{\bar{G}_0, \bar{K}\} = G/P \, ,$$

то должно уже быть

$$\{A^*, A^{**}, P\} = G \, . \tag{10}$$

Если теперь $y \in A^* \cap A^{**}$, то $\bar{y} = y + P \in \bar{G}_0 \cap \bar{K} = (\boldsymbol{0})$, или, $\bar{y} = \boldsymbol{0}$; итак, $y \in P$. Но так как A^* и A^{**} — группы без кручения, то будет уже $y = \boldsymbol{0}$, или, $A^* \cap A^{**} = (\boldsymbol{0})$. Это значит, что $\{A^*, A^{**}\} = A^* \dotplus A^{**}$, или, $A_0 = \{A^*, A^{**}\}$ является группой без кручения. Отсюда и из (10) следует, что $G = \{A_0, P\} = A_0 \dotplus P$. Так как

$$A_0 \cong \bar{G} \cong \bar{H} \cong A \, ,$$

то лемма полностью доказана.

Лемма 10. *Лемма 9 остается справедливой, если выпустить требование p-примарности группы P.*

Доказательство. Если $P^{(p)}$ — p-примарная часть периодической группы P, то можно писать $P = P^{(p)} \dotplus P^*$, и, следовательно, $H = A \dotplus P^{(p)} \dotplus P^*$. Так как подгруппа P^* служит прямым слагаемым для группы H и так как G/H p-примарна, то P^* служит одновременно прямым слагаемым для всей группы G (смотри [4], лемму 2); итак, можно писать

$$G = G_1 \dotplus P^* \, , \tag{11}$$

и, кроме того,

$$H = H_1 \dotplus P^*, \quad \text{где} \quad H_1 = G_1 \cap H. \tag{12}$$

Из прямых разложений (12) и (11) следует, что $P^{(p)}$ служит периодической частью как для группы G_1, так для её подгруппы H_1. В силу (12) имеем

$$H_1 \dotplus P^* = H = A \dotplus P = A \dotplus P^{(p)} \dotplus P^*,$$

или, можно писать

$$H_1 = A_1 \dotplus P^{(p)}, \quad A_1 \cong A. \tag{13}$$

Итак, из (11), в силу теоремы об изоморфизме, следует изоморфизм

$$G/P = (G_1 \dotplus P^*)/(P^{(p)} \dotplus P^*) \cong G_1/P^{(p)}. \tag{14}$$

Но если взять в (14) в качестве изоморфизма так называемое каноническое отображение, то этот изоморфизм отображает подгруппу H/P группы G/P на подгруппу $H_1/P^{(p)}$ группы $G_1/P^{(p)}$. Отсюда и из p^∞-независимости подгруппы H/P в G/P следует p^∞-независимость подгруппы $H_1/P^{(p)}$ в группе $G_1/P^{(p)}$. В силу (11) и (12) имеет место изоморфизм $G/H \cong G_1/H_1$. Если обратим ещё внимание на (13), то видим, что группы G_1 и H_1 удовлетворяют всем условиям леммы 9, итак, $G_1 = A_0 \dotplus P^{(p)}$, где $A_0 \cong A_1 \cong A$. Отсюда и из (11) уже следует утверждение леммы.

Лемма 11. *Пусть G — группа без кручения и пусть H её подгруппа, p^∞-независимая в G. Если K — подгруппа в G такая, что $H \subseteq K$ и K/H является периодической группой, p-примарное слагаемое которой является нулевой группой, то подгруппа K p^∞-независима в G.*

Доказательство. Прежде всего докажем, что в K нет ненулевых элементов бесконечной p-высоты в K. Предположим наоборот, что какой-то элемент $g \in K$, $g \neq 0$, обладает бесконечной p-высотой в K. Так как G/H является периодической, то существует натуральное число n такое, что $ng = h \in H$. Ненулевой элемент h обладает в H только конечной p-высотой k, но в K бесконечной. Это значит, что решение уравнения $p^k x = h$ находится в H, но решение уравнения $p^{k+1}x = h$ надо уже искать в $K - H$. Пусть $h_0 \in K - H$ такой элемент, что $p^{k+1}h_0 = h$; итак, $p^k(ph_0) = h$. По сказанному должно быть $ph_0 \in H$, по $h_0 \in K - H$, значит, p-примарное слагаемое группы K/H содержит ненулевой элемент $h_0 + H$, и это противоречит предположению. Следовательно, группа K не содержит ненулевых элементов бесконечной p-высоты в K.

Пусть теперь $g_i \in K$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ — элементы, неявляющиеся p^∞-независимыми в G. Тогда имеет место некоторое соотношение вида

$$\mathfrak{a}_1 g_1 + \mathfrak{a}_2 g_2 + \ldots + \mathfrak{a}_r g_r \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\; p^\infty)_G, \tag{15}$$

где по крайней мере одно из целых p-адических чисел $\mathfrak{a}_i$ будет ненулевым. Группа G/H — периодическая, значит, существует натуральное число n, для которого $ng_i \in H$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. В силу (15) имеем

$$\mathfrak{a}_1(ng_1) + \mathfrak{a}_2(ng_2) + \ldots + \mathfrak{a}_r(ng_r) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ p^\infty)_G \ ;$$

итак, элементы ng_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ p^∞-зависимы в G. Но так как подгруппа H p^∞-независима в G и так как $ng_i \in H$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, то элементы ng_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ необходимо будут p^∞-зависимыми в H и, следовательно, в K. Это значит, что элементы $g_1, g_2, \ldots, g_r$ сами в группе K p^∞-зависимы.

Этим лемма полностью доказана.

Раньше формулировки следующей теоремы напомним, что если некоторая периодическая группа служит расширением группы с ограниченными в совокупности порядками элементов при помощи счётной группы, то тоже самое имеет место, как легко видеть, для каждого её примарного слагаемого.

Теорема 3. *Пусть G — смешанная группа с периодической частью P, пусть в G имеется расщепляемая подгруппа H вида $H = A \dotplus Q$, где A — однородная $\mathfrak{m}$-сепарабельная группа без кручения и $Q \subseteq P$, и пусть G/H является периодической Π-примарной группой мощности меньшей $\mathfrak{m}$, где Π — конечное множество простых чисел. Если G/H служит расширением групы с ограниченными в совокупности порядками элементов при помощи счётной группы, если для каждого $p \in \Pi$ подгруппа $\{H, P\}/P$ p^∞-независима в G/P и если порядки элементов группы P/Q ограничены в совокупности, то $G = A_0 \dotplus P$, где $A_0 \cong A$.*

Доказательство. Теорему докажем индукцией по числу элементов множества Π.

Пусть $\Pi = (p)$. Если положим $K = \{H, P\} = \{A, P\} = A \dotplus P$, то имеем

$$G/K \cong (G/H)/(K/H)\,, \tag{16}$$

или, G/K является периодической p-примарной группой мощности меньшей $\mathfrak{m}$. Далее, имеет место изоморфизм

$$K/H = (A \dotplus P)/(A \dotplus Q) \cong P/Q\ ; \tag{17}$$

итак, порядки элементов группы K/H ограничены в совокупности. Отсюда и из (16) уже следует, что G/K является расширением группы с ограниченными в совокупности порядками элементов при помощи счётной группы (смотри [5], лемму 16). Теперь достаточно применить к группам G, K лемму 10.

Пусть теперь $\Pi = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, где $n > 1$, и пусть теорема справедлива всегда, когда соответствующее множество простых чисел содержит не больше чем $n - 1$ элементов. Если положим $K = \{H, P\} = A \dotplus P$, то имеют место соотношения (16) и (17), и G/K является периодической Π-примарной группой мощности меньшей $\mathfrak{m}$, служащей расширением группы с ограниченными в совокупности порядками элементов при помощи счётной группы (опять применяем лемму 16 из [5]). Итак, можем писать

$$G/K = \bar{G} = \bar{G}^{(p_1)} \dotplus \bar{G}^{(p_2)} \dotplus \ldots \dotplus \bar{G}^{(p_n)} . \tag{18}$$

Если положим еще $\bar{G}^{(p_1)} \dotplus \ldots \dotplus \bar{G}^{(p_{n-1})} = \bar{G}^*$, то имеем

$$\bar{G} = \bar{G}_* \dotplus \bar{G}^{(p_n)} . \tag{19}$$

Пусть G_* — подгруппа группы G такая, что $K \subseteq G_*$ и $G_*/K = \bar{G}_*$. Очевидно, к группе G_* и её подгруппе $K = \{H, P\}$ можно применить индуктивное предположение и имеем $G_* = A_* \dotplus P$, где $A_* \cong A$. Так как подгруппа $\{H, P\}/P = K/P$ p_n^∞-независима в G/P и так как

$$(G_*/P)/(K/P) \cong G_*/K = \bar{G}_* = \bar{G}^{(p_1)} \dotplus \ldots \dotplus \bar{G}^{(p_{n-1})} ,$$

то по лемме 11 подгруппа G_*/P также p_n^∞-независима в G/P. Притом в силу (19) имеем

$$G/G_* \cong (G/K)/(G_*/K) = \bar{G}/\bar{G}_* \cong \bar{G}^{(p_n)} ,$$

или, G/G_* является периодической p_n-примарной группой мощности меньшей чем $\mathfrak{m}$, служащей расширением группы с ограниченными в совокупности порядками элементов при помощи счётной группы. Если теперь применим к группе G и ее подгруппе $G_* = A_* \dotplus P$ лемму 10, то получаем разложение $G = A_0 \dotplus P$, где $A_0 \cong A_* \cong A$.

Доказательство индукцией завершено.

Теорема 4. *Пусть G — смешанная группа с периодической частью P, пусть в G имеется расщепляемая подгруппа H вида $H = A \dotplus Q$, где A — однородная $\mathfrak{m}$-сепарабельная группа без кручения и $Q \subseteq P$, и пусть G/H является периодической Π-примарной группой мощности меньшей $\mathfrak{m}$, где Π — конечное множество простых чисел. Если G/H служит расширением группы с ограниченными в совокупности порядками элементов при помощи счётной редуцированной группы и если порядки элементов группы P/Q ограничены в совокупности, то $G = A_0 \dotplus P$ и $A_0 \cong A$.*

Доказательство. Если опять положим $K = \{H, P\}$, то дубут выполнены соотношения (16) и (17). Кроме того, имеет место изоморфизм

$$(G/P)/(K/P) \cong G/K . \tag{20}$$

По предположению группа G/H редуцированна. Так как в силу (17) порядки элементов группы K/H ограничены в совокупности, то по (16) G/K является редуцированной периодической Π^*-примарной группой (смотри [5], лемму 19), где $\Pi^* \subseteq \Pi$; притом можно предполагать, что для каждого $p \in \Pi^*$ будет p-примарное слагаемое группы G/K ненулевой группой. Отсюда и из (20) в силу леммы 6 следует, что для каждого $p \in \Pi^*$ подгруппа K/P p^∞-независима в G/P. Так как G/K служит расширением группы с ограниченными в совокупности порядками элементов при помощи счётной группы (смотри доказательство теоремы 3) и так как $K = A \dotplus P$, то можно к группам G, K применить теорему 3. Этим утверждение теоремы доказано.

В заключение ещё отметим, что теоремы 1–4, доказанные в этой статье, представляют обобщение теорем 9, 10, 13 и 14 из [5]. Для этого достаточно напомнить, что вполне разложимая группа без кручения будет $\mathfrak{m}$-сепарабельной для каждого бесконечного кардинального числа $\mathfrak{m}$. Но это значит, что в формулировке теорем 3, 4 нельзя выпустить ни одного из следующих условий: Множество простых чисел Π конечно, для каждого $p \in \Pi$ подгруппа $\{H, P\}/P$ p^∞-независима в G/P (соотв. G/H редуцирована), порядки элементов группы P/Q ограничены в совокупности. Именно в [5] было на примерах доказано,что выпустив любое из этих трех требований, можем уже вызвать нерасщепляемость группы G.

Литература

[1] *L. Fuchs:* Abelian groups, Budapest, 1958.

[2] *Л. Прохазка:* О p-ранге абелевых групп без кручения конечного ранга, Чех. мат. жур. *12* (*87*) 1962, 3–43.

[3] *L. Procházka:* Bemerkung über den p-Rang torsionsfreier abelscher Gruppen unendlichen Ranges, Чех. мат. жур. *13* (*88*) 1963, 1–23.

[4] *Л. Прохазка:* Заметка о расщепляемости смешанных абелевых групп, Чех. мат. жур. *10* (*85*) 1960, 479–492.

[5] *Л. Прохазка:* Об однородных абелевых группах без кручения, Чех. мат. жур. *14* (*89*) 1964, 171–202.

[6] *G. Szekeres:* Countable abelian groups without torsion, Duke Math. J., *15*, 1948, 293–305.

Zusammenfassung

BEMERKUNG ÜBER $\mathfrak{m}$-SEPARABLE TORSIONSFREIE ABELSCHE GRUPPEN

LADISLAV PROCHÁZKA, Praha

Unter einer Gruppe braucht man überall eine abelsche Gruppe meinen. Ausserdem wird durch p immer eine Primzahl und durch $\mathfrak{m}$ eine unendliche Kardinalzahl bezeichnet.

Ist G eine Gruppe, n eine natürliche Zahl und $g \in G$, so schreiben wir $g \equiv 0 \pmod{n}_G$, falls die Gleichung $nx = g$ in G lösbar ist. G sei eine torsionsfreie Gruppe, $g_i \in G$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ und α_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ seien ganze p-adische Zahlen, die als

p-adisch konvergente Folgen $\mathfrak{a}_i = (a_i^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ ganzer rationalen Zahlen ausgedrückt sind; sind alle Relationen

$$\sum_{i=1}^{r} a_i^{(k)} g_i \equiv 0 (\text{mod } p^k)_G \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

gleichzeitig erfüllt, so schreibt man die Formel (1). Die gegebene Elemente $g_i \in G$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ heissen p^{∞}-unabhängig in G, wenn es keine Relation der Form (1) gibt, in der mindestens eine Zahl $\mathfrak{a}_i$ $(1 \leqq i \leqq r)$ von Null verschieden ist. Der Begriff der p^{∞}-Unabhängigkeit lässt sich auf beliebige menge M von G übertragen.

Definition. Es sei G eine torsionsfreie Gruppe und H eine ihre Untergruppe. Die Untergruppe H heisst p^{∞}-unabhängig in G, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) Jedes von Null verschiedenes Element von H ist von endlicher p-Höhe in H,

b) jede in H p^{∞}-unabhängige Menge von H muss auch in G p^{∞}-unabhängig sein.

Die folgenden Sätze werden hier bewiesen.

Sätze 1,2. *Es sei G eine torsionsfreie Gruppe und H eine solche ihre homogene $\mathfrak{m}$-separable Untergruppe, dass G/H eine periodische Π-primäre Gruppe von Mächtigkeit kleiner als $\mathfrak{m}$ ist, wobei Π eine endliche Primzahlmenge bildet.*

a) *Stellt G/H eine Erweiterung einer periodischen ordnungsbeschränkten Gruppe mit einer abzählbaren Gruppe dar und ist für jede $p \in \Pi$ die Untergruppe H p^{∞}-unabhängig in G, so ist $G \cong H$.*

b) *Stellt G/H eine Erweiterung einer periodischen ordnungsbeschränkten Gruppe mit einer reduzierten abzählbaren Gruppe dar, so ist $G \cong H$.*

Sätze 3,4. *Es sei G eine gemischte Gruppe mit der maximalen periodischen Untergruppe P und sei H eine spaltbare Untergruppe in G der Form $H = A \dotplus Q$, wo A eine homogene $\mathfrak{m}$-separable torsionsfreie und Q eine periodische Gruppe ist. Es sei weiter G/H eine periodische Π-primäre Gruppe von Mächtigkeit kleiner als $\mathfrak{m}$, wobei Π eine endliche Primzahlmenge bildet, und P/Q sei ordnungsbeschränkt.*

a) *Stellt G/H eine Erweiterung einer periodischen ordnungsbeschränkten Gruppe mit einer abzählbaren Gruppe dar und ist für jede $p \in \Pi$ die Untergruppe $\{H, P\}/P$ p^{∞}-unabhängig in G/P, so ist $G = A_0 \dotplus P$, und $A_0 \cong A$.*

b) *Stellt G/H eine Erweiterung einer periodischen ordnungsbeschränkten Gruppe mit einer reduzierten abzählbaren Gruppe dar, so ist $G = A_0 \dotplus P$, und $A_0 \cong A$.*