Marko Švec

Sur un problème aux limites

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 19 (1969), No. 1, 17–26

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100872

Czechoslovak Mathematical Journal, 19 (94) 1969, Praha

SUR UN PROBLÈME AUX LIMITES

MARKO ŠVEC, Bratislava

(Reçu le 30 janvier 1967)

Nous allons utiliser quelques notions que nous avons introduites dans [1]. Nous répétons leurs définitions.

Soit A l'ensemble de toutes les fonctions ayant des dérivées d'ordre $n - 1$ $(n \geqq 1)$ continues sur l'intervalle $J = \langle x_0, \infty)$.

Nous dirons que la suite $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ de fonctions de A converge *quasi-uniformément* (*q-converge*) vers la fonction $f(x) \in A$, si pour tout $x \in J$ $\lim_{k\to\infty} f_k^{(j)}(x) = f^{(j)}(x)$, $j = 0, 1, \ldots, n - 1$. Nous écrirons $f_k(x) \overset{q}{\to} f(x)$.

Nous dirons que l'ensemble $M \subset A$ est *quasi-compact* (*q-compact*) dans A (dans M), si chaque sous-ensemble infini de M contient une suite qui q-converge dans A (dans M), c'est-à-dire q-converge vers une fonction de A (de M).

Nous dirons que l'ensemble $M \subset A$ est *quasi-fermé* (*q-fermé*) s'il contient la limite de toute suite de M qui est q-convergente.

Nous dirons que les fonctions d'un ensemble $M \subset A$ sont *uniformément bornées* sur J s'il existe un nombre K tel que pour toute fonction $f(x) \in M$ on ait: $|f^{(j)}(x)| \leqq K$, $j = 0, 1, \ldots, n - 1$, $x \in J$.

Nous dirons que les fonctions d'un ensemble $M \subset A$ sont *équicontinues* sur J, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\delta > 0$ dépendant seulement des ε que pour toute fonction $f(x) \in M$ et $j = 0, 1, \ldots, n - 1$, les relations suivantes sont valables:

$$|f^{(j)}(x) - f^{(j)}(x')| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad |x - x'| < \delta\,, \quad x, x' \in J\,.$$

Soit $0 \leqq k \leqq n - 1$ et soit $C_{n-1,k}$ l'espace de Banach de toutes les fonctions de A ayant les dérivées depuis l'ordre k jusqu' à l'ordre $n - 1$ inclusivement bornées sur J. La norme soit

$$\|f(x)\| = \max_{k\leqq i\leqq n-1} \{\sup_J |f^{(i)}(x)|\} + \sum_{i=0}^{k-1} |f^{(i)}(x_0)|\,.$$

On démontre aisément:

Lemme 1. *La convergence d'après cette norme implique la q-convergence.*

Lemme 2. *Les fonctions de l'ensemble $M \subset C_{n-1,k}$ soient uniformément bornées et équicontinues sur J. Alors M est q-compact dans $C_{n-1,k}$.*

La démonstration des lemmes 1 et 2 pour $k = n - 1$ voir [2].

Soit T un operateur appliquant $C_{n-1,k}$ dans $C_{n-1,k}$. Nous dirons que T est quasi-continu (q-continu) sur $C_{n-1,k}$ [sur $M \subset C_{n-1,k}$] si l'on a:

$$\{f_k(x) \xrightarrow{q} f(x), f_k(x), f(x) \in C_{n-1,k}\} \Rightarrow \|Tf_k(x) - Tf(x)\| \to 0\,, \quad k \to \infty$$

$$[\{f_k(x) \xrightarrow{q} f(x), f_k(x), f(x) \in M\} \Rightarrow \|Tf_k(x) - Tf(x)\| \to 0\,, \quad k \to \infty]\,.$$

Il ne fait aucune difficulté de démontrer

Lemme 3. *Si T est q-continu sur $C_{n-1,k}$ (sur $M \subset C_{n-1,k}$), alors il est continu sur $C_{n-1,k}$ (sur M).*

Lemme 4. *Soit $M \subset C_{n-1,k}$ un ensemble q-compact dans $C_{n-1,k}$ (dans M) et soit T q-continu sur $C_{n-1,k}$ (sur M). Alors TM est compact dans $C_{n-1,k}$ (dans M).*

Nous aurons besoin encore du lemme suivant qu'on démontre facilement:

Lemme 5. *Si $M \subset C_{n-1,k}$ est un ensemble convexe, alors la fermeture $\overline{M}$ est aussi un ensemble convexe.* (La fermeture au sens de la convergence d'après la norme.)

Maintenant nous allons résoudre un problème aux limites.

Théorème 1. *Soient $F(x, \boldsymbol{u})$, $B(x, \boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ des fonctions continues de $(x, \boldsymbol{u})$ sur le domaine*

$$\Omega : a < x < \infty\,, \quad -\infty < u_i < \infty\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n - 1$$

et soit $F(x, \boldsymbol{u})$ nondécroissante de chacune de ses variables u_i, $i = 0, 1, \ldots, n - 1$, et telle que

(1) $$|B(x, \boldsymbol{u})| \leqq F(x, \boldsymbol{u})\,, \quad (x, \boldsymbol{u}) \in \Omega\,.$$

Soit K un nombre positif, $x_0 > a$ et $0 \leqq k \leqq n - 1$ entier,

(2) $$\varphi(x) = K \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!} (x - x_0)^s\,.$$

Soit encore

(3) $$\int_{x_0}^{\infty} x^{n-k-1} F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(k)}(x), K, \ldots, K)\, \mathrm{d}x < \infty$$

pour tout $K > 0$ et

(4)
$$\lim_{K \to \infty} \frac{1}{K} \int_{K_0}^{\infty} (x - x_0 + 1)^{n-k-1} F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(k)}(x), K, \ldots, K)\, \mathrm{d}x = 0\,.$$

Soient enfin $c_0, c_1, \ldots, c_k$ des nombres réels arbitraires. Alors l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad y^{(n)} + B(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0$$

a au moins une solution $y(x)$ définie sur $J = \langle x_0, \infty)$ et satisfaisant aux conditions

$$\text{(5)} \qquad \begin{aligned} &y^{(j)}(x_0) = c_j\,, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1\,,\\ &\lim_{x\to\infty} y^{(k)}(x) = c_k\,,\\ &\lim_{x\to\infty} y^{(j)}(x) = 0\,, \quad j = k+1, \ldots, n-1\,. \end{aligned}$$

Démonstration. On peut facilement vérifier par un calcul simple que la solution de l'équation intégrale

$$\text{(6)} \qquad y(x) = \sum_{s=0}^{k} c_s \frac{(x-x_0)^s}{s!} - \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(x-x_0)^s}{s!} \int_{x_0}^{x} \frac{(x_0-t)^{n-s-1}}{(n-s-1)!} B(t, \mathbf{y}(t))\,\mathrm{d}t + \\ + \sum_{s=k}^{n-1} \frac{(x-x_0)^s}{s!} \int_{x}^{\infty} \frac{(x_0-t)^{n-s-1}}{(n-s-1)!} B(t, \mathbf{y}(t))\,\mathrm{d}t\ [1]$$

est aussi solution de l'équation (E) et satisfait aux conditions (5). Pour les dérivées de $y(x)$ nous obtenons les formules

(7a)

$$y^{(j)}(x) = \sum_{s=j}^{k} c_s \frac{(x-x_0)^{s-j}}{(s-j)!} - \sum_{s=j}^{k-1} \frac{(x-x_0)^{s-j}}{(s-j)!} \int_{x_0}^{x} \frac{(x_0-t)^{n-s-1}}{(n-s-1)!} B(t, \mathbf{y}(t))\,\mathrm{d}t + \\ + \sum_{s=k}^{n-1} \frac{(x-x_0)^{(s-j)}}{(s-j)!} \int_{x}^{\infty} \frac{(x_0-t)^{n-s-1}}{(n-s-1)!} B(t, \mathbf{y}(t))\,\mathrm{d}t\,, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1\,,$$

$$\text{(7b)} \qquad y^{(k)}(x) = c_k + \sum_{s=k}^{n-1} \frac{(x-x_0)^{s-j}}{(s-j)!} \int_{x}^{\infty} \frac{(x_0-t)^{n-s-1}}{(n-s-1)!} B(t, \mathbf{y}(t))\,\mathrm{d}t\,,$$

$$y^{(j)}(x) = \sum_{s=j}^{n-1} \frac{(x-x_0)^{s-j}}{(s-j)!} \int_{x}^{\infty} \frac{(x_0-t)^{n-s-1}}{(n-s-1)!} B(t, \mathbf{y}(t))\,\mathrm{d}t\,, \ j = k+1, \ldots, n-1\,.$$

On démontre facilement que

$$\int_{x}^{\infty} \frac{(x-t)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} B(t, \mathbf{y}(t))\,\mathrm{d}t = \sum_{s=j}^{n-1} \frac{(x-x_0)^{s-j}}{(s-j)!} \int_{x}^{\infty} \frac{(x_0-t)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} B(t, \mathbf{y}(t))\,\mathrm{d}t$$

---

[1] $\mathbf{y}(t) = (y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$.

pour $j \geqq k$. Il suffit d'utiliser la relation

$$\frac{(x-t)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} = \frac{[(x-x_0)+(x_0-t)]^{n-j-1}}{(n-j-1)!} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-j-1} \frac{(x-x_0)^i}{i!} \frac{(x_0-t)^{n-j-i-1}}{(n-j-i-1)!} = \sum_{s=j}^{n-1} \frac{(x-x_0)^{s-j}}{(s-j)!} \frac{(x_0-t)^{n-s-1}}{(n-s-1)!}.$$

Alors nous avons

(7c)
$$y^{(k)}(x) = c_k + \int_x^\infty \frac{(x-t)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} B(t, \mathbf{y}(t))\, \mathrm{d}t,$$

$$y^{(j)}(x) = \int_x^\infty \frac{(x-t)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} B(t, \mathbf{y}(t))\, \mathrm{d}t, \quad j = k+1, \ldots, n-1.$$

Nous allons prouver l'existence de la solution de l'équation (6). Nous la chercherons dans l'espace $C_{n-1,k}$.

Soit $K > 0$ et soit $G_K = \{f(x) \in C_{n-1,k} \mid \|f(x)\| \leqq K\}$. On déduit facilement que pour $f(x) \in G_K$ arbitraire on a

(8)
$$|f^{(j)}(x)| \leqq \varphi^{(j)}(x), \quad j = 0, 1, \ldots, k,$$

$$|f^{(j)}(x)| \leqq K, \qquad j = k+1, \ldots, n-1.$$

En respectant (1), la monotonie de $F(x, \boldsymbol{u})$ et (3), nous obtenons

(9)
$$|B(x, \mathbf{f}(x))| \leqq F(x, \mathbf{f}(x)) \leqq F(x, \boldsymbol{\varphi}(x), \mathbf{K}),$$

(10)
$$\left| \int_x^\infty \frac{(x_0-t)^{n-s-1}}{(n-s-1)!} B(t, \mathbf{f}(t))\, \mathrm{d}t \right| \leqq \int_x^\infty \frac{(t-x_0)^{n-s-1}}{(n-s-1)!} F(t, \boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{K})\, \mathrm{d}t,$$

$$s = k, k+1, \ldots, n-1,$$

où

$$F(t, \boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{K}) = F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(k)}(t), K, \ldots, K).$$

Ceci nous permet de définir l'opérateur T sur G_K par la formule: Si $f(x) \in G_K$, alors

(11)
$$Tf(x) = v(x) = \sum_{s=0}^{k} c_s \frac{(x-x_0)^s}{s!} - \sum_{s=j}^{k-1} \frac{(x-x_0)^s}{s!} \int_{x_0}^{x} \frac{(x_0-t)^{n-s-1}}{(n-s-1)!} B(t, \mathbf{f}(t))\, \mathrm{d}t +$$

$$+ \sum_{s=k}^{n-1} \frac{(x-x_0)^s}{s!} \int_x^\infty \frac{(x_0-t)^{n-s-1}}{(n-s-1)!} B(t, \mathbf{f}(t))\, \mathrm{d}t.$$

Pour les dérivées de $Tf(x) = v(x)$ nous avons (voir (7a) et (7c))

$$(12) \qquad v^{(j)}(x) = (Tf(x))^{(j)} = \sum_{s=j}^{k} c_s \frac{(x - x_0)^{s-j}}{(s - j)!} -$$

$$- \sum_{s=j}^{k-1} \frac{(x - x_0)^{s-j}}{(s - j)!} \int_{x_0}^{x} \frac{(x_0 - t)^{n-s-1}}{(n - s - 1)!} B(t, \mathbf{f}(t))\, dt +$$

$$+ \sum_{s=k}^{n-1} \frac{(x - x_0)^{s-j}}{(s - j)!} \int_{x}^{\infty} \frac{(x_0 - t)^{n-s-1}}{(n - s - 1)!} B(t, \mathbf{f}(t))\, dt\,, \quad j = 0, 1, \ldots, k - 1\,,$$

$$v^{(k)}(x) = c_k + \int_{x}^{\infty} \frac{(x - t)^{n-k-1}}{(n - k - 1)!} B(t, \mathbf{f}(t))\, dt\,.$$

$$v^{(j)}(x) = \int_{x}^{\infty} \frac{(x - t)^{n-j-1}}{(n - j - 1)!} B(t, \mathbf{f}(t))\, dt\,, \quad j = k + 1, \ldots, n - 1\,.$$

De cela nous obtenons

$$(13) \qquad v^{(j)}(x_0) = c_j\,, \quad j = 0, 1, \ldots, k - 1\,,$$

et en utilisant (9) et (10)

$$(13') \quad |v^{(k)}(x)| \leqq |c_k| + \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-k-1} F(t, \varphi(t), \mathbf{K})\, dt = |c_k| + A(K)\,,$$

$$|v^{(j)}(x)| \leqq \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-k-1} F(t, \varphi(t), \mathbf{K})\, dt = A(K)\,, \quad j = k + 1, \ldots, n - 1\,,$$

où

$$(14) \qquad A(K) = \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-k-1} F(t, \varphi(t), \mathbf{K})\, dt\,.$$

Il en résulte que $v(x) = Tf(x) \in C_{n-1,k}$ et

$$(15) \qquad \|v(x)\| = \|Tf(x)\| \leqq \sum_{s=0}^{k} |c_s| + A(K)\,.$$

Mais l'hypothèse (4) nous donne l'existence d'un nombre K_0 tel que

$$(16) \qquad \|Tf(x)\| = \|v(x)\| = \sum_{s=0}^{k} |c_s| + A(K_0) \leqq K_0$$

pour toute fonction $f(x) \in G_{K_0}$. Alors l'opérateur T applique G_{K_0} dans elle-même, $TG_{K_0} \subset G_{K_0}$.

L'opérateur T est q-continu sur G_{K_0}. En effet, soit $f_m(x) \xrightarrow{q} f(x)$, $f_m(x), f(x) \in G_{K_0}$.

Alors, en utilisant le théorème de Lebesgue nous obtenons que

$$\|Tf_m(x) - Tf(x)\| = \left| \sum_{s=0}^{k} \frac{(x - x_0)^s}{s!} \int_{x_0}^{x} \frac{(x_0 - t)^{n-s-1}}{(n - s - 1)!} [B(t, \mathbf{f}(t)) - B(t, \mathbf{f}_m(t))] \, dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=k}^{n-1} \frac{(x - x_0)^s}{s!} \int_{x}^{\infty} \frac{(x_0 - t)^{n-s-1}}{(n - s - 1)!} [B(t, \mathbf{f}_m(t)) - B(t, \mathbf{f}(t))] \, dt \right| =$$

$$= \max_{k \leqq s \leqq n-1} \left\{ \sup_J \left| \int_x^{\infty} \frac{(x - t)^{n-s-1}}{(x - s - 1)!} [B(t, \mathbf{f}_m(t)) - B(t, \mathbf{f}(t))] \, dt \right| \right\} \to 0$$

pour $m \to \infty$.

Notons $TG_{K_0} = H$. Soit $H^{(j)}$, $j = 0, 1, \ldots, n - 1$, l'ensemble des dérivées d'ordre j de toutes les fonctions de H.

Les fonctions de $H^{(j)}$, $j = k, k + 1, \ldots, n - 1$, sont uniformément bornées par K_0. En effet, cela résulte de (13') et (16).

Les fonctions de $H^{(j)}$, $j = k, k + 1, \ldots, n - 1$, sont aussi équicontinues sur J. En effet, pour $v(x) \in H$ on voit tout d'abord que $v^{(n-1)}(x) = \int_x^\infty B(t, \mathbf{f}(t)) \, dt$, où $f(x) \in G_{K_0}$ convenable, et $|v^{(n-1)}(x) - v^{(n-1)}(x')| = |\int_x^{x'} B(t, \mathbf{f}(t)) \, dt| \leqq |\int_x^{x'} F(t, \varphi(t), \mathbf{K}) \, dt|$. De cela et de (3) résulte que les fonctions de $H^{(n-1)}$ sont équicontinues sur J. L'équicontinuité des fonctions de $H^{(j)}$, $j = k, k + 1, \ldots, n - 2$, résulte du fait que les fonctions de $H^{(j)}$, $j = k, \ldots, n - 1$ sont uniformément bornées par K_0.

Soit $\hat{H}$ l'enveloppe convexe de H. Les fonctions de $(\hat{H})^{(j)}$, $j = k, k + 1, \ldots, n - 1$, sont uniformément bornées par K_0. En effet, si $u(x) \in \hat{H}$, alors il existe un nombre entier r et les nombres $c_i \geqq 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$ tels que $\sum_{i=1}^{r} c_i = 1$, $u(x) = \sum_{i=1}^{r} c_i v_i(x)$, où $v_i(x) \in H$ convenables. Alors $|u^{(j)}(x)| \leqq \sum_{i=1}^{r} c_i |v_i^{(j)}(x)| \leqq \sum_{i=1}^{r} c_i K_0 = K_0$, $j = k, k + 1, \ldots, n - 1$.

Les fonctions de $(\hat{H})^{(j)}$, $j = k, k + 1, \ldots, n - 1$, sont aussi équicontinues sur J, ce qui résulte de la représentation de $u(x) = \sum_{i=1}^{r} c_i v_i(x)$ et du fait que les fonctions de $H^{(j)}$, $j = k, k + 1, \ldots, n - 1$, sont équicontinues sur J.

Soit maintenant $\bar{\hat{H}} = M$ la fermeture de $\hat{H}$. Les fonctions de $M^{(j)}$, $j = k, k + 1, \ldots, n - 1$ sont uniformément bornées sur J.

Si $u(x) \in M$, $u(x) \in \hat{H}$, alors $|u^{(j)}(x)| \leqq K_0$ d'après ce que nous avons dit plus haut. Si $u(x) \in M$, $u(x) \bar{\in} \hat{H}$, alors il existe une suite $\{v_s(x)\}$, $v_s(x) \in H$ telle que $\|u(x) - v_s(x)\| \to 0$ pour $s \to \infty$, d'où nous obtenons que $|u^{(j)}(x) - v_s^{(j)}(x)| \leqq \sup_J |u^{(j)}(x) - v_s^{(j)}(x)| \leqq \|u(x) - v_s(x)\| \to 0$. Mais cependant $|u^{(j)}(x)| \leqq |u^{(j)}(x) - v_s^{(j)}(x)| + |v_s^{(j)}(x)| \leqq |u^{(j)}(x) - v_s^{(j)}(x)| + K_0$, d'où pour $s \to \infty$ nous avons $|u^{(j)}(x)| \leqq K_0$.

Les fonctions de $M^{(j)}$, $j = k, k + 1, \ldots, n - 1$, sont aussi équicontinues sur J. En effet, si $u(x) \in M$, $u(x) \in \hat{H}$, alors c'est évident. Si $u(x) \in M$, $u(x) \bar{\in} \hat{H}$, il existe une suite $\{v_s(x)\}$ dans $\hat{H}$ telle que $\|u(x) - v_s(x)\| \to 0$ pour $s \to \infty$ et $|u^{(j)}(x) - v_s^{(j)}(x)| \leqq \|u(x) - v_s(x)\| \to 0$. Mais les fonctions de $(\hat{H})^{(j)}$ étant équicontinues sur J il existe pour $\varepsilon > 0$ un nombre $\delta > 0$ tel que $|v^{(j)}(x) - v^{(j)}(x')| < \varepsilon/2$ pour $|x - x'| < \delta$ et pour toute fonction $v(x) \in \hat{H}$. Ensuite nous obtenons que $|u^{(j)}(x) - u^{(j)}(x')| \leqq |u^{(j)}(x) - v_s^{(j)}(x)| + |v_s^{(j)}(x) - v_s^{(j)}(x')| + |v_s^{(j)}(x') - u^{(j)}(x')| \leqq |u^{(j)}(x) - v_s^{(j)}(x)| + \varepsilon/2 + |v_s^{(j)}(x') - u^{(j)}(x')|$ pour $|x - x'| < \delta$, d'où pour $s \to \infty$ nous avons $|u^{(j)}(x) - u^{(j)}(x')| \leqq \varepsilon/2 < \varepsilon$ pour $|x - x'| < \delta$. Cela qui prouve l'équicontinuité des fonctions de $M^{(j)}$, $j = k, k + 1, \ldots, n - 1$.

L'ensemble M est q-compact. En effet, soit $M_1 \subset M$ un sousensemble infini. Les fonctions de $M_1^{(j)}$, $j = k, k + 1, \ldots, n - 1$ sont uniformément bornées par K_0 et équicontinues sur J. C'est pourquoi on peut extraire une suite $\{u_s(x)\}$ de M_1 telle que la suite $\{u_s^{(k)}(x)\}$ converge vers une fonction $g(x)$. Comme cette convergence est uniforme sur chaque intervalle fermé $\langle x_0, b\rangle$, $g(x)$ est continue sur J. Elle est aussi bornée par K_0 c'est qui est évident. Mais comme les suites $\{u_s^{(j)}(x)\}$, $j = k + 1, \ldots, n - 1$, convergent aussi uniformément sur chaque intervalle fermé $\langle x_0, b\rangle$, elles convergent vers $g^{(j-k)}(x)$ sur J et $|g^{(j-k)}(x)| \leqq K_0$ pour $x \in J$. D'autre part on prouve facilement que $u^{(j)}(x_0) = c_j$, $j = 0, 1, \ldots, k - 1$ pour toute fonction $u(x) \in M$. Alors il est aisé de prouver que la suite $\{u_s^{(j)}(x)\}$, $j = k - 1, k - 2, \ldots, 1, 0$, converge vers la fonction

$$\sum_{m=j}^{k-1} c_m \frac{(x - x_0)^{m-j}}{(m - j)!} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x - t)^{k-j-1}}{(k - j - 1)!} g(t)\, dt\,, \quad x \in J$$

et que cette convergence est uniforme sur chaque intervalle fermé $\langle x_0, b\rangle$, ce qui achève la démonstration de la q-compacité de M. M étant l'enveloppe convexe et fermée de TG_{K_0} et $TG_{K_0} \subset G_{K_0}$, alors $M \subset G_{K_0}$, de quoi il résulte que $TM \subset TG_{K_0} = H \subset \bar{\hat{H}} = M$. M étant q-compact et T q-continu, d'après le lemme 4 TM est compact. L'application du théorème de Schauder donne l'existence d'au moins un point fixe dans M et alors dans G_{K_0}, c'est qui achève la démonstration du théorème.

Les deux théorèmes suivants donnent des résultats similaires sous des conditions un peu différentes.

Théorème 2. *Soit $B(x, \mathbf{u})$ une fonction continue sur Ω. Soit $F(x)$ une fonction continue sur (a, ∞) et telle que*

$$(17) \qquad |B(x, \mathbf{u})| \leqq F(x) \quad \textit{pour tout point} \quad (x, \mathbf{u}) \in \Omega\,.$$

Soit encore $0 \leqq k \leqq n - 1$ et

$$(18) \qquad \int^{\infty} x^{n-k-1} F(x)\, dx < \infty$$

et soient $c_0, c_1, \ldots, c_k$ des nombres réels arbitraires. Alors l'équation (E) *a au moins une solution $y(x)$ définie sur J et satisfaisant aux conditions* (5).

La **démonstration** est presque la même que celle du théorème 1. On définit sur $C_{n-1,k}$ l'opérateur T par la formule (11). Pour $f(x) \in C_{n-1,k}$ arbitraire on a

$$Tf(x) = v(x) = \max_{k \leqq j \leqq n-1} \{\sup_J |v^{(j)}(x)|\} + \sum_{j=0}^{k-1} |v^{(j)}(x_0)|.$$

Mais de (12) en respectant (17) et (18) on a pour $x \in J$

$$|v^{(k)}(x)| \leqq |c_k| + \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-k-1} F(t)\, dt = |c_k| + A\,,$$

$$|v^{(j)}(x)| \leqq \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-k-1} F(t)\, dt = A\,, \quad j = k+1, \ldots, n-1$$

et

$$v^{(j)}(x_0) = c_j\,, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1\,.$$

Alors

$$\|Tf(x)\| = \|v(x)\| \leqq \sum_{j=0}^{k} |c_j| + A\,.$$

Cela signifie que $TC_{n-1,k} \subset G_A = \{f(x) \in C_{n-1,k} \mid \|f(x)\| \leqq A\}$ et aussi $TG_A \subset G_A$. Comme dans le cas précédent on démontre que T est q-continu sur G_A et que TG_A est q-compact. Une application du théorème de Schauder donne l'existence de la solution $y(x)$ en question.

Théorème 3. *Soit $B(x, \mathbf{u})$ une fonction continue sur Ω et soit*

$$(19) \qquad |B(x, \mathbf{u})| \leqq a(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}(x)\, |u_i| = F(x, \mathbf{u})\,, \quad (x, \mathbf{u}) \in \Omega\,,$$

où $a(x) \geqq 0$, $a_{n-i}(x) \geqq 0$ sur (a, ∞), et soient

(20)

$$\int_{x_0}^{\infty} x^{n-k-1}\, a(x)\, dx < \infty\,, \quad \int_{x_0}^{\infty} x^{n-k-1}\, a_{n-i}(x)\, dx < \infty\,, \quad i = k+1, \ldots, n-1\,,$$

$$\int_{x_0}^{\infty} x^{n-i-1}\, a_{n-i}(x)\, dx < \infty\,, \quad i = 0, 1, \ldots, k\,.$$

Alors pour x_0 assez grand l'équation (E) *a au moins une solution $y(x)$ définie sur J et satisfaisant aux conditions* (5).

La **démonstration** de ce théorème ne diffère pas de celle du théorème 1. Nous définissons l'opérateur T sur la boule $G_K = \{f(x) \in C_{n-1,k} \mid \|f(x)\| \leqq K\}$ par la formule (11). Pour les dérivées de $Tf(x) = v(x)$ sont valables les formules (12), d'où nous obtenons les relations (13)

(21) $$v^{(j)}(x_0) = c_j\,, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1\,,$$

et

(22) $$|v^{(k)}(x)| \leqq |c_k| + \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-k-1} \left[a(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}(t)\, |f^{(i)}(t)|\right] \mathrm{d}t\,,$$

$$|v^{(j)}(x)| \leqq \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-k-1} \left[a(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}(t)\, |f^{(i)}(t)|\right] \mathrm{d}t\,,$$

$$j = k+1, \ldots, n-1\,.$$

Mais pour $f(x) \in G_K$ sont valables les inégalités (8), c'est-à-dire

$$|f^{(i)}(t)| \leqq K \sum_{s=i}^{k} \frac{(t - x_0)^{s-i}}{(s-i)!}\,, \quad i = 0, 1, \ldots, k\,,$$

$$|f^{(i)}(t)| \leqq K\,, \quad i = k+1, \ldots, n-1\,.$$

En se servant de ces inégalités et de (19), (20) nous obtenons de (22) que

$$|v^{(k)}(x)| \leqq |c_k| + \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-k-1}\, a(t)\, \mathrm{d}t +$$
$$+ K \sum_{i=0}^{k} \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-k-1}\, a_{n-i}(t) \sum_{s=i}^{k} \frac{(t - x_0 + 1)^{s-i}}{(s-i)!}\, \mathrm{d}t +$$
$$+ K \sum_{i=k+1}^{n-1} \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-k-1}\, a_{n-i}(t)\, \mathrm{d}t \leqq$$
$$\leqq |c_k| + \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-k-1}\, a(t)\, \mathrm{d}t +$$
$$+ K \left\{ \sum_{i=0}^{k} \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-i-1} (k+1)\, a_{n-i}(t)\, \mathrm{d}t + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=k+1}^{n-1} \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-k-1}\, a_{n-i}(t)\, \mathrm{d}t \right\}$$

et

$$|v^{(j)}(x)| \leqq \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-k-1}\, a(t)\, \mathrm{d}t +$$
$$+ K \left\{ \sum_{i=0}^{k} \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-i-1} (k+1)\, a_{n-i}(t)\, \mathrm{d}t + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=k+1}^{n-1} \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-k-1}\, a_{n-i}(t)\, \mathrm{d}t \right\},$$

$$j = k+1, \ldots, n-1\,.$$

Pour la norme de $Tf(x) = v(x), f(x) \in G_K$ nous en avons

$$\|Tf(x)\| = \|v(x)\| = \max_{k \leqq j \leqq n-1} \{\sup_J |v^{(j)}(x)|\} + \sum_{j=0}^{k-1} |v^{(j)}(x_0)| \leqq$$

$$= \sum_{j=0}^{k} |c_j| + K \left\{ (k+1) \sum_{i=0}^{k} \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-i-1} a_{n-1}(t) \, dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=k+1}^{n-1} \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-k-1} a_{n-i}(t) \, dt \right\}.$$

Si x_0 est tel que

$$(k+1) \sum_{i=0}^{k} \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-i-1} a_{n-i}(t) \, dt + \sum_{i=k+1}^{n-1} \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-k-1} a_{n-i}(t) \, dt \leqq 1,$$

alors il existe un nombre K_0 tel que

$$\|Tf(x)\| = \|v(x)\| \leqq K_0 \quad \text{pour toute} \quad f(x) \in G_{K_0}.$$

Le reste de la démonstration est le même que dans les cas précédents.

Des théorèmes 1–3 résulte l'affirmation suivante

Théorème 4. *Sous les conditions citées dans le théorème* 1, *ou* 2, *ou* 3, *pour un nombre entier arbitraire k tel que $0 \leqq k \leqq n - 1$ et un nombre réel arbitraire c_k il existe k solutions linéairement indépendantes de l'équation* (E) *pour lesquelles*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{x^k} = c_k. \tag{23}$$

En effet, cela résulte immédiatement de l'application du théoreme de l'Hospital en respectant (6) et (7c). Comme nous pouvons choisir les nombres $c_0, \ldots, c_{k-1}$ arbitrairement, il est évident que nous obtenons au moins k solutions de (E) ayant la propriété (23).

Le théorème 4 est une généralisation des résultats obtenus par M. P. WALTMAN [3] pour l'équation $y^{(n)} + f(x, y) = 0$ sous les conditions: $|f(x, y)| \leqq a(x) y^\alpha$, $\alpha > 0$, $\int^\infty x^{\alpha(n-1)} a(x) \, dx < \infty$.

Bibliographie

[1] *Švec M.:* Fixpunktsatz und monotone Lösungen der Differentialgleichung $y^{(n)} + B(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) y = 0$. Archivum mathematicum (Brno), T. *2* (1966), 43–55.

[2] *Švec M.:* L'existence globale et les propriétés asymptotiques des solutions d'une équation différentielle non-linéaire d'ordre *n*. Archivum mathematicum (Brno), T. *2* (1967), 141–151.

[3] *Waltman P.:* On asymptotic behavior of solutions of an *n*-th order equation. Monatsh. Math., Öster. (1965) *69*, nr. 5, 427–430.

Adresse de l'auteur: Bratislava, Gottwaldovo nám. 2, ČSSR (Slovenská vysoká škola technická).