Czechoslovak Mathematical Journal

Hans Triebel

Eigenwertverteilungen und Greensche Funktionen entarteter elliptischer Differentialoperatoren

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 18 (1968), No. 1, 117–136

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100816

Czechoslovak Mathematical Journal, 18 (93) 1968, Praha

EIGENWERTVERTEILUNGEN UND GREENSCHE FUNKTIONEN ENTARTETER ELLIPTISCHER DIFFERENTIALOPERATOREN

HANS TRIEBEL, Jena

(Eingegangen am 5. September 1966)

In der Arbeit werden selbstadjungierte entartete elliptische Differentialoperatoren der Ordnung $2m$ in einem beschränkten Gebiet Ω des n-dimensionalen euklidischen Raumes untersucht. Betrachtet man die quadratische Form

$$A[u, u] = \int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} A^\alpha_\beta(x)\, D^\alpha u D^\beta \bar{u}\, \mathrm{d}x$$

auf den unendlich oft differenzierbaren und in Ω finiten Funktionen, $(A^\alpha_\beta(x) = \overline{A^\beta_\alpha(x)}$, $A^\alpha_\beta(x)$ lokal integrierbar), so heißt der durch sie erzeugte Operator A entartet elliptisch, falls

$$A[u, u] \geqq \int_\Omega a(x) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2\, \mathrm{d}x\,,$$

$a(x) \geqq 0$, gilt. Das Maß der „Entartung" wird durch die Zugehörigkeit von $a^{-1}(x)$ zu $L_\varrho(\Omega)$, $1 \leqq \varrho \leqq \infty$, beschrieben, ($\varrho = \infty$ entspricht dem streng elliptischen Fall). In den Abschnitten 5 und 8 wird untersucht, wann A ein reines Punktspektrum besitzt, die Eigenwerte seien ν_i, $(i = 1, 2, \ldots)$, und für welche Exponenten γ $\sum_{i=1}^\infty (1/\nu_i)^\gamma$ konvergiert. Ferner werden Bedingungen angegeben, wann sich A^{-1} in der Form

$$(A^{-1}f)(x) = \int_\Omega G(x, y) f(y)\, \mathrm{d}y$$

darstellen läßt und welche Differenzierbarkeitseigenschaften die Greensche Funktion $G(x, y)$ besitzt (Satz 3 und Satz 8). Die Resultate verallgemeinern Ergebnisse der Arbeit [12]. In den Abschnitten 6 und 9 werden die entsprechenden Untersuchungen für selbstadjungierte, entartete elliptische Operatoren der Form

$$Au = \sum_{|\alpha| \leqq 2m} a_\alpha(x)\, D^\alpha u$$

durchgeführt, (Satz 5 und Satz 9). In den Abschnitten 7 und 10 wird das Spektrum der speziellen entartet-elliptischen Operatoren

$$Au = \sum_{|\beta|=m} (-1)^m D^\beta(r^\tau D^\beta u), \quad r = |x - x_0|, \quad x_0 \in \bar{\Omega},$$

betrachtet. Ferner wird untersucht, wann sich die inversen Operatoren als Integraloperatoren im obigen Sinne schreiben lassen und welche Differenzierbarkeitseigenschaften die Greenschen Funktionen besitzen, (Satz 7 und Satz 10). Es wird gezeigt, daß für $\tau = 2m$ der Operator A kein reines Punktspektrum besitzt.

I. VORBEREITENDE BETRACHTUNGEN

1. Bezeichnungen. Ω bezeichnet ein beschränktes offenes Gebiet im n-dimensionalen reellen euklidischen Raum R_n, $n \geqq 2$, über dessen Rand keine Voraussetzungen gemacht werden.

$x = (x_1, \ldots, x_n)$.

$C^k(\Omega)$ ist die Gesamtheit der komplexen Funktionen, deren sämtliche partielle Ableitungen bis zur Ordnung k einschließlich existieren und in $\bar{\Omega}$ stetig sind.

$C_0^\infty(\Omega)$ ist die Gesamtheit der in Ω finiten, unendlich oft differenzierbaren komplexen Funktionen. Entsprechend $C_0^\infty(R_n)$.

Q ist das quaderförmige Gebiet $0 < x_i < \pi$, $i = 1, \ldots, n$.

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ bezeichnet einen Multiindex mit nicht-negativen ganzzahligen Komponenten α_i, $i = 1, \ldots, n$. $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, $D_j = \partial/\partial x_j$.

Durch $D(A)$ wird das Definitionsgebiet des Operators A und durch $D[A]$ das Definitionsgebiet der Bilinearform (bzw. quadratischen Form) $A[.,.]$ gekennzeichnet.

$\mathring{W}_p^k = \mathring{W}_p^k(\Omega)$, $1 \leqq p \leqq \infty$, ist die Vervollständigung von $C_0^\infty(\Omega)$ in der Metrik

$$\|u\|_{\mathring{W}_p{}^k} = \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L_p},$$

wobei L_p die übliche Bedeutung hat.

Für $u \in \mathring{W}_p^k(\Omega) \subset L_p$ sind die Normierungen $\|u\|_{\mathring{W}_p{}^k}$ und

$$\|u\|_{W_p{}^k} = \|u\|_{\mathring{W}_p{}^k} + \|u\|_{L_p}$$

äquivalent [11], S. 66.

2. Eigenschaften der Operatoren $(-\Delta)^\alpha$, $\alpha > 0$ in quaderförmigen Gebieten. Obwohl die nachfolgenden Betrachtungen für beliebige „quaderförmige“ Gebiete

$a_i < x_i < b_i$, $i = 1, \ldots, n$, gelten, beschränke ich mich auf den Fall des Quaders Q

$$Q = \{x \mid 0 < x_i < \pi,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Definiert man den Operator $-\Delta u = -\sum_{i=1}^{n} D_i^2 u$ auf dem Abschluß der linearen Hülle der Funktionen $\prod_{j=1}^{n} \sin k_j x_j$, ($k_j$ natürliche Zahlen), in der Metrik $\|u\|_{\mathring{W}_2^2(Q)}$, so ist der Operator $-\Delta$ selbstadjungiert und positiv-definit, (d. h. $\|-\Delta u\|_{L_2} \geqq c\|u\|_{L_2}$, $c > 0$). $-\Delta$ besitzt ein reines Punktspektrum, seine Eigenwerte sind $\sum_{j=1}^{n} k_j^2$, seine Eigenfunktionen $\prod_{j=1}^{n} \sin k_j x_j$, [12], S. 327. Für beliebige reelle α ist es demzufolge sinnvoll, von dem selbstadjungierten Operator $(-\Delta)^\alpha$ zu sprechen.

Satz 1. *Ist $Q = \{x \mid 0 < x_i < \pi,\ i = 1, \ldots, n\}$ und ist m eine vorgegebene natürliche Zahl, so gilt für $0 < \alpha < m$ und für $u(x) \in C_0^\infty(Q)$ die Relation*

$$((-\Delta)^\alpha u, u) \leqq c\|u\|^2_{\mathring{W}_s^m(Q)},$$

falls $s \geqq 1$ und $s > 2n/(n + 2(m - \alpha))$ ist, mit einer von $u(x)$ unabhängigen positiven Konstanten c.

Bemerkung. Entscheidend für die späteren Betrachtungen ist, daß man $s < 2$ wählen kann. Der Satz bleibt richtig, wenn man den speziellen Quader Q durch einen allgemeinen Quader ersetzt.

Beweis. Sind k_j, $j = 1, \ldots, n$, natürliche Zahlen, so wird zur Abkürzung $|k| = \sum_{j=1}^{n} k_j$ gesetzt. Für beliebige komplexe Zahlen $a_{k_1 \ldots k_n}$ gehört

$$f(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \sum_{|k| \leqq K} a_{k_1 \ldots k_n} \sin k_1 x_1 \ldots \sin k_n x_n$$

zu $D((-\Delta)^\alpha)$. Es ist

$$(-\Delta)^\alpha f = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \sum_{|k| \leqq K} a_{k_1 \ldots k_n} \Big(\sum_{j=1}^{n} k_j^2\Big)^\alpha \sin k_1 x_1 \ldots \sin k_n x_n$$

und

$$(1)\quad ((-\Delta)^\alpha f, f) = \sum_{|k| \leqq K} |a_{k_1 \ldots k_n}|^2 \Big(\sum_{j=1}^{n} k_j^2\Big)^\alpha = \sum_{|k| \leqq K} |a_{k_1 \ldots k_n}|^2 \Big(\sum_{j=1}^{n} k_j^2\Big)^m \Big(\sum_{j=1}^{n} k_j^2\Big)^{\alpha - m}.$$

Für $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $|\beta| = m$, ist

$$(2)\quad \sum_{|\beta| = m} \|D^\beta f\|_{L_p} = \sum_{|\beta| = m} \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \left\| \sum_{|k| \leqq K} \pm a_{k_1 \ldots k_n} k_1^{\beta_1} \ldots k_n^{\beta_n} \begin{Bmatrix} \sin k_1 x_1 \\ \cos k_1 x_1 \end{Bmatrix} \ldots \begin{Bmatrix} \sin k_n x_n \\ \cos k_n x_n \end{Bmatrix} \right\|_{L_p},$$

wobei man für $\beta_j \equiv 0(2)$ an der entsprechenden Stelle $\sin k_j x_j$ und für $\beta_j \equiv 1(2)$ $\cos k_j x_j$ zu nehmen hat.

Die Zahlen $\sum_{i=1}^{n} k_i^2$ sind (unter Berücksichtigung der Vielfachheiten) die Eigenwerte λ_j des Operators $-\Delta$. Nach [12], S. 329, ist

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^\gamma} < \infty \quad \text{für} \quad \gamma > \frac{n}{2}. \tag{3}$$

(a) Es sei $m - \alpha > n/2$. Dann folgt aus (1) und (3)

$$((-\Delta)^\alpha f, f)^{1/2} \leqq c \sup_{|k| \leqq K} |a_{k_1 \ldots k_n}| \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)^m \leqq c \sum_{|\beta|=m} \sup_{|k| \leqq K} |a_{k_1 \ldots k_n}| k_1^{\beta_1} \ldots k_n^{\beta_n} \leqq$$

$$\leqq c \sum_{|\beta|=m} \left\| \sum_{|k| \leqq K} \pm k_1^{\beta_1} \ldots k_n^{\beta_n} a_{k_1 \ldots k_n} \begin{Bmatrix} \sin k_1 x_1 \\ \cos k_1 x_1 \end{Bmatrix} \ldots \begin{Bmatrix} \sin k_n x_n \\ \cos k_n x_n \end{Bmatrix} \right\|_{L_1} {}^{1}),$$

wobei $\sin k_j x_j$ bezw. $\cos k_j x_j$ und die Vorzeichen wie in Formel (2) gewählt werden. Nach (2) ist somit

$$((-\Delta)^\alpha f, f)^{1/2} \leqq c \sum_{|\beta|=m} \|D^\beta f\|_{L_1}. \tag{4}$$

(b) Es sei $m - \alpha \leqq n/2$. Aus (1) folgt

$$((-\Delta)^\alpha f, f) \leqq \Big(\sum_{|k| \leqq K} |a_{k_1 \ldots k_n}|^{2p} \big(\sum_{j=1}^{n} k_j^2\big)^{mp}\Big)^{1/p} \Big(\sum_{|k| \leqq K} \big(\sum_{j=1}^{n} k_j^2\big)^{-(m-\alpha)p'}\Big)^{1/p'},$$

$(1/p) + (1/p') = 1$. Der zweite Faktor ist nach (3) gleichmäßig bezüglich K beschränkt, wenn $(m - \alpha)\, p' > n/2$ ist. Das ist für

$$p < \frac{n}{n - 2(m - \alpha)}$$

erfüllt. Somit ist

$$((-\Delta)^\alpha f, f)^{1/2} \leqq c \sum_{|\beta|=m} \Big(\sum_{|k| \leqq K} |k_1^{\beta_1} \ldots k_n^{\beta_n} a_{k_1 \ldots k_n}|^{2p}\Big)^{1/2p}. \tag{5}$$

Die Fouriertransformation bezüglich des Funktionensystems

$$\left\{ \begin{Bmatrix} \sin k_1 x_1 \\ \cos k_1 x_1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sin k_2 x_2 \\ \cos k_2 x_2 \end{Bmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{Bmatrix} \sin k_n x_n \\ \cos k_n x_n \end{Bmatrix}, \quad k_j = 0, 1, 2, \ldots \right\},$$

(man hat an der j-ten Stelle entweder stets $\sin k_j x_j$ oder stets $\cos k_j x_j$ zu nehmen), leistet eine isometrische Abbildung von $L_2(Q)$ in den Folgenraum l_2 und eine beschränkte Abbildung von $L_1(Q)$ in l_∞. Aus dem Konvexitätstheorem von RIESZ,

[1]) Sämtliche Konstanten, deren numerische Werte ohne Interesse sind, werden mit dem gleichen Buchstaben c bezeichnet.

([3a] VI, Theorem 10 oder 11, S. 525) folgt, daß die Fouriertransformation für $2 \leqq r \leqq \infty$ eine beschränkte Abbildung von $L_{r'}(Q)$ $1/r + 1/r' = 1$, in l_r leistet.

Für $2 \leqq 2p < 2n/(n - 2(m - \alpha))$ folgt somit aus (5)

$$((-\Delta)^\alpha f, f)^{1/2} \leqq c \sum_{|\beta|=m} \left\| \sum_{|k| \leqq K} \pm a_{k_1 \dots k_n} k_1^{\beta_1} \dots k_n^{\beta_n} \begin{Bmatrix} \sin k_1 x_1 \\ \cos k_1 x_1 \end{Bmatrix} \dots \begin{Bmatrix} \sin k_n x_n \\ \cos k_n x_n \end{Bmatrix} \right\|_{L_{(2p)'}} .$$

Mit $(2p)' = s$ gilt somit die Einschränkung

$$2 \geqq s > \frac{2n}{n + 2(m - \alpha)} .$$

Nach (2) ist somit

$$((-\Delta)^\alpha f, f)^{1/2} \leqq c \sum_{|\beta|=m} \|D^\beta f\|_{L_s} . \tag{6}$$

$u(x) \in C_0^\infty(Q)$ kann man einschließlich sämtlicher Ableitungen bis zur Ordnung m gleichmäßig durch trigonometrische Polynome der obigen Gestalt approximieren. Der Satz folgt dann durch Grenzübergang in den Formeln (4) und (6).

3. Koordinierte Normen. In diesem Punkt werden einige vorbereitende Betrachtungen über entartete elliptische Differentialoperatoren durchgeführt. Ω ist ein beschränktes Gebiet im R_n. Auf $D[A] = C_0^\infty(\Omega)$ wird die Bilinearform

$$A[u, v] = \int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} A_\alpha^\beta(x)\, D^\beta u\, D^\alpha \bar{v}\, \mathrm{d}x \tag{7}$$

betrachtet. Dabei sollen die Funktionen $A_\beta^\alpha(x)$ lokal integrierbar sein. Ferner sei $A_\beta^\alpha(x) = \overline{A_\alpha^\beta(x)}$, so daß $A[u, u]$ reell ist. Die quadratische Form nenne ich „entartet elliptisch", wenn

$$A[u, u] \geqq \int_\Omega a(x) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2\, \mathrm{d}x\,, \quad u \in D[A] = C_0^\infty(\Omega)\,, \tag{8}$$

$a(x) \geqq 0$, ist. $a(x)$ bezeichne ich als „Elliptizitätsfunktion". Deutet man (7) als Distribution, so läßt sich $A[u, v]$ darstellen als

$$A[u, v] = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (-1)^m D^\alpha(A_\alpha^\beta(x)\, D^\beta u)\, (\bar{v}) . \tag{9}$$

Satz 2. *Genügt die Elliptizitätsfunktion $a(x)$, $a(x) \geqq 0$, für $\varrho \geqq \max(1, n/2m)$ der Bedingung $a^{-1}(x) \in L_\varrho(\Omega)$, so gilt für $u \in D[A] = C_0^\infty(\Omega)$*

$$\|u\|_{L_2} \leqq c \|u\|_{\mathring{W}^m_{2\varrho/(1+\varrho)}} \leqq c \sqrt{(A[u, u])} . \tag{10}$$

Die Normen $A[.,.]$ und $\|.\|_{L_2}^2$ sind koordiniert.

Bemerkung. Aus dem Satz folgt insbesondere, daß $A[.,.]$ positiv definit ist. Da die Normen koordiniert sind, kann man $C_0^\infty(\Omega)$ so in der Metrik $A[.,.]$ abschließen, daß auch der Abschluß in $L_2(\Omega)$ enthalten ist. Daraus folgt, daß die (abgeschlossene) Form $A[.,.]$ von einem selbstadjungierten positiv-definiten Operator erzeugt wird, den ich mit A bezeichne und „entartet-elliptisch" nenne. Der Begriff der koordinierten Norm wird im Sinne von GELFAND-SCHILOW [5], S. 11, verwendet: Ist $u_j \in D[A]$ eine Fundamentalfolge in der Metrik $A[.,.]$ und eine Nullfolge in der Metrik $\|.\|_{L_2}$, so ist u_j auch in der Metrik $A[.,.]$ eine Nullfolge.

Beweis. Nach den Sobolewschen Einbettungssätzen ist für $u \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\|u\|_{L_2} \leqq c\|u\|_{\mathring{W}^m{}_{\max(1,2n/(n+2m))}} \text{ [10], [11]}.$$

Da

$$\frac{2\varrho}{1+\varrho} \geqq \max\left(1, \frac{2n}{n+2m}\right)$$

ist und Ω beschränkt ist, folgt sofort

$$\|u\|_{L_2} \leqq c\|u\|_{\mathring{W}^m{}_{2\varrho/(1+\varrho)}} \leqq c \sum_{|\beta|=m} \left(\int_\Omega \frac{1}{a^{\varrho/(1+\varrho)}} (a|D^\beta u|^2)^{\varrho/(1+\varrho)} \,\mathrm{d}x\right)^{(1+\varrho)/2\varrho} \leqq$$

$$\leqq c \sum_{|\beta|=m} \left(\int_\Omega a(x)\,|D^\beta u|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \leqq c\,\sqrt{(A[u,u])}\,,$$

womit (10) bewiesen ist.

Der Beweis, daß $A[.,.]$ und $\|.\|_{L_2}^2$ koordinierte Normen sind, ist eine Modifikation eines entsprechenden Beweises aus [12], S. 328. Es sei $\{u_j\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ eine Fundamentalfolge in der Metrik $A[.,.]$, d. h.

$$A[u_j - u_{j'}, u_j - u_{j'}] \to 0 \quad \text{für} \quad j, j' \to \infty\,, \tag{11}$$

und in der Metrik $\|.\|_{L_2}$ eine Nullfolge, d. h.

$$\|u_j\|_{L_2} \to 0 \quad \text{für} \quad j \to \infty\,.$$

Da die Normen $\|.\|_{\mathring{W}_p{}^k}$ und $\|.\|_{L_2}$ koordiniert sind, folgt aus (10)

$$\|u_j\|_{\mathring{W}^m{}_{2\varrho/(1+\varrho)}} \to 0 \quad \text{für} \quad j \to \infty\,. \tag{12}$$

Ist $\Omega_N = \{x \mid |A_\beta^\alpha(x)| \geqq N$ für ein Indexpaar (α, β) oder $a(x) \leqq 1/N\}$, so folgt aus den Voraussetzungen

$$\lim_{N\to\infty} |\Omega_N| = 0\,. \tag{13}$$

($|\Omega_N|$ ist das Maß von Ω_N).

Setzt man $\omega_N = \Omega - \Omega_N$ und fixiert man einen Multiindex α, $|\alpha| = m$, so folgt aus

$$\frac{1}{N} \|D^\alpha u_j\|_{L_2(\omega_N)} \leqq A[u_j, u_j] \,,$$

daß $D^\alpha u_j$ in $L_2(\omega_N)$ eine Fundamentalfolge ist. Da andererseits nach (12) $D^\alpha u_j$ in $L_{2\varrho/(1+\varrho)}(\omega_N)$ eine Nullfolge ist, ist $D^\alpha u_j$ auch in $L_2(\omega_N)$ eine Nullfolge. Daraus folgt

$$(14) \quad A[u_j, u_j]_{\omega_N} = \int_{\omega_N} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} A_\beta^\alpha(x)\, D^\alpha u_j\, D^\beta \bar{u}_j \,\mathrm{d}x \leqq c \sum_{|\alpha|=m} \int_{\omega_N} |D^\alpha u_j|^2 \,\mathrm{d}x \to 0$$

für $j \to \infty$. Nimmt man entgegen der Behauptung des Satzes an, daß eine Teilfolge, (o. B. d. A. nehme ich die volle Folge), existiert, so daß

$$\sqrt{(A[u_j, u_j])} \geqq \sigma > 0$$

ist, so folgt aus (14)

$$(15) \qquad \sqrt{(A[u_j, u_j]_{\Omega_N})} \geqq \frac{\sigma}{2}$$

für $j \geqq j_0(N)$. ($A[.\,,.]_{\Omega_N}$ wird analog wie $A[.\,,.]_{\omega_N}$ definiert.) Da $\{u_j\}$ in der Metrik $A[.\,,.]$ eine Fundamentalfolge ist, folgt

$$\sqrt{(A[u_j, u_j]_{\Omega_N})} \geqq \sqrt{(A[u_i, u_i]_{\Omega_N})} - \sqrt{(A[u_j - u_i, u_j - u_i]_{\Omega_N})} \geqq \frac{\sigma}{4}$$

für $j \geqq j_1$ unabhängig von N. (Hierzu braucht man nur $i, j \geqq j_1$ so zu wählen, daß der zweite Summand auf der rechten Seite kleiner als $\sigma/4$ unabhängig von N wird. Dann wählt man i in Abhängigkeit von N größer als $i_0(N)$, (15).) Für $N \to \infty$ erhält man einen Widerspruch zu (13). Damit ist Satz 2 bewiesen.

4. Eine Bemerkung über formal selbstadjungierte Operatoren. Ist Ω ein beschränktes Gebiet, so nennt man den Operator

$$(16) \qquad Au = \sum_{|\alpha| \leqq 2m} a_\alpha(x)\, D^\alpha u \,, \quad a_\alpha(x) \in C^{(\alpha)}(\Omega) \,,$$

formal selbstadjungiert, wenn er mit seinem adjungierten Operator

$$A'u = \sum_{|\alpha| \leqq 2m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(\bar{a}_\alpha u) = \sum_{|\alpha| \leqq 2m} a'_\alpha(x)\, D^\alpha u$$

übereinstimmt, d. h., wenn $a_\alpha(x) = a'_\alpha(x)$ gilt [2]. Es folgt sofort, daß $a_\alpha(x)$ für $|\alpha| = 2m$ reell sein muß. Einen formal selbstadjungierten Operator kann man bezüglich der höchsten Ableitungen symmetrisieren, d. h., man kann

$$(17) \qquad Au = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (-1)^m D^\alpha(A_\beta^\alpha(x)\, D^\beta u) + Bu$$

mit

$$(18) \qquad Bu = \sum_{|\gamma|<2m} b_\gamma(x)\, D^\gamma u\,, \quad b_\gamma(x) \in C^{|\gamma|}(\Omega)\,,$$

erreichen. $A_\beta^\alpha = \overline{A_\alpha^\beta} \in C^{2m}(\Omega)$. B ist dann ebenfalls formal selbstadjungiert. Hierzu braucht man nur für alle Multiindizes α und β mit $\alpha + \beta = \delta$ (d. h. $\alpha_i + \beta_i = \delta_i$ $i = 1, \ldots, n$), $|\delta| = 2m$, $A_\beta^\alpha(x) = ((-1)^m/k)\, a_\delta(x)$ zu setzen. k ist dabei die Anzahl der Zerlegungen von δ in α und β.

II. DAS SPEKTRUM ENTARTETER ELLIPTISCHER DIFFERENTIALOPERATOREN

5. Operatoren, die nur Ableitungen der höchsten Ordnung enthalten. In diesem Abschnitt werden entartete elliptische Differentialoperatoren betrachtet, wie sie in der Bemerkung im Anschluß an Satz 2, Abschnitt 3, eingeführt wurden. Den Operator A denke ich mir also aus der (nach Satz 2 abschließbaren) Bilinearform (7) gewonnen. Dabei brauchen die Funktionen $A_\beta^\alpha(x)$ nur lokal integrierbar zu sein und der Bedingung $A_\beta^\alpha = \overline{A_\alpha^\beta}$ zu genügen. A kann man formal (falls $u \in C_0^\infty(\Omega)$ ist im Sinne der Theorie der Distributionen) in der Form (9) darstellen. Mit $a(x)$ wird wie im Abschnitt 3 die Elliptizitätsfunktion, Formel (8), bezeichnet.

Satz 3. *Genügt die Elliptizitätsfunktion $a(x)$ der Bedingung $a^{-1}(x) \in L_\varrho(\Omega)$ mit $\varrho > n/2m$, ($\varrho \geqq 1$), so besitzt der positiv-definite Operator A ein reines Punktspektrum. Bezeichnet man seine Eigenwerte mit ν_i, $i = 1, 2, \ldots$, so gilt*

$$(19) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_i^\gamma} < \infty \quad \text{für} \quad \gamma > \frac{n\varrho}{2m\varrho - n}\,.$$

Bemerkung. Ein selbstadjungierter Operator A hat ein „reines Punkspektrum", wenn er kein stetiges Spektrum [6], S. 18, besitzt. D. h., daß das Spektrum nur aus isolierten Eigenwerten endlicher Vielfachheit besteht.

Beweis. Daß der Operator A positiv-definit ist, folgt sofort aus (10).

1. Schritt. Ich wähle $\Omega = Q$, wobei Q der Quader aus Satz 1 ist. Formel (10) und Satz 1 zeigen, daß

$$(20) \qquad ((-\Delta)^\alpha u, u) \leqq c\|u\|^2_{\mathring{W}^m_{2\varrho/(1+\varrho)}} \leqq c\, A[u, u]\,, \quad u \in C_0^\infty(Q)\,,$$

gilt, falls

$$\frac{2\varrho}{1+\varrho} > \frac{2n}{n + 2(m-\alpha)}\,, \quad 0 < \alpha < m\,,$$

ist. Das ist für jedes α mit

$$(21) \qquad 0 < \alpha < m - \frac{n}{2\varrho}$$

erfüllt. Da $(-\Delta)^\alpha$, $\alpha > 0$, ein Operator mit rein diskretem Spektrum ist, gilt nach (20) das gleiche für A. Bezeichnet man die Eigenwerte von $(-\Delta)^\alpha$ mit μ_i, so folgt weiter aus Formel (20)

$$\mu_i \leqq c\nu_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Also ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_i^\gamma} \leqq c \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_i^\gamma} < \infty \quad \text{für jedes } \gamma \text{ mit} \quad \gamma\alpha > \frac{n}{2}\,.$$

Hierbei wurde verwendet, daß $\mu_i^{1/\alpha} = \lambda_i$ die Eigenwerte von $-\Delta$ sind, für die nach [12], S. 329, die Abschätzung $\sum_{i=1}^{\infty} (1/\lambda_i^\gamma) < \infty$ für $\gamma > n/2$ gilt. (19) folgt jetzt aus (21).

2. Schritt. Ω beliebig, (beschränkt). In der Bemerkung nach Satz 1 ist darauf hingewiesen worden, daß Satz 1 für beliebige quaderförmige Gebiete q, $a_i < x_i < b_i$, $i = 1, \ldots, n$, richtig ist. Damit bleiben aber auch die Betrachtungen des ersten Schrittes, insbesondere (20) und (21), für beliebige Quader q richtig. Wählt man jetzt q so, daß $q \supset \bar{\Omega}$ gilt, so folgt der Satz aus Schritt 1 und dem Variationsprinzip von Courant. Damit ist Satz 3 bewiesen.

6. Allgemeine Operatoren. In diesem Abschnitt soll betrachtet werden, wie weit sich die Resultate des vorangegangenen Abschnittes auf Operatoren übertragen lassen, die nicht nur Ableitungen der höchsten Ordnung enthalten. Genauer gesagt, soll der Einfluß eines „Störoperators", der nur Ableitungen bis zur Ordnung $2m - 1$ enthält, auf einen entartet elliptischen Operator, der sich aus Ableitungen der Ordnung $2m$ aufbaut, untersucht werden. Da es bei den nachfolgenden Überlegungen nicht darauf ankommt, die Voraussetzungen bezüglich der Koeffizienten der betrachteten Operatoren möglichst abzuschwächen, wähle ich Bedingungen, die es gestatten, alle Rechnungen ohne Zusatzüberlegungen durchführen zu können. Es werden formal selbstadjungierte Operatoren A der Form (16), Abschnitt 4, betrachtet. Es ist zweckmäßig, A gleich in die Form (17), (18) umzuschreiben. Dabei soll der „Hauptteil"

$$\sum_{|\alpha| = |\beta| = m} (-1)^m D^\alpha(A_\beta^\alpha(x)\, D^\beta u) \tag{22}$$

entartet elliptisch im Sinne von Abschnitt 5 sein. Der „Hauptteil" (22) läßt (im Gegensatz zum streng elliptischen Fall) i. a. keine „Störungen" (18) zu, die Ableitungen bis zur Ordnung $2m - 1$ enthalten. Vielmehr hängt die Ordnung der Ableitungen, die in den Operator B, Formel (18), eingehen dürfen, von der Art der Singularität der Elliptizitätsfunktion $a(x)$ ab.

Satz 4. *Es sei* $Q = \{x \mid 0 < x_i < \pi,\ i = 1, \ldots, n\}$. *Ferner sei* A *der formal selbstadjungierte Operator* (16), *der auch in der Form* (17), (18) *geschrieben wird.*

$D(A) = C_0^\infty(Q)$. Der „Hauptteil“ von A, Formel (22), soll entartet elliptisch sein, d. h., es soll

$$(23) \qquad \int_Q \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} A_\beta^\alpha(x)\, D^\beta u D^\alpha \bar{u}\, dx \geqq \int_Q a(x) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2\, dx\,,$$

$a(x) \geqq 0$, $u \in C_0^\infty(Q)$, gelten.

*Enthält der „Störoperator“ B, Formel (18), nur Ableitungen bis zur **Ordnung** k, $(0 \leqq k \leqq 2m-1)$, (d. h. $b_\gamma(x) \equiv 0$ für $|\gamma| > k$) und genügt die Elliptizitätsfunktion $a(x)$ der Bedingung*

$$(24) \qquad a^{-1}(x) \in L_\varrho(Q) \quad \textit{für} \quad \varrho > \frac{n}{2m-k}, \quad (\infty \geqq \varrho \geqq 1)\,,$$

so gilt

$$(25) \qquad ((-\Delta)^\alpha u, u) \leqq c(Au, u) + c\|u\|_{L_2}^2, \quad u \in C_0^\infty(Q)\,,$$

für

$$(26) \qquad 0 < \alpha < m - \frac{n}{2\varrho}$$

mit einer von u unabhängigen positiven Konstanten c.

Bemerkung. (25) und (26) stimmen mit (20) und (21) überein. (24) zeigt, daß man z. B. im Falle $n/(2m-1) \geqq \varrho > n/2m$ den „Hauptteil“ nur durch einen Operator $Bu = b_0(x)\, u$ stören kann. Man sieht also, daß die Bezeichnung „Hauptteil“ im Falle der entartet-elliptischen Differentialoperatoren problematisch ist. Ist der Operator (22) streng elliptisch, dem entspricht $\varrho = \infty$, was bei den Betrachtungen stets zugelassen ist, so darf Bu Ableitungen bis zur Ordnung $2m-1$ enthalten. Satz 4 gilt für beliebige quaderförmige Gebiete q, $a_i < x_i < b_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Beweis. Nach (18) gilt $b_\gamma(x) \in C^{|\gamma|}(Q)$. Durch partielle Integration läßt sich somit für $u \in C_0^\infty(Q)$

$$(Bu, u) = \sum_{\substack{|\gamma|+|\delta| \leqq k \\ |\gamma| \leqq m, |\delta| \leqq m}} \int_Q B_\delta^\gamma(x)\, D^\gamma u\, D^\delta \bar{u}\, dx\,,$$

$B_\delta^\gamma(x)$ beschränkt, erreichen.

$$(27) \qquad \left|\int_Q B_\delta^\gamma(x)\, D^\gamma u\, D^\delta \bar{u}\, dx\right| \leqq c\|u\|_{\mathring{W}_p^{|\gamma|}} \cdot \|u\|_{\mathring{W}_{p'}^{|\delta|}}\,,$$

p vorerst beliebig, $(1/p) + (1/p') = 1$, $(1 \leqq p \leqq \infty)$. O. B. d. A. sei $|\gamma| \geqq |\delta|$, so daß $|\delta| < m$ ist. Vorübergehend wird $r = 2\varrho/(1+\varrho)$ gesetzt.

$$(28) \qquad \|u\|_{\mathring{W}_p^{|\gamma|}} \leqq c\|u\|_{\mathring{W}_r^m} \quad \text{für} \quad \frac{n}{p} - |\gamma| > \frac{n}{r} - m \quad [11], [13] \text{ (Satz 8a)}\,,$$

$$(29) \qquad \|u\|_{\mathring{W}_{p'}^{|\delta|}} \leqq \varepsilon\|u\|_{\mathring{W}_r^m} + C(\varepsilon)\, \|u\|_{L_2} \quad \text{für} \quad \frac{n}{p'} - |\delta| > \frac{n}{r} - m$$

[10], [13] (Satz 8a). Dabei ist $\varepsilon > 0$ beliebig vorgebbar. Addiert man in (28) und (29) die Bedingungen für die Koeffizienten, so führt das zu

$$\varrho > \frac{n}{2m - (|\gamma| + |\delta|)} .$$

Ist umgekehrt die letzte Bedingung erfüllt, so gibt es stets ein geeignetes p, $1 \leqq p \leqq \infty$, für welches die Abschätzungen (28) und (29) richtig sind. Wegen $|\gamma| + |\delta| \leqq k$ folgt somit aus (27), (28) und (29)

$$(30) \qquad |(Bu, u)| \leqq \varepsilon \|u\|^2_{\mathring{W}^m_{2\varrho/(1+\varrho)}} + C(\varepsilon) \|u\|^2_{L_2}, \quad u \in C_0^\infty(Q) .$$

Aus den Voraussetzungen des Satzes und den Formeln (20), (21) und (30) folgt

$$|(Bu, u)| \leqq \varepsilon \int_Q \sum_{|\alpha| = |\beta| = m} A_\beta^\alpha(x) D^\alpha u \, D^\beta \bar{u} \, dx + C(\varepsilon) \|u\|^2_{L_2} .$$

Geeignete Wahl von ε und erneute Anwendung von (20) führen schließlich zu

$$(Au, u) \geqq \frac{1}{2} \int_Q \sum_{|\alpha| = |\beta| = m} A_\beta^\alpha(x) D^\alpha u \, D^\beta \bar{u} \, dx - C\|u\|^2_{L_2} \geqq c((-\Delta)^\alpha u, u) - C\|u\|^2_{L_2} .$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 5. *Ω ist ein beschränktes Gebiet im R_n.*

$$Au = \sum_{|\alpha| \leqq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha u , \quad a_\alpha(x) \in C^{|\alpha|}(\Omega) , \quad D(A) = C_0^\infty(\Omega) ,$$

sei ein formal selbstadjungierter entartet — elliptischer Differentialoperator mit der Elliptizitätsfunktion $a(x)$, $a^{-1}(x) \in L_\varrho(\Omega)$, $\varrho \geqq 1$. [Schreibt man A in der Form (17), (18), *so darf für $\varrho > n/(2m - k)$ der Störoperator B Ableitungen bis zur Ordnung k einschließlich enthalten.] Bezeichnet man mit A_F die Friedrichssche Erweiterung von A* [3b], S. 1240, *so besitzt A_F für $a^{-1} \in L_\varrho(\Omega)$ mit $\varrho > n/2m$, ($\varrho \geqq 1$), ein reines Punktspektrum. Bezeichnet man die Eigenwerte von A_F mit ν_i, $i = 1, 2, \ldots$, so gilt für hinreichend große ξ*

$$(31) \qquad \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{(\nu_i + \xi)^\gamma} < \infty \quad \text{für} \quad \gamma > \frac{n\varrho}{(2m\varrho - n)} .$$

Bemerkung. Satz 5 ist das Analogon zu Satz 3. Die Einführung der Zahl ξ ist unwichtig, sie dient nur dazu, sicherzustellen, daß $A_F + \xi E$ [2]) positiv-definit ist, so daß 0 kein Eigenwert von $A_F + \xi E$[2]) sein kann. Im streng elliptischen Fall entspricht A_F

[2]) E ist der identische Operator.

dem für das Dirichletsche Randwertproblem mit verschwindenden Randbedingungen zuständigen Operator [2]. Im Falle entartet – elliptischer Operatoren ist für spezielle am Rande singulär werdende Elliptizitätsfunktionen die Art der Randwertannahme untersucht [7], [4], [14].

Beweis. (25) mit $\alpha = 0$ zeigt, daß A halbbeschränkt ist. (Für $\alpha = 0$ ist die Einschränkung $Q = \Omega$ nicht notwendig, wie der Beweis von Satz 4 zeigt). Damit ist es sinnvoll, von der Friedrichsschen Erweiterung A_F zu sprechen. $A_F + \xi E$ ist für hinreichend große ξ positiv-definit und es gilt nach Satz 4 und der anschließenden Bemerkung

$$((-\Delta^\alpha u, u) \leqq c((A_F + \xi E) u, u)$$

für beliebige quaderförmige Gebiete q, $a_i < x_i < b_i$, $i = 1, \ldots, n$. Aus der letzten Abschätzung folgt Satz 5 durch analoge Überlegungen wie beim Beweis des Satzes 3.

7. Operatoren mit speziellen Elliptizitätsfunktionen. Störend an der Formulierung der Sätze 3 bis 5 ist die Einschränkung $\varrho \geqq 1$. Fordert man statt $a^{-1}(x) \in L_\varrho(\Omega)$ für die Elliptizitätsfunktion $a(x)$

$$a^{-\varrho}(x) \in L_1(\Omega), \quad \varrho > 0,$$

so erscheint die Einschränkung $\varrho \geqq 1$ unzweckmäßig. (Die Forderung $\varrho > n/2m$ ist dagegen der Problemstellung gut angepaßt, wie unten, Satz 7a, noch durch ein Beispiel belegt wird). In diesem Abschnitt sollen für die speziellen Elliptizitätsfunktionen

$$a(x) = r^\tau, \quad \tau > 0, \quad r = |x - x_0|, \quad x_0 \in \bar{\Omega},$$

(x_0 fixiert), unter Umgehung der Bedingung $\varrho \geqq 1$, (dem entspricht, daß auch Werte $\tau \geqq n$ zugelassen werden), die den Sätzen 3 bis 5 entsprechenden Resultate hergeleitet werden. Hierbei werden als Hilfsmittel Einbettungssätze für Räume mit Gewichtsfunktionen [7] verwendet.

Satz 6. $Q = \{x \mid 0 < x_i < \pi, i = 1, \ldots, n\}$. *Ist* $n \geqq 2$ *und* m *eine vorgegebene natürliche Zahl, so ist für* $0 \leqq \alpha \leqq m$ *und* $\tau < 2(m - \alpha)$

$$((-\Delta)^\alpha u, u) \leqq c \int_Q r^\tau \sum_{|\beta|=m} |D^\beta u|^2 \, dx, \quad u \in C_0^\infty(Q), \tag{32}$$

mit einer von u *unabhängigen positiven Konstanten* c.

Bemerkung. Satz 6 stimmt für $\varrho \geqq 1$ und $a(x) = r^\tau$ mit den Formeln (20) und (21) überein, sofern man in der Ungleichung (20) auf das Mittelstück verzichtet. Aus $(r^\tau)^{-\varrho} \in L_1(Q)$ folgt nämlich $\tau < n/\varrho$, also nach (21) $\tau < 2(m - \alpha)$. Umgekehrt sieht man, daß man für jedes $\tau < n$, $\tau < 2(m - \alpha)$, ein geeignetes $\varrho \geqq 1$ finden kann, für welches (21) gilt und $\tau < n/\varrho$ ist. Der Satz gilt für beliebige Quader.

Beweis. 1. Schritt. Ist $\delta \geqq 0$ und ist $v(t)$ eine im Intervall $\langle 0, \infty)$ einmal stetig differenzierbare Funktion, die für $t \geqq t_0(v)$ identisch verschwindet, so gilt

$$\int_0^\infty |v(t)|^p\, t^\delta\, dt \leqq c \int_0^\infty |v'(t)|^p\, t^{\delta+p}\, dt\,, \quad 1 \leqq p < \infty\,,$$

[7], S. 600.

Für $u(x) \in C_0^\infty(Q)$ folgt

$$\int_0^\infty |u(r, \vartheta)|^p\, r^{n-1+\delta}\, dr \leqq c \int_0^\infty \left|\frac{\partial u}{\partial v}\right|^p r^{n-1+\delta+p}\, dr \leqq c \int_0^\infty \sum_{j=1}^n |D_j u|^p\, r^{n-1+\delta-p}\, dr\,.$$

Dabei sind $(r\, \vartheta)$ Polarkoordinaten. Also ist

$$\int_Q |u(x)|^p\, r^\delta\, dx \leqq c \int_Q \sum_{j=1}^n |D_j u|^p\, r^{\delta+p}\, dx \leqq c \int_Q \sum_{|\beta|=m} |D^\beta u|^p\, r^{\delta+mp}\, dx\,, \tag{33}$$

letzteres durch Iteration. Für $1 \leqq p < 2$ führt die Anwendung der Hölderschen Ungleichung zu

$$\int_Q |u(x)|^p\, dx \leqq c \left(\int_Q r^{2(\gamma+mp)/p} \sum_{|\beta|=m} |D^\beta u|^2\, dx \right)^{p/2}$$

mit $2\gamma/(2-p) < n$. Daraus folgt

$$\left(\int_Q |u(x)|^p\, dx \right)^{1/p} \leqq c \left(\int_Q r^\varkappa \sum_{|\beta|=m} |D^\beta u|^2\, dx \right)^{1/2} \tag{34}$$

für

$$\varkappa < 2m - n + \frac{2n}{p}.$$

2. Schritt. Es sei $[\alpha] = k - 1$, also $k - 1 \leqq \alpha < k$, $(k = 1, \ldots, m)$. Nach Satz 1 ist für $u \in C_0^\infty(Q)$ $((-\Delta)^\alpha u, u) \leqq c\|u\|^2_{\mathring{W}_s{}^k}$ für

$$s > \frac{2n}{n + 2(k - \alpha)}. \tag{36}$$

(Da $n \geqq 2$ gefordert war, ist die Bedingung $s \geqq 1$ automatisch erfüllt). Aus (34), (35) folgt dann für $p = s$ und $\tau < 2(m - k) - n + (2n/s)$

$$\left((-\Delta)^\alpha u, u \right) \leqq c \int_\Omega r^\tau \sum_{|\beta|=m} |D^\beta u|^2\, dx\,.$$

Setzt man (36) in die Abschätzung für τ ein, so folgt $\tau < 2(m - \alpha)$. Umgekehrt ist jeder solche Wert von τ durch geeignete Wahl von s, (36), erreichbar. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 7. *Ω sei ein beliebiges beschränktes Gebiet im R_n.*

$$(37) \qquad Au = (-1)^m \sum_{|\beta|=m} D^\beta(r^\tau D^\beta u)\,, \quad D(A) = C_0^\infty(\Omega)\,, \quad r = |x - x_0|\,,$$
$$x_0 \in \bar{\Omega}\,, \quad \tau \leqq 2m\,.$$

A_F sei die Friedrichssche Erweiterung von A.

(a) *Ist $\tau = 2m$, so ist das stetige Spektrum von A_F nicht leer. ($x_0 \in \Omega$, d. h. x_0 soll nicht auf dem Rand von Ω liegen)*

(b) *Ist $\tau < 2m$, so besitzt A_F ein reines Punktspektrum. Bezeichnet man die Eigenwerte von A_F mit ν_i, $i = 1, 2, \ldots$, so ist*

$$(38) \qquad \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{\nu_i^\gamma} < \infty \quad \textit{für} \quad \gamma > \frac{n}{2m - \tau}\,.$$

Bemerkung. Der Begriff „stetiges Spektrum" wird im Sinne von GLASMAN [6], S. 18, verwendet. (a) zeigt, daß entartet – elliptische Differentialoperatoren mit „stark singulären" Elliptizitätsfunktionen die Eigenschaft, ein reines Punktspektrum zu besitzen, verlieren können. Gleichzeitig zeigt (a), daß man die Bedingung $\varrho > n/2m$ in den Sätzen 3 und 5 nicht abschwächen kann.

Beweis. Für $\tau < 2m$ folgt aus (32) mit $\alpha = 0$, daß A positiv-definit ist. (Im Falle $\alpha = 0$ ist die Einschränkung $Q = \Omega$ nicht nötig.) Für $\tau = 2m$ folgt dies aus (33) mit $p = 2$ und $\delta = 0$

$$(39) \qquad \int_\Omega |u|^2 \, dx \leqq c \int_\Omega r^{2m} \sum_{|\beta|=m} |D^\beta u|^2 \, dx\,.$$

Damit ist es sinnvoll, von der Friedrichsschen Erweiterung A_F zu sprechen.

(a) Zum Operator (37) mit $\tau = 2m$ gehört die energetische Metrik

$$\int_\Omega r^{2m} \sum_{|\beta|=m} |D^\beta u|^2 \, dx = \|u\|_H^2\,.$$

Ist H die Vervollständigung von $C_0^\infty(\Omega)$ in der Metrik $\|.\|_H$, so ist nach (39) die Einbettung von H in $L_2(\Omega)$ stetig. Wäre diese Einbettung sogar vollstetig, so würde nach einem Satz von Rellich, (man vergleiche z. B. [9], S. 335, Satz 11) die Friedrichssche Erweiterung des Operators

$$Au = (-1)^m \sum_{|\beta|=m} D^\beta(r^{2m} D^\beta u)\,, \quad D(A) = C_0^\infty(\Omega)\,,$$

ein reines Punktspektrum besitzen. (a) ist somit bewiesen, wenn man eine Folge $\{u_j, j = 1, 2, \ldots\}$, $u_j(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ angeben kann, die in der Metrik $\|.\|_H$ gleichmäßig beschränkt, in der Metrik $\|.\|_{L_2}$ aber nicht kompakt ist. O. B. d. A. sei $x_0 = 0$. $u(x) \in C_0^\infty(R_n)$ sei eine beliebige Funktion, $u(x) \not\equiv 0$, $0 \notin \operatorname{supp} u(x)$, (mit $\operatorname{supp} u(x)$

wird der Träger der Funktion $u(x)$ bezeichnet, d. h. der Abschluß der Punktmenge für die $u(x) \neq 0$ ist). Durch geeignete Wahl der Folge $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_k > \ldots \to 0$ kann man erreichen, daß die Funktionen

$$u_k(x) = \frac{1}{\varepsilon_k^{n/2}}\, u\left(\frac{x}{\varepsilon_k}\right)$$

zu $C_0^\infty(\Omega)$ gehören und daß $\operatorname{supp} u_k \cap \operatorname{supp} u_j = \emptyset$ für $k \neq j$ ist. Einfache Rechnungen zeigen, daß

$$\int_\Omega |u_k|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{R_n} |u|^2 \,\mathrm{d}x = c_0$$

und

$$\int_\Omega r^{2m} \sum_{|\beta|=m} |D^\beta u_k|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{R_n} r^{2m} \sum_{|\beta|=m} |D^\beta u|^2 \,\mathrm{d}x = c_1$$

ist. Daraus folgt, daß die Folge $\{u_k\}$ das Gewünschte leistet.

(b) Daß A_F im Fall $\Omega = q$ (q ein beliebiges quaderförmiges Gebiet), für $\tau < 2m$ ein reines Punktspektrum besitzt, folgt aus Satz 6. Sind μ_i die Eigenwerte von $(-\Delta)^\alpha$, so zeigt Formel (32) ferner, daß

$$\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{\nu_i^\gamma} < c \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{\mu_i^\gamma} < \infty$$

ist, sofern $\alpha\gamma > n/2$ ist, (man vergleiche den entsprechenden Schluß beim Beweis des Satzes 3). Dabei muß $2\alpha < 2m - \tau$ sein. Daraus folgt (b) für quaderförmige Gebiete. Für beliebige Gebiete folgt jetzt (b) aus dem Variationsprinzip von Courant.

III. EXISTENZ UND DIFFERENZIERBARKEITSEIGENSCHAFTEN GREENSCHER FUNKTIONEN ENTARTETER ELLIPTISCHER OPERATOREN

8. Operatoren, die nur Ableitungen der höchsten Ordnung enthalten. Die nachfolgenden Betrachtungen setzen die Überlegungen des Abschnittes 5 fort. Die dort verwendeten Bezeichnungen werden übernommen, insbesondere ist also A der zu Beginn des Abschnittes 5 beschriebene positiv-definite entartete elliptische Differentialoperator der Ordnung $2m$, den man sich formal in der Form (9) geschrieben denken kann. Von Interesse ist, unter welchen Bedingungen man A^{-1} in der Form

$$(A^{-1}f)(x) = \int_\Omega G(x, y) f(y) \,\mathrm{d}y$$

darstellen kann.

Satz 8. *A sei der positiv-definite, entartet-elliptische Operator der Ordnung* $2m$ *aus Abschnitt 5 (Satz 3),* $a(x)$ *seine Elliptizitätsfunktion.* $a^{-1}(x) \in L_\varrho(\Omega)$, $\varrho \geqq 1$. Ω *sei ein beschränktes, sonst aber beliebiges Gebiet im* R_n.

(a) *Ist* $m > n/4$ *und* $\varrho > n/(2m - \frac{1}{2}n)$, *so ist* A^{-1} *ein Hilbert-Schmidt-Operator und*

$$(40)\quad (A^{-1}f)(x) = \int_\Omega G(x, y) f(y)\, \mathrm{d}y\,, \quad f(y) \in L_2(\Omega)\,, \quad G(x, y) \in L_2(\Omega \times \Omega)\,.$$

(b) *Ist* $m > n/2$ *und* $\varrho > n/(2m - n)$, *so ist* A^{-1} *ein Operator der Spurklasse und in der Darstellung (40) ist*

$$(41)\qquad G(x, y) \in \overset{\circ}{W}{}^m_{2\varrho/(1+\varrho)}(\Omega \times \Omega)\,.$$

Bemerkung. Ein Wert ϱ, der die in (b) gestellte Bedingung erfüllt, genügt natürlich auch der in (a) angegebenen Forderung. Ist A streng elliptisch, dem entspricht $\varrho = \infty$, was bei den Betrachtungen zugelassen ist, so stimmt Satz 8 im wesentlichen mit Satz 2 aus [12] überein.

Beweis. Da $\varrho > n/2m$ gilt, ist A positiv-definit und Formel (19) anwendbar.

(a) Aus $\varrho(2m - \frac{1}{2}n) > n$ folgt $2 > n\varrho/(2m\varrho - n)$. (19) zeigt, daß A^{-1} ein Hilbert-Schmidt-Operator ist. $\{u_i(x), i = 1, 2, \ldots\}$ sei ein vollständiges System orthonormierter Eigenfunktionen von A, $Au_i(x) = v_i\, u_i(x)$. Dann ist bekanntlich [8]

$$(42)\quad (A^{-1}f)(x) = \int_\Omega G(x, y) f(y)\, \mathrm{d}y \quad \text{mit} \quad G(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i(x)\, \overline{u_i(y)}}{v_i} \in L_2(\Omega \times \Omega)\,,$$

womit (a) bewiesen ist.

(b) Aus $\varrho(2m - n) > n$ folgt $1 > n\varrho/(2m\varrho - n)$. (19) zeigt, daß A^{-1} ein Operator der Spurklasse ist. Bezeichnet man vorübergehend den Abschluß von $C_0^\infty(\Omega)$ in der Metrik (7) mit $H_A(\Omega)$, dann folgt $u_i(x) \in H_A(\Omega)$. Formel (10) zeigt, daß auch

$$u_i(x) \in \overset{\circ}{W}{}^m_{2\varrho/(1+\varrho)}(\Omega)$$

gilt.

Das Gebiet $\Omega \times \Omega \subset R_{2n}$ beschreibe ich durch $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, $x \in \Omega$, $y \in \Omega$. Zur Abkürzung wird

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\,, \quad D_y^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y_1^{\alpha_1} \ldots \partial y_n^{\alpha_n}}$$

gesetzt. Für $u(x, y) \in C_0^\infty(\Omega \times \Omega)$ gilt nach (10) mit $r = 2\varrho/(1 + \varrho)$

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} |D_x^\alpha u(x, y)|^r\, \mathrm{d}x \leqq c \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} A_\alpha^\beta(x)\, D_x^\beta u(x, y)\, D_x^\alpha \overline{u(x, y)}\, \mathrm{d}x \right)^{r/2}.$$

Entsprechend für y. Durch Anwendung der Hölderschen Ungleichung und unter Berücksichtigung von $r < 2$ folgt daraus

$$\int_\Omega\int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} \left(|D_x^\alpha u(x, y)|^r + |D_y^\alpha u(x, y)|^r\right) dx\, dy \leqq \tag{43}$$

$$\leqq c\left(\int_\Omega\int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \left(A_\alpha^\beta(x)\, D_x^\beta u D_x^\alpha \bar{u} + A_\alpha^\beta(y)\, D_y^\beta\, u D_y^\alpha\, \bar{u}\right) dx\, dy\right)^{v/2}.$$

Nach Besov [1], S. 75, Lemma 7.2, ist die auf der linken Seite der letzten Ungleichung stehende Norm äquivalent zur Norm $\mathring{W}_r^m(\Omega \times \Omega)$. Bezeichnet man die Norm auf der rechten Seite von (43) vorübergehend $\|u\|^2_{H_A(\Omega\times\Omega)}$ und mit $H_A(\Omega \times \Omega)$ die Vervollständigung von $C_0^\infty(\Omega)$ in dieser Norm, so gilt für das in $L_2(\Omega \times \Omega)$ vollständige und orthonormierte Funktionensystem $\{u_i(x)\, u_j(y),\ i, j = 1, 2, \ldots\}$

$$u_i(x)\, u_i(y) \in H_A(\Omega \times \Omega)\,, \quad (u_i(x)\, u_i(y), u_j(x)\, u_j(y))_{H_A(\Omega\times\Omega)} = 2v_i\delta_{ij}\,.$$

(δ_{ij} ist das Kroneckersymbol). Zusammen mit (42) und $\sum_{i=1}^\infty (1/v_i) < \infty$ führt das zu

$$G(x, y) \in H_A(\Omega \times \Omega)\,.$$

$r = 2\varrho/(1 + \varrho)$, Formel (43) und das schon erwähnte Lemma von Besov zeigen schließlich die Richtigkeit der Behauptung (b). Damit ist der Satz bewiesen.

9. Allgemeine Operatoren. Die Resultate des letzten Abschnittes lassen sich auf Operatoren, die nicht nur Ableitungen der höchsten Ordnung enthalten, übertragen. Mit A_F wird der Operator aus Satz 5, Abschnitt 6, bezeichnet. Wie in der Bemerkung nach Satz 5 schon gesagt wurde, stimmen Satz 3 und Satz 5 im wesentlichen überein. Man erhält somit nach dem gleichen Verfahren wie im letzten Abschnitt den folgenden Satz.

Satz 9. *Ω sei ein beliebiges beschränktes Gebiet im R_n. Mit A_F werde die Friedrichssche Erweiterung des formal selbstadjungierten, entartet-elliptischen Operators A aus Satz 5 bezeichnet. $a(x)$ sei seine Elliptizitätsfunktion,*

$$a^{-1}(x) \in L_\varrho(\Omega)\,, \quad \varrho \geqq 1\,.$$

(a) *Ist $m > n/4$ und $\varrho > n/(2m - \frac{1}{2}n)$, so ist $(A_F + \xi E)^{-1}$ für hinreichend große ξ ein Hilbert-Schmidt-Operator und*

$$[(A_F + \xi E)^{-1} f]\,(x) = \int_\Omega G_\xi(x, y) f(y)\, dy\,, \quad f(y) \in L_2(\Omega)\,, \tag{44}$$

$$G_\xi(x, y) \in L_2(\Omega \times \Omega)\,.$$

(b) *Ist* $m > n/2$ *und* $\varrho > n/(2m-n)$, *so ist für hinreichend große* ξ $(A_F + \xi E)^{-1}$ *ein Operator der Spurklasse und in der Darstellung* (44)

$$G_\xi(x, y) \in \mathring{W}^m_{2\varrho/(1+\varrho)}(\Omega \times \Omega) .$$

Bemerkung. Im streng elliptischen Fall, dem entspricht $\varrho = \infty$, folgt also für $m > n/4$, daß $G_\xi(x, y) \in L_2(\Omega \times \Omega)$ und für $m > n/2$, daß $G_\xi(x, y) \in \mathring{W}^m_2(\Omega \times \Omega)$ ist.

Beweis. Analog zum Beweis von Satz 8. Man hat lediglich statt (42)

$$G_\xi(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i(x)\,\overline{u_i(y)}}{\nu_i + \xi}$$

zu setzen.

10. Operatoren mit speziellen Elliptizitätsfunktionen. Die Betrachtungen des Abschnittes 7 werden fortgesetzt. Es werden also die Friedrichsschen Erweiterungen der Operatoren (37) untersucht. Während Satz 9a weitgehend seine Gültigkeit behält, entstehen bei der Übertragung des Satzes 9b Schwierigkeiten. Der Grund dafür ist, daß (in der Bezeichnungsweise des Satzes 9 gesprochen) Werte ϱ mit $\varrho < 1$ auftreten können.

Satz 10. A_F *sei die Friedrichssche Erweiterung des Operators*

$$Au = (-1)^m \sum_{|\beta|=m} D^\beta(r^\tau D^\beta u) , \quad D(A) = C_0^\infty(\Omega) , \quad r = |x - x_0| , \quad x_0 \in \bar{\Omega} , \quad \tau < 2m .$$

$\Omega \subset R_n$ *sei ein beliebiges beschränktes Gebiet.*

(a) *Ist* $m > n/4$ *und* $\tau < 2(m - n/4)$, *so ist* A_F^{-1} *ein Hilbert-Schmidt-Operator und*

$$(A_F^{-1} f)(x) = \int_\Omega G(x, y) f(y)\, dy , \quad f(y) \in L_2(\Omega) , \tag{45}$$

$$G(x, y) \in L_2(\Omega \times \Omega) .$$

(b) *Ist* $m > n/2$ *und* $\tau < 2(m - n/2)$, *so gehört* A_F^{-1} *zur Spurklasse.*

(c) *Ist* $m > n/2$, $\tau < 2(m - n/2)$ *und* $\tau < 2(m - k + n/2)$ *für eine geeignete natürliche Zahl* k, $1 \leqq k \leqq m$, *so ist in der Darstellung* (45)

$$G(x, y) \in \mathring{W}^k_s(\Omega \times \Omega)$$

mit

$$1 \leqq s < \frac{2n}{n + \tau - 2(m-k)} , \quad \textit{falls} \quad n + \tau - 2(m-k) \geqq 0 \quad \textit{ist} \tag{46}$$

und

$$G(x, y) \in \mathring{W}_{\infty}^{k}(\Omega \times \Omega),$$

falls $n + \tau - 2(m - k) < 0$ *ist.*

Beweis. (a) Aus $2 > n/(2m - \tau)$ folgt nach (38), daß A_F^{-1} ein Hilbert-Schmidt-Operator ist.

(b) Aus $1 > n/(2m - \tau)$ folgt nach (38), daß A_F^{-1} ein Operator der Spurklasse ist.

(c) A_F^{-1} gehört nach (b) zur Spurklasse. Daraus folgt wie beim Beweis von Satz 8b, daß $G(x, y)$ zu $H_A(\Omega \times \Omega)$ gehört. In der Formel (34) darf man Q durch Ω ersetzen. Für $n + \tau \geqq 2(m - k)$ und einem s, das (46) genügt, gilt somit

$$\|u\|_{L_s(\Omega)}^2 \leqq c \int_\Omega r^\kappa \sum_{|\beta| = m-k} |D^\beta u|^2 \, dx, \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{47}$$

für $\kappa < 2(m - k) - n + 2n/s$.

Da

$$2(m - k) - n + \frac{2n}{s} > 2(m - k) - n + n + \tau - 2(m - k) = \tau$$

ist, gilt (47) insbesondere für $\kappa = \tau$. Daraus folgt

$$\|u\|_{\mathring{W}_s^k}^2 \leqq c \int_\Omega r^\tau \sum_{|\beta| = m} |D^\beta u|^2 \, dx.$$

Daraus folgt aber genau wie früher beim Beweis des Satzes 8b, (man vergleiche Formel (43)), für den Fall $n + \tau - 2(m - k) \geqq 0$ die Behauptung. Berücksichtigt man

$$\lim_{s \to \infty} \|u\|_{L_s(\Omega)} = \|u\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad u \in C_0^\infty(\Omega),$$

so folgt die Behauptung auch im Fall $n + \tau - 2(m - k) < 0$ aus (47) im Analogie zum Beweis des Satzes 8b. Damit ist der Satz bewiesen.

Literatur

[1] *Бесов, О. В.:* Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения. Труды математического института имени В. А. Стеклова, *60*, 42—81 (1961).

[2] *Browder, F. E.:* On the spectral theory of elliptic differential operators I, Math. Annalen *142*, 22—130 (1961).

[3a] *Dunford, N.* and *J. T. Schwartz:* Linear operators I. New York—London, Interscience publishers 1958.

[3b] *Dunford, N.* and *J. T. Schwartz:* Linear operators II. New York—London, Interscience publishers 1963.

[4] *Джабраилов, А. Д.:* К прямым и обратным теоремам вложения весовых пространств. ДАН СССР *164*, 24—27 (1965).

[5] *Gelfand, I. M.* und *G. E. Schilow:* Verallgemeinerte Funktionen II. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1962.

[6] *Глазман, И. М.:* Прамые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. Москва 1963.

[7] *Kufner, A.:* Einige Eigenschaften der Sobolevschen Räume mit Belegungsfunktionen. Czech. Math. J. *15* (*90*), 597—620 (1965).

[8] *Michlin, S. G.:* Vorlesungen über lineare Integralgleichungen. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1962.

[9] *Neumark, M. A.:* Lineare Differentialoperatoren. Berlin: Akademie — Verlag 1960.

[10] *Nirenberg, L.:* On elliptic partial differential equations. Ann. scuola norm. sup. Pisa, (3) *13*, 115—162 (1959).

[11] *Sobolew, S. L.:* Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik. Berlin: Akademie — Verlag 1964.

[12] *Triebel, H.:* Differenzierbarkeitseigenschaften Greenscher Funktionen elliptischer Differentialoperatoren. Math. Zeitschr. *90*, 325—338 (1965).

[13] *Triebel, H.:* Einige Einbettungssätze für Räume von Distributionen. Wiss. Zeitschr. Univ. Jena, math.-naturw. Reihe *14*, 5, (1965).

[14] *Успенский, С. В.:* О теоремах вложения для весовых квассов. Труды математического института имени В. А. Стеклова, *60*, 282—303 (1961).

Anschrift des Verfassers: 69 Jena, Helmholtzweg 1, DDR. (Sektion Mathematik).