Břetislav Novák

Über Gitterpunkte mit Gewichten in mehrdimensionalen Ellipsoiden: Mittelwertsätze

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 17 (1967), No. 4, 609–623

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100804

Czechoslovak Mathematical Journal, 17 (92) 1967, Praha

ÜBER GITTERPUNKTE MIT GEWICHTEN IN MEHRDIMENSIONALEN ELLIPSOIDEN: MITTELWERTSÄTZE

BŘETISLAV NOVÁK, Praha

(Eingelangt am 5. Januar 1967)

Herrn Profesor V. JARNÍK *zu seinem 70. Geburtstag gewidmet*

1. Einleitung. Es sei r eine natürliche Zahl, $r \geqq 2$ und sei

$$Q(u) = Q(u_j) = \sum_{l,j=1}^{r} a_{lj} u_l u_j \tag{1}$$

eine positiv definite quadratische Form mit der Determinante D. Seien weiter $b_1, b_2, \ldots, b_r, M_1, M_2, \ldots, M_r, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ reelle Zahlen, $M_1 > 0$, $M_2 > 0, \ldots$ $\ldots, M_r > 0$. Für $x > 0$ setzen wir

$$A(x) = A(x; \alpha_j) = \sum \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j\right), \tag{2}$$

wo über alle Systeme $u_1, u_2, \ldots, u_r$ reeller Zahlen, für die

$$Q(u_j) \leqq x \tag{3}$$

und

$$u_j \equiv b_j \pmod{M_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, r,$$

ist, summiert wird (in der Summe wird also jeder solche Punkt mit einem bestimmten Gewicht gerechnet). Im Spezialfall

$$\alpha_j = b_j = 0, \quad M_j = 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, r) \tag{4}$$

gibt (2) die Anzahl der Gitterpunkte (d. h. der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten), die im Gebiet (3) liegen, an. Setzt man für $x > 0$

$$V(x) = \frac{\pi^{r/2} x^{r/2} \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j\right)}{\sqrt{(D)}\,\Gamma(r/2 + 1) \prod_{j=1}^{r} M_j}\,\delta \tag{5}$$

($\delta = 1$ wenn die Zahlen $\alpha_1 M_1, \alpha_2 M_2, \ldots, \alpha_r M_r$ ganz sind, sonst $\delta = 0$) und

$$P(x) = A(x) - V(x)\,, \tag{6}$$

dann gilt, wie es bekannt ist (siehe [7], Seiten 54 und 74)

$$P(x) = O(x^{r/2 - r/(r+1)}) \tag{7}$$

und (unter der Voraussetzung $A(x) \not\equiv 0$)

$$P(x) = \Omega(x^{(r-1)/4})\,. \tag{8}$$

(Die beiden Beziehungen werden für $x \to +\infty$ gemeint.)

Die Frage der Bestimmung der genauen Ordnung der Funktion $P(x)$ für grosse Werte x, d. h. z. B. die Bestimmung der Zahl

$$\limsup_{x \to +\infty} \frac{\lg |P(x)|}{\lg x} \tag{9}$$

ist in dieser Allgemeinheit genug schwierig. Die Lücke zwischen den Abschätzungen (7) und (8) gelang es bisher nur in einigen Fällen zu vermindern (siehe z. B. das Literaturverzeichnis in [10], besonders die Arbeiten von Jarník). Schon in den Arbeiten von Landau (siehe [7] S. 85 und weitere) wurde ausser der Funktion (6) auch deren Mittelwert $T(x) = (x^{-1} M(x))^{1/2}$, wo

$$M(x) = \int_0^x |P(y)|^2 \, \mathrm{d}y \tag{10}$$

ist, untersucht (Landau untersucht nur den Fall des Kreises – d. h. genauer: es gilt (4) und ist $Q(u) = u_1^2 + u_2^2$).

Das Studium der Funktion (10) ist weniger schwierig und in machen Fallen, wo die Frage der Bestimmung des Wertes (9) wahrscheinlich jenseits der Grenzen der heutigen Kenntnissen liegt, kann das $O - \Omega$ Problem für die Funktion (10) vollkommen gelöst werden.

In den Jahren 1931–1941 benützte Jarník zur Untersuchung der Funktion (10) seine wirksame Methode und bewies eine Reihe von Ergebnissen überraschender Genauigkeit, von denen viele einen definitiven Charakter haben (siehe die Arbeiten [1]–[6]). In [1] und [2] wird die Funktion (10) bei der Voraussetzung (4) für Formen Q der Art $Q(u) = \sum_{j=1}^{r} a_j u_j^2$ untersucht und unter anderem sind folgende zwei Ergebnisse bewiesen:

I. Für fast alle Systeme positiver Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_r$ (im Sinne des Lebesgueschen Masses im E_r) ist

$$T(x) = O(x^{(r-1)/4} \lg^{(3r+3)/2} x) .$$

II. Immer ist

$$T(x) = \Omega(x^{(r-1)/4}) .$$

In dieser Arbeit gehen wir von der Voraussetzung aus, dass die Zahlen a_{jl} und b_j $(j, l = 1, 2, \ldots, r)$ ganz sind, $M_1, M_2, \ldots, M_r$ sind natürlich und beweisen Behauptungen, die denen von I. und II. formal analog sind.

Wir bemerken, dass für die Funktion $P(x)$ bei den gegebenen Voraussetzungen z. B. dieses (siehe [8] und [9]) bekannt ist:

Es sei $r > 4$. Dann ist immer $P(x) = O(x^{r/2-1})$. Ist mindestens eine der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ irrational, ist sogar $P(x) = o(x^{r/2-1})$ und für fast alle Systeme $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_r$ (im Sinne des Lebesgueschen Masses im E_r) ist

$$P(x) = O(x^{r/4} \lg^{3r} x) .$$

Daher bekommt man, dass für $r > 4$ immer $T(x) = O(x^{r/2-1})$ gilt und im Falle, dass mindestens eine der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ irrational ist, ist $T(x) = o(x^{r/2-1})$.

Die benützte Methode (d. h. das Untersuchung der Funktion (10) auf dem Grunde deren Ausdrücken in der Form eines Doppelkurvenintegralles) wurde von den zitierten Arbeiten von Jarník übernommen. Die Einfluss der Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ist auf ähnliche Weise wie in [9] angefasst. Eine gründlichere Untersuchung der Funktion $M(x)$ für den Fall der rationalen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ wird selbstständig veröffentlicht.

2. Hilfsätze und Bezeichnungen. Wird nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt werden im weiteren folgende Verabredungen und Bezeichnungen beibehalten: Der Buchstabe c bezeichne (auch von sich verschiedene) positive Konstanten, die höchstens von der Form (1), der Zahlen M_j, b_j und α_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$ abhängen. Die Symbole O und Ω sind zu dem Grenzübergang $x \to +\infty$ bezogen und die Konstanten, die in deren Definition auftreten, sind von dem „Typus" c. Ist $|A| \leqq cB$ schreiben wir kurz $A \ll B$. ϱ, n und k (eventuell mit Strich versehen) bedeuten stets natürliche Zahlen, m, p und h (eventuell mit Index oder Strich versehen) sind ganze Zahlen. Treten zugleich h und k auf, so ist $(h, k) = 1$ $((h', k') = 1$ usw.). $\sum_{(m)}$ bedeutet die Summation über alle Systeme $m_1, m_2, \ldots, m_r$. Für natürliche p sei E_p der p-dimensionale Euklidische Raum.

Wir behalten weiter die Bezeichnungen von § 1 und setzen voraus, dass die Koeffizienten der Form (1) und die Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_r$ ganz sind, $M_1, M_2, \ldots, M_r$ natürlich. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man voraussetzen, dass $0 \leqq$ $\leqq b_j < M_j$ und $0 \leqq \alpha_j < 1$ ist $(j = 1, 2, \ldots, r)$. In der ganzen Arbeit wird vorausgesetzt, dass x genügend gross ist, d. h. $x > c$. Wir definieren rekurrent die Funktionen $M_\varrho(x)$ durch die Gleichungen $(t > 0)$

$$M_1(t) = M(t)\,, \quad M_{\varrho+1}(t) = \int_0^t M_\varrho(y)\,\mathrm{d}y$$

und auf ähnliche Weise führen wir die Funktionen $P_\varrho(x)$, $V_\varrho(x)$ und $A_\varrho(x)$ ein.

Für ein komplexes s, $\operatorname{Re} s > 0$ sei

$$(11) \qquad \Theta(s) = \Theta(s; \alpha_j) = \sum_{(m)} \exp\left(-sQ(m_jM_j + b_j) + 2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j(m_jM_j + b_j)\right).$$

Die Reihe in (11) ist offenbar absolut und lokal gleichmässig in der Halbebene $\operatorname{Re} s >$ > 0 konvergent und die Funktion $\Theta(s)$ ist also in diesem Gebiet regulär.

Unter einem Integral verstehen wir stets ein (absolut konvergentes) Lebesguesches Integral. Für $a \in E_1$ setzen wir

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(s)\,\mathrm{d}s = i \int_{-\infty}^{\infty} f(a + it)\,\mathrm{d}t\,,$$

sobald das Integral rechts existiert.

Auf analogische Weise wie in [5] stellen wir fest, dass das folgende gilt:

Lemma 1. *Für* $a > 0$, $b > 0$, $\varrho \ll 1$ *ist*

$$(12) \qquad M_\varrho(x) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{F(s)\,G(s')}{ss'(s + s')^\varrho}\, e^{x(s+s')}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s' + O(x^{\varrho-1})\,,$$

wo

$$(13) \qquad F(s) = \Theta(s) - \frac{\pi^{r/2} \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j b_j\right)}{s^{r/2} \sqrt{(D)} \prod_{j=1}^{r} M_j}\,\delta$$

und

$$(14) \qquad G(s') = \overline{F(\bar{s}')}$$

ist (*für* $\beta \in E_1$ *bedeutet* z^β *hier und auch weiter denjenigen Zweig von* z^β *in der Halbebene* $\operatorname{Re} z > 0$, *der positiv für positive Werte von* z *ist*). *Für* $\delta = 0$ *verschwindet das O-Glied in* (12).

Für die weiteren Erwägungen sind die Transformationseigenschaften der Funktion (11) wesentlich:

Lemma 2. *Sei $\bar{Q}$ die zu Q reziproke Form,* $\operatorname{Re} s > 0$. *Dann gilt*

$$(15)\quad \Theta(s) = \frac{\pi^{r/2}}{\sqrt{(D)}\prod_{j=1}^{r} M_j \left(s - \dfrac{2\pi i h}{k}\right)^{r/2}} \sum_{(m)} S_{h,k,(m)} \exp\left(-\frac{\pi^2 \bar{Q}\left(\dfrac{m_j}{M_j} - \alpha_j k\right)}{k^2\left(s - \dfrac{2\pi i h}{k}\right)}\right),$$

wobei

(16)

$$S_{h,k,(m)} = \sum_{a_1, a_2, \ldots, a_r = 1}^{k} \exp\left(-2\pi i \frac{h}{k} Q(a_j M_j + b_j) + \frac{2\pi i}{k} \sum_{j=1}^{r} \frac{m_j}{M_j}(a_j M_j + b_j)\right) \ll k^{r/2}$$

ist.

Beweis. Siehe z. B. [5], Hilfssätze 3A und 4. Den Verlauf des Beweises, der in dieser Arbeit unter der Voraussetzung (4) gegeben ist, kann man auch auf diesen allgemeineren Fall überträgen (siehe auch [7], Seiten 150–151).

Wir geben noch einige bekannte Eigenschaften der Fareyschen Brüche, die zu $\sqrt{x}$ gehören, an d. h. der Brüche der Form h/k, wo $k \leqq \sqrt{x}$ (siehe z. B. [7], Seiten 249–250): Sind $h'/k' < h/k < h''/k''$ drei nacheinander folgende Brüche dieser Art (d. h. dass zwischen h'/k', h''/k'' genau ein Fareybruch, der zu $\sqrt{x}$ gehört, nämlich h/k, liegt) ist notwendig $hk' - h'k = 1$, $h''k - hk'' = 1$ und $\sqrt{x} < k + k' \leqq 2\sqrt{x}$, $\sqrt{x} < k + k'' \leqq 2\sqrt{x}$. Bezeichnet man also

$$(17)\qquad \mathfrak{B}_{h,k} = \left\langle 2\pi \frac{h + h'}{k + k'},\ 2\pi \frac{h + h''}{k + k''}\right),$$

ist für $t \in \mathfrak{B}_{h,k}$

$$(18)\qquad \left|t - \frac{2\pi h}{k}\right| \leqq 2\pi \max\left(\frac{h + h''}{k + k''} - \frac{h}{k}, \frac{h}{k} - \frac{h + h'}{k + k'}\right) \leqq \frac{2\pi}{k\sqrt{x}}.$$

Alle Intervalle $\mathfrak{B}_{h,k}$ sind punktfremd und bedecken offenbar die ganze reelle Achse.

Lemma 3. *Sei* $s = 1/x + it$. *Für* $|t - 2\pi h/k| \ll 1/k\sqrt{x}$ (*speziell also für* $t \in \mathfrak{B}_{h,k}$) *ist*

$$(19)\qquad \Theta(s) \ll \frac{x^{r/2} \exp\left(-\dfrac{cR_k x}{k^2\left(1 + x^2\left(t - \dfrac{2\pi h}{k}\right)^2\right)}\right)}{k^{r/2}\left(1 + x^2\left(t - \dfrac{2\pi h}{k}\right)^2\right)^{r/4}},$$

wo wir

$$(20) \qquad R_k = \min_{m_1, m_2, \ldots, m_r} \bar{Q}\left(\frac{m_j}{M_j} - \alpha_j k\right)$$

setzen. Ist $|t| \ll 1/\sqrt{x}$ *und* $\delta = 0$ (*d. h. mindestens eine der Zahlen* $\alpha_1 M_1, \alpha_2 M_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_r M_r$ *ist nicht ganz*), *ist*

$$(21) \qquad \frac{\Theta(s)}{s} \ll x^{(r+2)/4}.$$

Beweis. (19) bekommen wir sofort aus (15), (16) und (20). Ist nun $|t| \ll 1/\sqrt{x}$ und $\delta = 0$, ist notwendig $R_1 > 0$ und aus (19) ergibt sich

$$\frac{\Theta(s)}{s} \ll \frac{x^{r/2+1} \exp\left(-\dfrac{cx}{1 + x^2 t^2}\right)}{(1 + x^2 t^2)^{(r+2)/4}} \ll x^{(r+2)/4},$$

da die Funktion $\xi^c e^{-c\xi}$ für $\xi \in \langle 0, +\infty)$ beschränkt ist.

3. Beweise der Hauptsätze. Satz 1. *Für fast alle Systeme* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ (*im Sinne des Lebesgueschen Masses im* E_r) *ist*

$$(22) \qquad M(x) = O(x^{(r+1)/2} \lg^{3r+2} x),$$ [1]

d. h.

$$T(x) = O(x^{(r-1)/4} \lg^{(3r+2)/2} x).$$

Der Beweis des Satzes zerteilen wir in einige Abschnitte. 1) Ist $R_k = 0$ für irgendein k, sind notwendig alle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ rational und diese Systeme bilden eine Menge vom r-dimensionalen Lebesgueschen Mass Null. Wir werden also im weiteren immer voraussetzen, dass $R_k > 0$ für alle k (also ist auch $\delta = 0$). Nach (13) und (14) ist also

$$(23) \qquad F(s) = \Theta(s), \quad G(s') = \overline{\Theta(\bar{s}')}$$

und für die Funktion $G(s')$ gelten zu (19) und (21) analoge Beziehungen. Setzen wir

$$w = \frac{2\pi}{[\sqrt{x}] + 1} \ll x^{-1/2}$$

(für $t \in E_1$ bedeutet $[t]$ den ganzen Teil der Zahl t) und sei $\varrho > 1$. Nach dem Lemma 1 (für $a = b = 1/x$) kann man

$$(24) \qquad M_\varrho(x) \ll \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Theta(s)\, \Theta(\bar{s}')|}{|ss'(s + s')^\varrho|} |e^{x(s+s')}| \, dt \, dt'$$

---

[1]) Für $r = 2, 3$ kann man eine stärkere Behauptung beweisen, die für alle Systeme $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_r$ gilt: $M(x) = O(x^2 \lg x)$ für $r = 3$ und $M(x) = O(x^{3/2})$ für $r = 2$. Eine allgemeine Formel für die Abschätzung der Funktion (10) wird in Comment Math. Univ. Car. *8*, 4 (1967) veröffentlicht.

schreiben (immer setzen wir $s = (1/x) + it$ und $s' = (1/x) + it'$). Nachdem in der angeführten Bezeichnung $e^{x(s+s')} \ll 1$ ist, gilt mit Rücksicht auf die Symetrie des Integrandes in (24) die Beziehung

(25) $$M_\varrho(x) \ll T_1 + T_2 + T_3\,,$$

wo wir

$$T_1 = \int_{-2w}^{2w} \int_{-2w}^{2w} \frac{|\Theta(s)\,\Theta(\bar{s}')|}{|ss'(s+s')^\rho|}\,dt\,dt'\,,$$

$$T_2 = \int_{-w}^{w} \int_{2w}^{+\infty} \frac{|\Theta(s)\,\Theta(\bar{s}')|}{|ss'(s+s')^\rho|}\,dt\,dt' + \int_{-w}^{w} \int_{-\infty}^{-2w} \frac{|\Theta(s)\,\Theta(\bar{s}')|}{|ss'(s+s')^\rho|}\,dt\,dt'\,,$$

$$T_3 = \int_{w}^{+\infty} \int_{w}^{+\infty} \frac{|\Theta(s)\,\Theta(\bar{s}')|}{|ss'(s+s')^\rho|}\,dt\,dt' + \int_{w}^{+\infty} \int_{-\infty}^{-w} \frac{|\Theta(s)\,\Theta(\bar{s}')|}{|ss'(s+s')^\rho|}\,dt\,dt'$$

bezeichneten. Nach (21) ist

(26) $$T_1 \ll x^{r/2+\rho} \int_0^{2w} \left(\int_0^t \frac{x\,dt'}{(1 + x(t-t'))^\rho} \right) dt \ll x^{(r+2\rho-1)/2}\,.$$

Bei der Abschätzung der Integrale werden wir ohne weiteres die folgenden Beziehungen benutzen (siehe (17) und (18)):

$$\int_w^\infty \frac{|\Theta(s)\,\Theta(\bar{s}')|}{|ss'(s+s')^\rho|}\,dt = \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{B}_{h,k}} \frac{|\Theta(s)\,\Theta(\bar{s}')|}{|ss'(s+s')^\rho|}\,dt \ll$$

$$\ll \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} \int_{-c/k\sqrt{x}}^{c/k\sqrt{x}} \frac{\left|\Theta\left(s + \dfrac{2\pi i h}{k}\right)\Theta(\bar{s}')\right|}{\left|s'\left(s + \dfrac{2\pi i h}{k}\right)\left(s + s' + \dfrac{2\pi i h}{k}\right)^\rho\right|}\,dt$$

u. desgl.

Ist weiter $|t| \in \mathfrak{B}_{h,k}$, $|t| \geqq 2w$, $|t'| \leqq w$ und $h > 0$ ist nach (18) $|s| = |1/x + it| \gg$ $\gg h/k$, $|s + s'| \gg h/k$ und also mit Rücksicht auf (19) und (21) ist

$$T_2 \ll x^{(r+2)/4} \int_0^w \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^{r/4}}{R_k^{r/4}} \left(\frac{k}{h}\right)^{\rho+1} \cdot$$

$$\cdot \int_0^{c/k\sqrt{x}} \left(\frac{xR_k}{k^2(1+x^2u^2)}\right)^{r/4} \exp\left(-\frac{cR_k x}{k^2(1+x^2u^2)}\right) du\,dt'\,.$$

Nachdem

$$\int_0^{c/k\sqrt{x}} \left(\frac{xR_k}{k^2(1+x^2u^2)}\right)^{r/4} \exp\left(-\frac{cR_k x}{k^2(1+x^2u^2)}\right) du \ll$$

$$\ll \int_0^{\sqrt{(R_k/k^2x)}} du + \int_{\sqrt{(R_k/k^2x)}}^{\infty} \left(\frac{xR_k}{k^2x^2u^2}\right)^{r/4} du \ll \sqrt{(R_k/k^2x)}$$

(für $r > 2$) und

$$\int_0^{c/k\sqrt{x}} \left(\frac{xR_k}{k^2(1 + x^2u^2)}\right)^{r/4} \exp\left(-\frac{cR_kx}{k^2(1 + x^2u^2)}\right) du \ll$$
$$\ll \sqrt{(R_k/k^2x)} \int_0^{c/k\sqrt{x}} \frac{x}{1 + xu} du \ll \sqrt{(R_k/k^2x)} \lg x$$

(für $r = 2$)

gilt (die Funktion $\xi^c e^{-c\xi}$ ist für $\xi \in \langle 0, +\infty)$ beschränkt), bekommen wir

$$T_2 \ll x^{(r+2)/4} \int_0^{w} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^{r/4}}{R_k^{r/4}} \left(\frac{k}{h}\right)^{\rho+1} \frac{\sqrt{R_k}}{k\sqrt{x}} \lg x \, dt' \ll$$
$$\ll x^{(r-1)/2} \lg x \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \frac{k^\rho}{R_k^{(r-2)/4}} \ll x^{r/2+\rho-1} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{R_k^{(r-2)/4}}$$

d. h.

(27) $$T_2 \ll x^{r/2+\rho-1} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{R_k^{(r-2)/4}}.$$

Wir schätzen weiter T_3 ab:

$$\int_w^\infty \int_w^\infty \frac{|\Theta(s)\,\Theta(\bar{s}')|}{|ss'(s + s')^\rho|} dt\, dt' \ll \int_w^\infty \int_w^\infty \frac{|\Theta(s)|^2 + |\Theta(\bar{s}')|^2}{|ss'(s + s')|^\rho} dt\, dt'$$
$$\int_w^\infty \int_{-\infty}^{-w} \frac{|\Theta(s)\,\Theta(\bar{s}')|}{|ss'(s + s')^\rho|} dt\, dt' \ll \int_w^\infty \int_{-\infty}^{-w} \frac{|\Theta(s)|^2 + |\Theta(\bar{s}')|^2}{|ss'(s + s')|^\rho} dt\, dt'$$

und also

(28) $$T_3 \ll \int_w^\infty \int_w^\infty \frac{|\Theta(s)|^2 + |\Theta(\bar{s})|^2}{tt'\left(\frac{1}{x} + |t - t'|\right)^\rho} dt\, dt'.$$

Es sei $t \geqq w$ und bezeichnen wir

(29) $$T = \int_w^\infty \frac{dt'}{t'\left(\frac{1}{x} + |t - t'|\right)^\rho}.$$

Nachdem ($xt \geqq xw \gg \sqrt{x}$)

(30) $$\int_{t-1/x}^\infty \frac{dt'}{t'\left(\frac{1}{x} + |t - t'|\right)^\rho} \ll \frac{1}{t} \int_{-\infty}^\infty \frac{du}{\left(\frac{1}{x} + |u|\right)^\rho} \ll \frac{x^{\rho-1}}{t}$$

gilt, bleibt zur Abschätzung des Ausdruckes (29) für $t - 1/x > w$ das folgende Integral übrig:

$$\int_w^{t-1/x} \frac{\mathrm{d}t'}{t'\left(\frac{1}{x} + t - t'\right)^\rho}.$$

Nachdem

$$\int_w^{t-1/x} \frac{\mathrm{d}t'}{t'\left(\frac{1}{x} + t - t'\right)^\rho} \leqq x^{\rho-2} \int_w^{t-1/x} \frac{\mathrm{d}t'}{t'(t-t')^2} = \tag{31}$$

$$= x^{\rho-2} \int_w^{t-1/x} \left(\frac{1}{t^2 t'} + \frac{1}{t^2(t-t')} + \frac{1}{t(t-t')^2}\right) \mathrm{d}t' =$$

$$= \frac{x^{\rho-2}}{t^2} \lg \frac{\left(t - \frac{1}{x}\right)(t-w)}{wx^{-1}} - \frac{x^{\rho-2}}{t}\left(x - \frac{1}{t-w}\right),$$

bekommt man mit Rücksicht auf die Beziehungen $(t > w + 1/x)$ $\lg(t - 1/x) \ll \lg xt$, $\lg(t-w) \ll \lg xt$, $\lg w \ll \lg xt$ und $\lg x \ll \lg xt$ sofort aus (31)

$$\int_w^{t-1/x} \frac{\mathrm{d}t'}{t'\left(\frac{1}{x} + t - t'\right)^\rho} \ll \frac{x^{\rho-1}}{t} \frac{\lg xt}{xt} + \frac{x^{\rho-1}}{t} \ll \frac{x^{\rho-1}}{t}. \tag{32}$$

Aus (29), (30) und (32) folgt

$$T \ll \frac{x^{\rho-1}}{t}.$$

Durch Einsetzung in (28) ergibt sich mit Benützung von (19) (für $t \in \mathfrak{B}_{h,k}$, $h > 0$ ist $t \gg h/k$)

$$T_3 \ll x^{\rho-1} \int_w^\infty \frac{|\Theta(s)|^2 + |\Theta(\bar{s})|^2}{t^2} \mathrm{d}t \ll x^{r/2+\rho-1} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^\infty \frac{1}{R_k^{r/2}} \frac{k^2}{h^2}.$$
$$\cdot \int_0^{c/k\sqrt{x}} \left(\frac{xR_k}{k^2(1+x^2u^2)}\right)^{r/2} \exp\left(-\frac{cR_k x}{k^2(1+x^2u^2)}\right) \mathrm{d}u.$$

Das letzte Integral rechts kann man ähnlich wie bei T_2 durch den Ausdruck $c\sqrt{(R_k/k^2x)}$ abschätzen. Im Ganzen ist

$$T_3 \ll x^{r/2+\rho-1} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{R_k^{(r-1)/2}} \frac{k}{\sqrt{x}} \ll x^{r/2+\rho-1} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{R_k^{(r-1)/2}}. \tag{33}$$

Nach (25), (26), (27) und (33) bewiesen wir bisher diese Behauptung:

Behauptung A. *Sei $\varrho > 1$ und sei mindestens eine der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ irrational. Dann ist*

$$M_\varrho(x) \ll x^{r/2+\varrho-1} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{R_k^{(r-1)/2}} . \tag{34}$$

(Er ist $R_k \ll 1$ für alle k und so ist

$$\sqrt{x} \ll \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{R_k^{(r-2)/4}} \ll \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{R_k^{(r-1)/2}} .)$$

2) Wir untersuchen nun also die Summe in (34). Wir betrachten zuerst, dass für $(u_1, u_2, \ldots, u_r) \in E_r$

$$\bar{Q}(u_j) \gg \max_{j=1,2,\ldots,r} |u_j|^2 \gg \bar{Q}(u_j)$$

ist. Bezeichnen wir also

$$P_k = \max_{j=1,2,\ldots,r} \min_m |m - \alpha_j M_j k| ,$$

dann schränkt sich die Abschätzung der Summe in (34) auf die Abschätzung von

$$\sum_{k \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{P_k^{r-1}}$$

ein. Wir beweisen zuerst die folgende Behauptung (siehe [9] Lemma 6):

Behauptung B. *Sei $0 < A < B$ und sei $W(A, B)$ die Menge aller $(u_1, u_2, \ldots, u_r) \in E_r$, $A \leqq u_j \leqq B$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$. Für $p \geqq 0$, $m_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ sei $\mathfrak{M}(p; m_1, m_2, \ldots, m_r)$ die Menge aller $(u_1, u_2, \ldots, u_r) \in W(A, B)$ so, dass*

$$|m_j u_j - m_1 u_1| \leqq \frac{2B}{2^p} \quad (j = 2, 3, \ldots, r)$$

ist. Seien weiter $k_1, k_2, \ldots, k_r$ nichtnegative ganze Zahlen. Wir sagen, dass die Menge $\mathfrak{M}(p; m_1, m_2, \ldots, m_r)$ zur Klasse $[p; k_1, k_2, \ldots, k_r]$ gehört, wenn $2^{k_j} \leqq m_j < 2^{k_j+1}$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ ist. Dann gilt: Es existiert eine Menge $\mathfrak{N}(A, B) \subset W(A, B)$ vom r-dimensionalen Lebesgueschen Mass Null so, dass zu jedem $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r) \in W(A, B) - \mathfrak{N}(A, B)$ es ein p_0 gibt so, dass für $p \geqq p_0$ und alle $k_1, k_2, \ldots k_r$ der Punkt $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$ höchstens in

$$U(p; k_1, k_2, \ldots, k_r) = \left[\frac{2^{k_1}(p+1)^2}{2^{p(r-1)}} \prod_{j=1}^{r} (k_j + 1)^2\right] .$$

Mengen $\mathfrak{M}(p; m_1, m_2, \ldots, m_r)$ der Klasse $[p; k_1, k_2, \ldots, k_r]$ liegt.

Beweis. Für $u_1 \in \langle A, B\rangle$ sei $\mathfrak{N}(u_1)$ die Menge aller $(u_2, u_3, \ldots, u_r) \in E_{r-1}$, für die $(u_1, u_2, \ldots, u_r) \in \mathfrak{M}(p; m_1, m_2, \ldots, m_r)$ ist. Die Zahl u_j muss also in einem Intervall der Länge höchstens $4B\, 2^{-p} m_j^{-1}$ $(j = 2, 3, \ldots, r)$ liegen. Bezeichnen wir mit μ_n das n-dimensionale Lebesguesche Mass, so ist

$$\mu_r(\mathfrak{M}(p; m_1, m_2, \ldots, m_r)) \leqq \int_A^B \mu_{r-1}(\mathfrak{N}(u_1))\, du_1 \leqq \frac{(4B)^{r-1}(B-A)}{2^{p(r-1)} m_2 m_3 \ldots m_r}.$$

Die Anzahl der Mengen $\mathfrak{M}(p; m_1, m_2, \ldots, m_r)$ der Klasse $[p; k_1, k_2, \ldots, k_r]$ ist höchstens $2^{k_1+k_2+\ldots+k_r}$. Sei $\mathfrak{N}(p; k_1, k_2, \ldots, k_r)$ die Menge aller $(u_1, u_2, \ldots, u_r) \in E_r$, die in mehr als $U(p; k_1, k_2, \ldots, k_r)$ Mengen $\mathfrak{M}(p; m_1, m_2, \ldots, m_r)$ der Klasse $[p; k_1, k_2, \ldots, k_r]$ liegen. Offenbar ist

$$\mu_r(\mathfrak{N}(p; k_1, k_2, \ldots, k_r)) \leqq \frac{(4B)^r\, 2^{k_1+k_2+\ldots+k_r}}{(U(p; k_1, k_2, \ldots, k_r)+1)\, 2^{p(r-1)}\, 2^{k_2+k_3+\ldots+k_r}} \leqq$$

$$\leqq \frac{(4B)^r}{(p+1)^2 \prod_{j=1}^{r} (k_j+1)^2}$$

(sind $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n \subset E_r$ messbare Mengen, ist das Mass der Menge der Punkte, welche mindestens in k diesen Mengen liegen höchstens $k^{-1} \sum_{j=1}^{n} \mu_r(\mathfrak{A}_j)$ gleich).

Sei endlich $\mathfrak{N}(A, B)$ die Menge aller $(u_1, u_2, \ldots, u_r) \in E_r$, die in unendlich vielen Mengen $\mathfrak{N}(p; k_1, k_2, \ldots, k_r)$ liegen. Da die Reihe

$$\sum_{p,k_1,k_2,\ldots,k_r=0}^{\infty} \frac{1}{(p+1)^2 \prod_{j=1}^{r} (k_j+1)^2}$$

konvergent ist, ist notwendig $\mu_r(\mathfrak{N}(A, B)) = 0$. Ist nun $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r) \in W(A, B) - \mathfrak{N}(A, B)$, so liegt $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$ nur in endlich vielen Mengen $\mathfrak{N}(p; k_1, k_2, \ldots, k_r)$ und es gibt also ein p_0 so, dass für $p \geqq p_0$ und alle $k_1, k_2, \ldots, k_r$ der Punkt $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$ nicht in der Menge $\mathfrak{N}(p; k_1, k_2, \ldots, k_r)$ liegt, d. h. für $p \geqq p_0$ und alle $k_1, k_2, \ldots, k_r$ liegt der Punkt $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$ höchstens in $U(p; k_1, k_2, \ldots, k_r)$ Mengen $\mathfrak{M}(p; m_1, m_2, \ldots, m_r)$ der Klasse $[p; k_1, k_2, \ldots, k_r]$, w. z. b. w.

Nun beweisen wir schon leicht die

Behauptung C. *Es gibt eine Menge $\mathfrak{N}$ vom r-dimensionalen Lebesgueschen Mass Null so, dass für $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \notin \mathfrak{N}$*

$$(35) \qquad \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{P_k^{r-1}} \ll \sqrt{(x)}\, \lg^{3r+2} x$$

ist.

Beweis. Nachdem wir Systeme $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, für die $0 \leqq \alpha_j < 1$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ ist, betrachten und nachdem die Vereinigung abzählbar vieler Mengen vom Lebesgueschen Mass Null wieder eine Menge mit dem Lebesgueschen Mass gleich Null ist, genügt es folgendes zu zeigen:

Sind $0 < E < F < 1$ gegebene Zahlen, dann gibt es in dem Würfel $W(E, F)$ (siehe Bezeichnung von der Behauptung B) eine Menge $\mathfrak{N}_1(E, F)$ mit dem r-dimensionalen Lebesgueschen Mass gleich Null so, dass für $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in W(E, F) - \mathfrak{N}_1(E, F)$ (35) gilt.

Wir setzen in der Behauptung B

$$A = \frac{1}{F} \min_{j=1,2,\ldots,r} \frac{1}{M_j}, \quad B = \frac{1}{E} \max_{j=1,2,\ldots,r} \frac{1}{M_j}$$

und sei $\mathfrak{N}_1(E, F) = \varphi(\mathfrak{N}(A, B))$, wo

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_r) = \left(\frac{1}{M_1 u_1}, \frac{1}{M_2 u_2}, \ldots, \frac{1}{M_r u_r}\right) \text{ für } (u_1, u_2, \ldots, u_r) \in E_r, \quad \prod_{j=1}^{r} u_j \neq 0$$

ist. Offenbar ist $\mu_r(\mathfrak{N}_1(E, F)) = 0$. Ist nun $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in W(E, F) - \mathfrak{N}_1(E, F)$, ist auch

$$\left(\frac{1}{\alpha_1 M_1}, \frac{1}{\alpha_2 M_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_r M_r}\right) \in W(A, B) - \mathfrak{N}(A, B)$$

und es gibt also ein p_0 so, dass die Ungleichungen

$$p \geqq p_0, \quad \left|\frac{m_j}{\alpha_j M_j} - \frac{m_1}{\alpha_1 M_1}\right| \leqq \frac{2B}{2^p} \quad (j = 2, 3, \ldots, r)$$

höchstens $U(p; k_1, k_2, \ldots, k_r)$ Lösungen in natürlichen Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_r$ besitzen, für die $2^{k_j} \leqq m_j < 2^{k_j+1}$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ gilt ($k_1, k_2, \ldots, k_r$ sind nichtnegative ganze Zahlen). Man kann voraussetzen, dass die Zahl p_0 so gross ist, dass aus $P_k < 2^{-p_0}$ die Beziehungen $[\alpha_j M_j k] > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ folgen. Offenbar ist

$$\sum_{\substack{k \leqq \sqrt{x} \\ 2^{p_0} P_k \geqq 1}} \frac{1}{P_k^{r-1}} \leqq 2^{p_0(r-1)} \sqrt{x} \ll \sqrt{x}\,.$$

Es genügt also zu zeigen, dass

$$\sum_{\substack{k \leqq \sqrt{x} \\ 2^{p_0} P_k < 1}} \frac{1}{P_k^{r-1}} \ll \sqrt{(x)} \lg^{3r+2} x \tag{36}$$

ist. Sei $p \geqq p_0$ und $1/2^{p+1} \leqq P_k < 1/2^p$ für irgendein $k \leqq \sqrt{x}$. Für passende natürliche $m_1, m_2, \ldots, m_r$ ist dann

$$\left|\alpha_j M_j k - m_j\right| < \frac{1}{2^p} \quad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

d. h.

$$\left|\frac{m_j}{\alpha_j M_j} - \frac{m_1}{\alpha_1 M_1}\right| \leqq \frac{2\mathrm{B}}{2^p} \quad (j = 2, 3, \ldots, r)\,.$$

Für $2^{k_j} \leqq m_j < 2^{k_j+1}$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ kann dieses nach der Behauptung B höchstens in

$$U(p; k_1, k_2, \ldots, k_r) = \left[\frac{2^{k_1}}{2^{p(r-1)}}(p + 1)^2 \prod_{j=1}^{r}(k_j + 1)^2\right]$$

Fällen vorkommen. Wir bemerken, dass $(k \leqq \sqrt{x})$ notwendig $m_j \ll \sqrt{x}$ ist und also $2^{k_j} \ll \sqrt{x}$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$. Weiter ist $U(p; k_1, k_2, \ldots, k_r) = 0$ für $p \gg \lg x$. Umgekehrt, wählen wir $p \geqq p_0$, $m_1, m_2, \ldots, m_r$ gibt es höchstens c Werte von k, die den Ungleichungen $\left|\alpha_j M_j k - m_j\right| < 1/2^p$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ genügen. Man kann also

$$\sum_{\substack{k \leqq \sqrt{x} \\ 2^{p_0} P_k < 1}} \frac{1}{P_k^{r-1}} \ll \sum \frac{2^{(p+1)(r-1)+k_1}}{2^{p(r-1)}}(p + 1)^2 \prod_{j=1}^{r}(k_j + 1)^2$$

schreiben, wobei über $p_0 \leqq p \ll \lg x$ und $2^{k_j} \ll \sqrt{x}$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ summiert wird. Daher bekommen wir sofort (36) und so auch die Behauptung C.

3) Wir beenden nun den Beweis des Satzes. Von den Punkten 1) und 2) folgt, dass eine Menge $\mathfrak{N}$ vom Lebesgueschen Mass Null existiert so, dass für $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \notin$ $\notin N$, $\varrho > 1$

$$M_\varrho(x) \ll x^{(r+2\varrho-1)/2} \lg^{3r+2} x$$

gilt. Ist nun $\varrho > 1$ kann man

$$x\, M_{\varrho-1}(x) \leqq \int_x^{2x} M_{\varrho-1}(y)\, \mathrm{d}y = M_\varrho(2x) - M_\varrho(x)$$

schreiben, d. h.

$$M(x) = M_1(x) \ll \frac{1}{x}\left(M_2(2x) - M_2(x)\right) \ll x^{(r+1)/2} \lg^{3r+2} x\,.$$

Es gilt also auch die Behauptung des Satzes.[2])

---

[2]) Der Beweis der Behauptung C beruht auf der Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2)$. (Durch die Wahl einer langsamer konvergenten Reihe kann man den Exponent bei dem Logarithmus in (22) etwas verbessern.) Eine ähnliche Idee ist in den analogischen Lemmas von Jarník (z. B. [1], § 3) benützt.

Satz 2. *Sei eine beliebige Form* (1) *gegeben und es seien* $b_1, b_2, \ldots, b_r, M_1, M_2, \ldots$ $\ldots, M_r$ *und* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ *beliebige reelle Zahlen,* $M_1 > 0, M_2 > 0, \ldots, M_r > 0$. *Ist* Re $A(x) \not\equiv 0$ *bzw.* Im $A(x) \not\equiv 0$ *dann gilt*

$$(37) \qquad \liminf_{x \to +\infty} x^{-(r+3)/4} \int_0^x \max(0, \operatorname{Re} P(y))\, dy > 0,$$

$$\liminf_{x \to +\infty} x^{-(r+3)/4} \int_0^x \max(0, -\operatorname{Re} P(y))\, dy > 0$$

bzw.

$$(38) \qquad \liminf_{x \to +\infty} x^{-(r+3)/4} \int_0^x \max(0, \operatorname{Im} P(y))\, dy > 0,$$

$$\liminf_{x \to +\infty} x^{-(r+3)/4} \int_0^x \max(0, -\operatorname{Im} P(y))\, dy > 0.$$

Wenn also $A(x) \not\equiv 0$ *ist, ist auch*

$$(39) \qquad \liminf_{x \to +\infty} x^{-(r+3)/4} \int_0^x |P(y)|\, dy > 0$$

d. h.

$$(40) \qquad \liminf_{x \to +\infty} x^{-(r+1)/2} M(x) > 0, \quad \liminf_{x \to +\infty} x^{-(r-1)/4} T(x) > 0$$

und also

$$M(x) = \Omega(x^{(r+1)/2}) \quad \textit{und} \quad T(x) = \Omega(x^{(r-1)/4})$$

Beweis. Sei $0 < \lambda'_1 < \lambda'_2 < \ldots$ die Folge aller Werte $\bar{Q}(m_j/M_j - \alpha_j) > 0$ für ganze $m_1, m_2, \ldots, m_r$ und

$$a'_n = \sum \exp\Big(2\pi i \sum_{j=1}^{r} \frac{b_j}{M_j} m_j\Big),$$

wo über alle Systeme $m_1, m_2, \ldots, m_r$, für die $\bar{Q}(m_j/M_j - \alpha_j) = \lambda'_n$ ist, summiert wird. Im Spezialfall $M_1 = M_2 = \ldots = M_r = 1$ bewies Landau (siehe [7], Seite 25) für $\varrho > r/2$ die folgende Identität (J_ν ist die Besselsche Funktion I. Art mit dem Index ν):

$$(41) \qquad A_\varrho(x) - V_\varrho(x) = P_\varrho(x) = \frac{x^{(r+2\varrho)/4}}{\pi^\varrho \sqrt{(D)} \prod_{j=1}^{r} M_j} \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \frac{J_{r/2-\varrho}(2\pi\sqrt{(\lambda'_n x)})}{\lambda'^{(r+2\varrho)/4}_n}.$$

Mittels einer Transformation ($M_l M_j a_{lj}$ statt a_{lj}, b_j/M_j statt b_j, $\alpha_j M_j$ statt α_j für $j = 1, 2, \ldots, r$) ist leicht zu sehen, dass (41) auch im allgemeinen Fall gilt. Weiter schreiten wir genau wie Jarník in [1], S. 81–83 fort und beweisen die Beziehungen

(37) bzw. (38); (39) ist deren unmittelbare Folgerung und (40) folgt aus (39) mit Benutzung der Ungleichung

$$\int_0^x |P(y)| \, \mathrm{d}y \leqq \sqrt{(x\, M(x))} \, .$$

Literaturverzeichnis

[1] *V. Jarník:* Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre, Mathematische Zeitschrift *33* (1931), 62–84.

[2] *V. Jarník:* Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre. Zweite Abhandlung, Mathematische Zeitschrift *33* (1931), 85–97.

[3] *V. Jarník:* Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre. Dritte Abhandlung, Mathematische Zeitschrift *36* (1933), 581–617.

[4] *V. Jarník:* Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre, Věstník Král. Č. Sp. Nauk 1931, 1–17.

[5] *V. Jarník:* Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre. 5. Abhandlung, Časopis pro pěst. matematiky *69* (1940), 148–174.

[6] *V. Jarník:* Věty o střední hodnotě z teorie mřížových bodů. 6. pojednání, Časopis pro pěst. matematiky 70 (1941), 89–103.

[7] *E. Landau:* Ausgewählte Abhandlungen zur Gitterpunktlehre, Berlin 1962.

[8] *B. Novák:* On lattice points in high-dimensional ellipsoids (Preliminary communication), Comment. Math. Univ. Carol. *7* (1966), 479–484.

[9] *B. Novák:* Verallgemeinerung eines Peterssonschen Satzes und Gitterpunkte mit Gewichten, Acta Arithmetica *XIII* (1967), 423–454.

[10] *A. Walfisz:* Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln, Warszawa 1957.

Anschrift des Verfassers: Praha 8, Sokolovská 83, ČSSR (Matematicko-fyzikální fakulta KU).