Czechoslovak Mathematical Journal

Zbyněk Nádeník

Die Ungleichungen für die Maßzahlen der geschlossenen Kanalflächen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 16 (1966), No. 2, 296–306

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100731

Чехословацкий математический журнал, т. 16 (91) 1966, Прага

DIE UNGLEICHUNGEN FÜR DIE MAßZAHLEN DER GESCHLOSSENEN KANALFLÄCHEN

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Eingelangt am 25. Mai 1965)

Es sei C eine geschlossene Kurve des n-dimensionalen euklidischen Raumes ($n \geqq 3$), welche eine Parameterdarstellung dritter Klasse $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s)$ und durchwegs positive erste Krümmung $k = k(s)$ besitzt; dabei ist s bzw. l die Bogen-bzw. die Gesamtlänge von C. Die Ableitungen nach s werden stets durch Striche gekennzeichnet. Weiter sei $\varrho = \varrho(s)$ eine periodische Funktion zweiter Klasse mit der Periode l und mit folgenden Eigenschaften:

$$(1) \qquad \varrho(s) > 0\,, \quad |\varrho'(s)| < 1\,, \quad 1 - (\varrho\varrho')' - k\varrho[1 - \varrho'^2]^{1/2} > 0\,.$$

Wir werden eine veränderliche $(n-1)$-dimensionale Kugelfläche mit dem Mittelpunkte in dem Punkte der Kurve C mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{x}(s)$ und mit dem Radius $\varrho(s)$ betrachten. Ihre Charakteristik ist wegen $|\varrho'(s)| < 1$ eine $(n-2)$-dimensionale Kugelfläche. Wir bezeichnen sie mit $\pi_{n-2}(s)$ und die durch $\pi_{n-2}(s)$ begrenzte $(n-1)$-dimensionale Kugel mit $\varkappa_{n-1}(s)$. (Für $n = 3$ ist freilich $\pi_1(s)$ bzw. $\varkappa_2(s)$ eine Kreislinie bzw. ein Kreis.)

Der Gegenstand dieser Note ist der Kanalkörper $\mathscr{K} = \bigcup \{\varkappa_{n-1}(s) : s \in \langle 0, l)\}$ und seine Berandung $\mathscr{S} = \bigcup \{\pi_{n-2}(s) : s \in \langle 0, l)\}$. Diese geschlossene Kanalfläche ist (im differentialgeometrischen Sinne) singularitätenfrei (s. Abschn. 1) und besitzt durchwegs stetige Hauptkrümmungen $1/R_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ (s. Abschn. 3). Wir werden noch voraussetzen, daß der Körper $\mathscr{K}$ sich nicht durchdringt.

Es sei W_0 das Volumen von $\mathscr{K}$, weiter W_1 die mit $1/n$ multiplizierte Oberfläche von $\mathscr{S}$ und endlich W_i $(i = 2, \ldots, n)$ das mit $[n\binom{n-1}{n-i}]^{-1}$ multiplizierte i-te Krümmungsintegral von S; also

$$(2) \qquad W_i = \frac{1}{n\binom{n-1}{n-i}} \int_{\mathscr{S}} \left\{\frac{1}{R_1} \cdots \frac{1}{R_{i-1}}\right\} \mathrm{d}\mathscr{S} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

in der Bezeichnung aus [1], S. 62, 63 und mit $\{R_1^{-1} \ldots R_{i-1}^{-1}\} = 1$ für $i = 1$. Daß man gewisse Vielfache der Krümmungsintegrale benutzt, wird später durch einen engen

Zusammenhang mit den Quermaßintegralen eines konvexen Körpers motiviert werden.

Das Volumen des Kanalkörpers $\mathscr{K}$ wird in dem Abschn. 1 berechnet und die Abschn. 2 und 3 enthalten den Beweis, daß für die Funktionale $W_i\,(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ folgende Formeln gelten:

$$(\mathrm{I}) \qquad W_i = \omega_{n-1} \frac{n-i}{n} \int_0^l \varrho^{n-i-1}(s)\, P(s)\, \mathrm{d}s \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

wo

$$(\mathrm{I}^*) \qquad P(s) = 1 + (n-1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)(2m+2)} \begin{pmatrix} \frac{n-3}{2} \\ m \end{pmatrix} \varrho'^{2m+2}(s) > 0\,;$$

ω_{n-1} bedeutet das Volumen der $(n-1)$-dimensinalen Einheitskugel.

Diese Integraldarstellungen ermöglichen – ähnlich wie in der von A. DINGHAS [2] entwickelten Theorie der Maßgeometrie der konvexen Rotationskörper – allgemeine lineare Ungleichungen für $W_i\ (i = 0, 1, \ldots, n-1)$ nach dem folgenden Hauptsatze zu gewinnen (s. Abschn. 6):

Es sei

$$(3) \qquad Q(x, y) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (n-i)\, y^i x^{n-i-1}$$

ein Polynom in x und y (mit konstanten Koeffizienten λ_i, die nicht alle gleich Null sind), *welches zugleich für gewisse y und für* $\min\limits_{s \in \langle 0, l \rangle} \varrho(s) \leqq x \leqq \max\limits_{s \in \langle 0, l \rangle} \varrho(s)$ *nichtnegativ ist. Dann ist für diese y*

$$(\mathrm{II}) \qquad \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i y^i W_i \geqq 0$$

und das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn der Kanalkörper $\mathscr{K}$ ein Röhrenkörper ist, dessen Halbmesser ϱ der Gleichung $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \lambda_i (n-i)\, y^i \varrho^{n-i-1} = 0$ *genügt.*

In (II) sind besonders folgende Spezialfälle enthalten:

Es seien α, β, γ ganze Zahlen, $0 \leqq \alpha < \beta < \gamma \leqq n-1$. Für beliebiges positives y ist dann

$$(\mathrm{III}) \qquad \frac{\beta-\alpha}{n-\gamma}\, y^\gamma W_\gamma + \frac{\gamma-\beta}{n-\alpha}\, y^\alpha W_\alpha + \frac{\alpha-\gamma}{n-\beta}\, y^\beta W_\beta \geqq 0\,,$$

für jedes positive $y \leqq \min_{s \in \langle 0, l \rangle} \varrho(s)$ *ist*

(IV) $$(\beta - \alpha)\, y^\gamma W_\gamma + (\gamma - \beta)\, y^\alpha W_\alpha + (\alpha - \gamma)\, y^\beta W_\beta \geqq 0$$

und wieder für beliebiges positives y *ist*

(V) $$\frac{\beta - \alpha}{(n - \gamma)^2}\, y^\gamma W_\gamma + \frac{\gamma - \beta}{(n - \alpha)^2}\, y^\alpha W_\alpha + \frac{\alpha - \gamma}{(n - \beta)^2}\, y^\beta W_\beta > 0\,.$$

Endlich ist noch

(VI) $$W_\alpha^{\beta - \gamma} W_\beta^{\gamma - \alpha} W_\gamma^{\alpha - \beta} \leqq (n - \alpha)^{\beta - \gamma} (n - \beta)^{\gamma - \alpha} (n - \gamma)^{\alpha - \beta}\,.$$

Die zugehörigen Extremalkörper sind in den Fällen (III), (IV), (VI) *immer die Röhrenkörper, in* (III) *und* (IV) *noch mit* $\varrho = y$.

Die Ungleichungen (III) – (VI) haben den ähnlichen Aufbau wie die Ungleichungen von H. HADWIGER [5] für die Quermaßintegrale der konvexen Rotationskörper und sie werden in Abschn. 4 – 6 bewiesen.

Im Falle des dreidimensionalen Raumes resultieren aus (I) und (I*) für das Volumen V, die Oberfläche O und das Integral M der mittleren Krümmung des Kanalkörpers $\mathscr{K}$ die Integralformeln

(4) $$M = \pi \int_0^l (1 + \varrho'^2)\, ds\,, \quad O = 2\pi \int_0^l \varrho(1 + \varrho'^2)\, ds\,, \quad V = \pi \int_0^l \varrho^2(1 + \varrho'^2)\, ds$$

und aus (VI) die Ungleichung

(5) $$4MV - O^2 \geqq 0\,.$$

Weitere Abschnitte enthalten die Beweise der in dieser Einleitung angeführten Behauptungen und Sätze.

1. Wir setzen $\mathbf{t}(s) = \mathbf{x}'(s)$, $\mathbf{n}_1(s) = k^{-1}(s)\, \mathbf{t}'(s)$ und wählen weitere beliebige Einheitsvektoren $\mathbf{n}_2(s), \ldots, \mathbf{n}_{n-1}(s)$ erster Klasse so, daß

$$\mathbf{t}(s) \,.\, \mathbf{n}_i(s) = 0, \ \mathbf{n}_1(s) \,.\, \mathbf{n}_i(s) = 0, \ \mathbf{n}_i(s) \,.\, \mathbf{n}_j(s) = 0 \quad (i, j = 2, 3, \ldots, n - 1;\ i \neq j)\,.$$

Dann besitzt der Kanalkörper $\mathscr{K}$ folgende Parameterdarstellung:

(1,1) $$\mathbf{Y}(s, \lambda, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}) = \mathbf{x}(s) - \varrho(s)\, \varrho'(s)\, \mathbf{t}(s) + \lambda\, \varrho(s) \left[1 - \varrho'^2(s)\right]^{1/2} \mathbf{z}(s, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2})\,,$$

$$s \in \langle 0, l)\,; \quad \lambda \in \langle 0, 1\rangle\,; \quad \varphi_1 \in \langle 0, 2\pi)\,; \quad \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2} \in \langle 0, \pi\rangle\,,$$

wo

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n-1} z_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2})\, \mathbf{n}_i(s) \tag{1,2}$$

die Parameterdarstellung der $(n - 2)$-dimensionalen Einheitskugelfläche ist und $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}$ ihre Polarkoordinaten bedeuten.

Aus (1,1) und (1,2) folgt erstens

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial s} = f\mathbf{t} + \sum_{i=1}^{n-1} (.)\, \mathbf{n}_i \tag{1,3}$$

mit

$$f = f(s, \lambda, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}) = 1 - (\varrho\varrho')' - \lambda z_1 k \varrho [1 - \varrho'^2]^{1/2} > 0\,, \tag{1,4}$$

und zweitens

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \varphi_j} = \lambda \varrho [1 - \varrho'^2]^{1/2} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \varphi_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, n-2)\,, \tag{1,5}$$

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \lambda} = \varrho [1 - \varrho'^2]^{1/2}\, \mathbf{z}\,, \tag{1,6}$$

die Ungleichung in (1,4) ergibt sich wegen $|z_1| \leqq 1$ und $0 \leqq \lambda \leqq 1$ aus (1).

Die Parameterdarstellung der Kanalfläche $\mathscr{S}$ bekommt man aus (1,1) für $\lambda = 1$. Aus (1,3)–(1,5) mit $\lambda = 1$ und aus den ersten Ungleichungen (1) folgt, daß die Fläche $\mathscr{S}$ singularitätenfrei ist.

Aus (1,3)–(1,6) gewinnt man

$$\begin{aligned} &\left| \left[\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \lambda} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \varphi_1} \cdots \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \varphi_{n-2}} \right] \right| = \\ &= \lambda^{n-2} \varrho^{n-1} [1 - \varrho'^2]^{(n-1)/2} \{1 - (\varrho\varrho')' - \lambda z_1 k \varrho [1 - \varrho'^2]^{1/2}\} \,. \\ &\quad . \left| \left[\mathbf{tz} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \varphi_1} \cdots \frac{\partial \mathbf{z}}{\varphi_{n-2}} \right] \right| . \end{aligned} \tag{1,7}$$

Weil das über die ganze Oberfläche der Einheitskugelfläche (1,2) erstreckte Integral von z_1 evident gleich Null ist, so bekommt man aus (1,7) für das Volumen W_0 des Kanalkörpers $\mathscr{K}$ nach einfachen Rechnungen die Formel

$$W_0 = \omega_{n-1} \int_0^l \varrho^{n-1} [1 - (\varrho\varrho')'] \, [1 - \varrho'^2]^{(n-1)/2} \, ds\,; \tag{1,8}$$

ω_{n-1} bedeutet das Volumen der $(n - 1)$-dimensionalen Einheitskugel .

2. Nach (1,8) ist wegen zweiter Ungleichung (1) und wegen der Periodizität der Funktion $\varrho(s)$

$$\frac{1}{\omega_{n-1}} W_0 = \int_0^l \{\varrho^{n-1}(1 - \varrho'^2)^{(n+1)/2} - \varrho^n(1 - \varrho'^2)^{(n-1)/2} \varrho''\} \, ds =$$

$$= \int_0^l \left\{\varrho^{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{\frac{n+1}{2}}{m} \varrho'^{2m}\right\} ds - \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{\frac{n-1}{2}}{m} \int_0^l \varrho^n \varrho'^{2m} \varrho'' \, ds =$$

$$= \int_0^l \left\{\varrho^{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{\frac{n+1}{2}}{m} \varrho'^{2m}\right\} ds - \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{\frac{n-1}{2}}{m} \frac{n}{2m+1} \, .$$

$$\cdot \int_0^l \varrho^{n-1} \varrho'^{2m+2} \, ds =$$

$$= \int_0^l \varrho^{n-1} \left\{1 + \sum_{m=0}^{\infty} \left[(-1)^{m+1} \binom{\frac{n+1}{2}}{m+1} + (-1)^m \binom{\frac{n-1}{2}}{m} \frac{n}{2m+1}\right] \varrho'^{2m+2}\right\} ds \, ;$$

man bestätigt nämlich wieder wegen $|\varrho'(s)| < 1$, daß die gliedweise Integration hier möglich ist. Daraus folgt schon die Formel (I) für $i = 0$ mit (I*), wo noch die letzte Ungleichung zu beweisen bleibt.

Wir betrachten die für $|x| < 1$ konvergente Potenzreihe

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)(2m+2)} \binom{\frac{n-3}{2}}{m} x^{2m+2} \, . \tag{2,1}$$

Wir haben $F(0) = 0$, $[d\, F(x)/dx]_{x=0} = 0$ und offensichtlich $d^2 F(x)/dx^2 = (1 - x^2)^{(n-3)/2} > 0$ für $|x| < 1$. Es ist also auch $F(x) \geqq 0$ für $|x| < 1$. Daraus und aus (2,1) folgt wegen der zweiten Bedingung (1) auch die Ungleichung in (I*).

3. Der Kürze halber nehmen wir in diesem Abschnitt an, daß in (1,1), (1,3)–(1,5) durchwegs $\lambda = 1$ gesetzt wird. Dann ist $\boldsymbol{Y}$ in (1,2) der Ortsvektor des Punktes der Kanalfläche $\mathscr{S}$ und der Normalenvektor von $\mathscr{S}$ ist

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{\varrho}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{Y}) \, . \tag{3,1}$$

Demgemäß

$$d\boldsymbol{N} = -\frac{1}{\varrho} \, d\boldsymbol{Y} + \frac{1}{\varrho}(\boldsymbol{t} - \varrho' \boldsymbol{N}) \, ds \, . \tag{3,2}$$

Aus (3,1) und (1,1) mit (1,2) ergibt sich die Orthogonalität der Vektoren $\mathbf{t} - \varrho'\mathbf{N}$ und $\mathbf{N}$ und nach (1,1)-(1,5) und (3,1) ist deshalb

$$\text{(3,3)} \qquad \mathbf{t} - \varrho'\mathbf{N} = \frac{1 - \varrho'^2}{f} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial s} + \sum_{j=1}^{n-2} y_j \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \varphi_j} ;$$

die Skalarfaktoren y_j werden uns nicht interessieren. Nach dem Einsetzen aus (3,3) in (3,2) folgt schon leicht, daß auch

$$\text{(3,4)} \qquad \mathrm{d}\mathbf{N} = \left(-\frac{1}{\varrho} + \frac{1 - \varrho'^2}{\varrho f} \right) \mathrm{d}\mathbf{Y} + \sum_{j=1}^{n-2} \left(\frac{y_j}{\varrho} \mathrm{d}s - \frac{1 - \varrho'^2}{\varrho f} \mathrm{d}\varphi_j \right) \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \varphi_j} .$$

Die Relationen (3,2) und (3,4) bestimmen nach den mehrdimensionalen Analogien der Formeln von Rodrigues die Hauptkrümmungen $1/R_1, \ldots, 1/R_{n-1}$ (und freilich auch die Hauptkrümmungsrichtungen) der Kanalfläche $\mathscr{S}$; es ist nämlich mit Rücksicht auf (1,4)

$$\text{(3,5)} \qquad \frac{1}{R_1} = \ldots = \frac{1}{R_{n-2}} = \frac{1}{\varrho}, \quad \frac{1}{R_{n-1}} = -\frac{\varrho'' + z_1 k (1 - \varrho'^2)^{1/2}}{f} .$$

Dies ist eine n-dimensionale Analogie eines Satzes von A. Voss [7] über die Unabhängigkeit der Hauptkrümmungen einer Kanalfläche im dreidimensionalen Raum von der Windung der Kurve C.

Wegen

$$\text{(3,6)} \qquad \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \varphi_j} . \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \varphi_l} = 0 \quad (j, l = 1, \ldots, n-2; j \neq l)$$

läßt sich die Diskriminante A^* der ersten Grundform der Einheitskugelfläche (1,2) folgendermaßen ausdrücken:

$$\text{(3,7)} \qquad A^* = \prod_{j=1}^{n-2} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \varphi_j} . \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \varphi_j} .$$

Aus (3,2) und (1,2), (1,3), (1,5) folgt

$$\text{(3,8)} \qquad -\mathrm{d}\mathbf{Y} . \mathrm{d}\mathbf{N} = \frac{1}{\varrho} \mathrm{d}\mathbf{Y} . \mathrm{d}\mathbf{Y} - \frac{f}{\varrho} \mathrm{d}s^2$$

und nach einfacher Rechnung erhalten wir gemäß (3,6)–(3,8) folgende Relation zwischen den Diskriminanten A und B der ersten und zweiten Grundform der Kanalfläche $\mathscr{S}$:

$$\text{(3,9)} \qquad B = \frac{1}{\varrho^{n-1}} A - f \varrho^{n-3} (1 - \varrho'^2)^{n-2} A^* .$$

Weiter ergibt sich aus (3,5), daß

$$B : A = -\left[\varrho'' + z_1 k(1 - \varrho'^2)^{1/2}\right] : f\varrho^{n-2} \tag{3,10}$$

und somit können wir nach (3,9), (3,10) und (1) schließen, daß

$$\sqrt{A} = f\varrho^{n-2}(1 - \varrho'^2)^{(n-3)/2} \sqrt{A^*} . \tag{3,11}$$

Die Formeln (3,5) und (3,11) ermöglichen eine direkte Bestimmung der Krümmungsintegrale von $\mathscr{S}$ (vgl. dazu [6]); nach kurzer Rechnung erhalten wir nämlich dieses Ergebnis:

$$\int_{\mathscr{S}} \left\{\frac{1}{R_1} \cdots \frac{1}{R_{i-1}}\right\} \mathrm{d}\mathscr{S} = (n-1)\,\omega_{n-1} \int_0^l \left\{\binom{n-2}{i-1} \varrho^{n-i-1} (1 - \varrho'^2)^{(n-1)/2} - \right.$$
$$\left. - \binom{n-1}{i-1} \varrho^{n-i} \varrho''(1 - \varrho'^2)^{(n-3)/2}\right\} \mathrm{d}s$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$; $\{R_1^{-1} \ldots R_{i-1}^{-1}\} = 1$ für $i = 1$. Unterwirft man diese Formel ähnlichen Umformungen wie die Formel (1,8) für das Volumen im Abschn. 2, so bekommt man mit Rücksicht auf (2) die Integraldarstellungen (I) mit (I*) auch für $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ und noch $\int_{\mathscr{S}} R_1^{-1} \ldots R_{n-1}^{-1}\, \mathrm{d}\mathscr{S} = 0$.

Will man auf die explizite Berechnung der Krümmungen (3,5) verzichten, so kann man auch anders verfahren.

Es sei v eine Zahl. Bei genügend kleinem $|v| > 0$ erfüllt die Bedingungen (1) auch die Funktion $\varrho(s) + v$. In der Konstruktion des Kanalkörpers $\mathscr{K}$ ersetzen wir jetzt die Funktion $\varrho(s)$ durch $\varrho(s) + v$ und kommen so zu einem anderen Kanalkörper. Wir bezeichnen ihn mit $\mathscr{K}^{(v)}$ und seine zu $W_0, W_1, \ldots, W_{n-1}$ analogen Funktionale mit $W_0^{(v)}, W_1^{(v)}, \ldots, W_{n-1}^{(v)}$. Die Körper $\mathscr{K}$ und $\mathscr{K}^{(v)}$ sind freilich parallel und wegen der Stetigkeit der Hauptkrümmungen (3,5) der Begrenzungsfläche $\mathscr{S}$ von $\mathscr{K}$ gilt für das Volumen $W_0^{(v)}$ von $\mathscr{K}^{(v)}$ die Steinersche Formel (s. [4])

$$W_0^{(v)} = W_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{v^i}{i} \int_{\mathscr{S}} \left\{\frac{1}{R_1} \cdots \frac{1}{R_{i-1}}\right\} \mathrm{d}\mathscr{S} . \tag{3,12}$$

Gleichzeitig folgt aus (I) für $i = 0$ und (I*) mit $\varrho(s) + v$ statt $\varrho(s)$, daß $W_0^{(v)} = W_0 +$ $+ \omega_{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} v^i \int_0^l \varrho^{n-i-1}(s)\, P(s)\, \mathrm{d}s$ und durch den Vergleich mit (3,12) erhält man wegen (2) wieder (I) mit (I*) auch für $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ und $W_n = 0$.

4. Jetzt wollen wir diesen Hilfssatz beweisen: Es seien α, β, γ und r ganze nichtnegative Zahlen, $0 \leqq \alpha < \beta < \gamma \leqq r$. Weiter seien $V_0, V_1, \ldots, V_r$ positive Zahlen. Dann aus

$$V_{\delta-2} V_\delta \geqq V_{\delta-1}^2 \quad \text{für} \quad \delta = 2, 3, \ldots, r \tag{4,1}$$

folgt

$$(4,2)\qquad V_\alpha^{\beta-\gamma} V_\beta^{\gamma-\alpha} V_\gamma^{\alpha-\beta} \leqq 1 .$$

Die Ungleichung

$$(4,3)\qquad V_{\beta-1}^{\gamma-\beta} V_\gamma \geqq V_\beta^{\gamma-\beta+1}$$

gilt für $\beta = \gamma - 1$. Nehmen wir an, daß (4,3) auch für beliebiges β zwischen $\alpha + 1$ und $\gamma - 1$ gilt! Aus $V_{\beta-2} V_\beta \geqq V_{\beta-1}^2$ folgt $V_{\beta-2}^{\gamma-\beta+1} V_\beta^{\gamma-\beta+1} \geqq V_{\beta-1}^{2(\gamma-\beta+1)}$. Multipliziert man diese Ungleichung mit (4,3), so ergibt sich $V_{\beta-2}^{\gamma-\beta+1} V_\gamma \geqq V_{\beta-1}^{\gamma-\beta+2}$, sodaß (4,3) auch für alle $\beta = \alpha + 1, \alpha + 2, \ldots, \gamma - 1$ gilt.

Die Ungleichung

$$(4,4)\qquad V_\alpha V_\beta^{\beta-\alpha-1} \geqq V_{\beta-1}^{\beta-\alpha}$$

gilt für $\beta = \alpha + 1, \alpha + 2$. Setzen wir voraus, daß (4,4) auch für β zwischen $\alpha + 2$ und $\gamma - 1$ gilt! Aus $V_{\beta+1} V_{\beta-1} \geqq V_\beta^2$ folgt $V_{\beta+1}^{\beta-\alpha} V_{\beta-1}^{\beta-\alpha} \geqq V_\beta^{2(\beta-\alpha)}$; multipliziert man diese Ungleichung mit (4,4), so gewinnt man $V_\alpha V_{\beta+1}^{\beta-\alpha} \geqq V_\beta^{\beta-\alpha+1}$, sodaß (4,4) für alle $\beta = \alpha + 1, \alpha + 2, \ldots, \gamma - 1$ gültig ist.

Die Elimination von $V_{\beta-1}$ aus (4,3) und (4,4) liefert schon den Hilfssatz.

Nach der Schwarzschen Ungleichung ergibt sich aus (I) mit (I*), daß

$$(4,5)\qquad \frac{W_{\delta-2}}{n-\delta+2} \cdot \frac{W_\delta}{n-\delta} \geqq \left(\frac{W_{\delta-1}}{n-\delta+1}\right)^2 \quad \text{für} \quad \delta = 2, 3, \ldots, n-1$$

ist und daß in (4,5) das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn $\varrho(s) =$ $=$ konst. Daraus folgt nach dem Hilfssatze sofort das Ungleichungssystem (VI) einschließlich der Behauptung über die Extremalkörper (s. dazu auch die folgende Bemerkung über den Hilfssatz).

Es ist klar, daß bei den umgekehrten bzw. scharfen Ungleichungen in (4,1) die umgekehrte bzw. scharfe Ungleichung in (4,2) eintritt.

Daraus folgt, daß die von H. Hadwiger in [5] lediglich für die Quermaßintegrale $W_0, W_1, \ldots, W_n$ eines konvexen Rotationskörpers bewiesene Ungleichung

$$(4,6)\qquad W_\alpha^{\beta-\gamma} W_\beta^{\gamma-\alpha} W_\gamma^{\alpha-\beta} \geqq 1$$

für beliebige konvexe Körper gilt; den aus den Ungleichungen $W_{\delta-2} W_\delta \leqq W_{\delta-1}^2$ von W. Fenchel [3] folgt nach unserem Hilfssatze und nach obenbesagter Bemerkung sofort (4,6).

Gleichfalls ergibt sich aus $[n - (\delta - 2)]\,[n - \delta] < [n - (\delta - 1)]^2$ für $\delta =$ $= 2, \ldots, n - 1$ die Ungleichung

$$(4,7)\qquad (n-\alpha)^{\beta-\gamma} (n-\beta)^{\gamma-\alpha} (n-\gamma)^{\alpha-\beta} > 1 .$$

5. Folgender Hilfssatz läßt sich elementar beweisen: Es seien α, β, γ ganze Zahlen, $0 \leqq \alpha < \beta < \gamma \leqq n - 1$ und A, B, C beliebige positive Zahlen. Wir setzen

$$F(z) = (\alpha - \beta)\, Cz^\gamma + (\beta - \gamma)\, Az^\alpha + (\gamma - \alpha)\, Bz^\beta \quad \text{für} \quad z > 0 \tag{5,1}$$

und noch $z_0 = (B : C)^{1/(\gamma-\beta)}$. Die Funktion $z^{-\alpha} F(z)$ nimmt im Intervall $(0, z_0)$ zu, im Intervall (z_0, ∞) ab und für z_0 erreicht sie ihr Maximum

$$\left[\frac{F(z)}{z^\alpha}\right]_{z=z_0} = (\gamma - \beta)\, A\{(A^{\beta-\gamma} B^{\gamma-\alpha} C^{\alpha-\beta})^{1/(\gamma-\beta)} - 1\}\,. \tag{5,2}$$

Daraus ergeben sich folgende Spezialfälle:

a) Für $A = B = C = 1$ folgt die schon in [5], S. 226, 227, benutzte Behauptung, daß

$$0 < z \Rightarrow (\alpha - \beta)\, z^\gamma + (\beta - \gamma)\, z^\alpha + (\gamma - \alpha)\, z^\beta \leqq 0 \tag{5,3}$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur für $z = 1$.

b) Für $A = n - \alpha$, $B = n - \beta$, $C = n - \gamma$ ist $z_0 > 1$ und wegen $F(1) = 0$ ergibt sich sofort, daß

$$\begin{gathered} 0 < z \leqq 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow (\alpha - \beta)(n - \gamma)\, z^\gamma + (\beta - \gamma)(n - \alpha)\, z^\alpha + (\gamma - \alpha)(n - \beta)\, z^\beta \leqq 0 \end{gathered} \tag{5,4}$$

und das Gleichheitszeichen gilt wieder nur für $z = 1$.

c) Für $A = (n - \alpha)^{-1}$, $B = (n - \beta)^{-1}$, $C = (n - \gamma)^{-1}$ ist nach (4,7) das Maximum (5,2) der Funktion $F(z)\, z^{-\alpha}$ und deshalb auch der Funktion (5,1) negativ; daraus folgt, daß

$$0 < z \Rightarrow \frac{\alpha - \beta}{n - \gamma}\, z^\gamma + \frac{\beta - \gamma}{n - \alpha}\, z^\alpha + \frac{\gamma - \alpha}{n - \beta}\, z^\beta < 0\,. \tag{5,5}$$

6. Wir kehren zum Polynom (3) mit den in dem Hauptsatze in der Einleitung definierten Eigenschaften zurück und mittels (I) bilden wir die Summe

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i y^i W_i = \frac{\omega_{n-1}}{n} \int_0^l \{\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (n - i)\, y^i \varrho^{n-i-1}(s)\}\, P(s)\, ds\,.$$

Wegen (I*) ergibt sich also die Ungleichung (II), in der das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (n - i)\, y^i \varrho^{n-i-1}(s) = 0$ für alle s ist. Hieraus folgt der in der Einleitung ausgesprochene Hauptsatz über die allgemeine Bildung der linearen Ungleichungen für die Maßzahlen W_i.

Es bleibt noch die Ungleichungen (III) – (V) zu beweisen. Nach der Folgerung (5,3) bzw. (5,4) bzw. (5,5) mit $z = x^{-1}y$ ist für alle $x > 0$ und alle $y > 0$

$$(6,2) \qquad (\beta - \alpha)\, y^\gamma x^{n-\gamma-1} + (\gamma - \beta)\, y^\alpha x^{n-\alpha-1} + (\alpha - \gamma)\, y^\beta x^{n-\beta-1} \geqq 0$$

bzw. für alle $x > 0$ und alle $0 < y \leqq x$

$$(6,3) \qquad (\beta - \alpha)(n - \gamma)\, y^\gamma x^{n-\gamma-1} + (\gamma - \beta)(n - \alpha)\, y^\alpha x^{n-\alpha-1} + \\ + (\alpha - \gamma)(n - \beta)\, y^\beta x^{n-\beta-1} \geqq 0$$

bzw. für alle $x > 0$ und alle $y > 0$

$$\frac{\beta - \alpha}{n - \gamma}\, y^\gamma x^{n-\gamma-1} + \frac{\gamma - \beta}{n - \alpha}\, y^\alpha x^{n-\alpha-1} + \frac{\alpha - \gamma}{n - \beta}\, y^\beta x^{n-\beta-1} > 0\,.$$

Gleichzeitig ergibt sich aus den Zusätzen über das Gleichheitszeichen rechts in (5,3) und (5,4), daß die Polynome links in (6,2) und (6,3) dann und nur dann verschwinden, wenn $x = y$. Daraus folgen nach dem Hauptsatze die Ungleichungen (III) – (V) einschließlich der Bestimmung der Extremalkörper.

Setzt man in (III) speziell $y = [((n - \gamma)\, W_\alpha)/((n - \alpha)\, W_\gamma)]^{1/(\gamma-\alpha)}$, so bekommt man nach unschweren Umformungen wieder die Ungleichung (VI).

Literatur

[1] *T. Bonnesen u. W. Fenchel:* Theorie der konvexen Körper. Berlin 1934, New York 1948.

[2] *A. Dinghas:* Zur Theorie der konvexen Rotationskörper im *n*-dimensionalen Raum. Math. Nachr. *2* (1949), 124–140.

[3] *W. Fenchel:* Inégalités quadratiques entre les volumes mixtes des corps convexes. C. R. Acad. Sci. Paris *203* (1936), 647.

[4] *H. Hadwiger:* Über das Volumen der Parallelmengen. Mitt. naturforsch. Ges. Bern, N. F. *3* (1946), 121–126.

[5] *H. Hadwiger:* Über eine Ungleichung für drei Minkowskische Maßzahlen bei konvexen Rotationskörpern. Mh. für Math. *56* (1952), 220–228.

[6] *Z. Nádeník:* Příspěvek k vlastnostem obálek kulových nadploch. Sborník prací fakulty inženýrského stavitelství ČVUT v Praze, 1961, 79–85.

[7] *A. Voss:* Zur Theorie der Kanalflächen. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 1919, 353–368.

Anschrift des Verfassers: Praha 2, Trojanova 13, ČSSR (České vysoké učení technické).

Резюме

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ КРИВИЗНЫ ЗАМКНУТЫХ КАНАЛОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

ЗБЫНЕК НАДЕНИК (Zbyněk Nádeník), Прага

В n-мерном евклидовом пространстве пусть W_0 — объем, W_1 — на $1/n$ умноженная площадь и W_i $(i = 2, \ldots, n)$ — на $\left[n\binom{n-1}{n-i}\right]^{-1}$ умноженный интеграл кривизны замкнутой каналовой поверхности, гомеоморфной тору, т.е. $W_n = 0$. Приведен общий метод построения линейных однородных неравенств для $W_0, W_1, \ldots, W_{n-1}$. Специальные случаи таких неравенств — это неравенства (III)—(VI), в которых α, β, γ — целые числа $(0 \leqq \alpha < \beta < \gamma \leqq n - 1)$ и, за исключением (V), экстремальные поверхности трубчаты.