Zbyněk Nádeník
Über Geometrie im Grossen der Enveloppen von konvexen Zylinderflächen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 19 (1969), No. 2, 299–317

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100897

Czechoslovak Mathematical Journal, 19 (94) 1969, Praha

ÜBER GEOMETRIE IM GROSSEN DER ENVELOPPEN VON KONVEXEN ZYLINDERFLÄCHEN

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Eingelangt am 22. Januar 1968)

A) Im n-dimensionalen euklidischen Raum E_n $(n \geqq 3)$ sei eine geschlossene reguläre analytische Kurve

$$C = \{\mathbf{x}(\alpha) : \alpha \in \langle 0, a)\} \tag{1}$$

mit dem Bogen s und mit durchweg positiver erster Krümmung $k_1(\alpha) = 1/\varrho(\alpha)$ gegeben; dabei soll α bzw. a die Bogen- bzw. Gesamtlänge des sphärischen Bildes der Einheitsvektoren $\mathbf{t}(\alpha)$ der Tangenten von C bedeuten.

Für jedes $\alpha \in \langle 0, a)$ wählen wir in der $(n-1)$-dimensionalen Normalebene $\nu(\alpha)$ von C in $\mathbf{x}(\alpha)$ eine $(n-2)$-dimensionale Eifläche[1] $\mathscr{F}(\alpha)$ mit dem in $\nu(\alpha)$ enthaltenen Einheitsvektor $\mathbf{N}(\alpha, u)$ der äusseren Flächennormale und mit der auf der $(n-2)$-dimensionalen Einheitskugelfläche $\omega(\alpha)$ um $\mathbf{x}(\alpha)$ definierten Stützfunktion $H(\alpha, u)$; da und im folgenden durchläuft u alle Punkte von $\omega(\alpha)$ oder – was dasselbe bedeutet – alle Punkte des in E_n durchgeführten sphärischen Bildes $\Omega(\alpha)$ von $\omega(\alpha)$ [2]. Die Funktion $H(\alpha, u)$ ist dann für alle α und u erklärt, und zwar entweder auf der bei genügend kleiner Einheit singularitätenfreien „Einheitsröhrenfläche um C", d. h. auf

$$\omega = U\{\omega(\alpha) : \alpha \in \langle 0, a)\} = \{\mathbf{x}(\alpha) + \mathbf{N}(\alpha, u) : \alpha \in \langle 0, a), u \in \omega(\alpha)\}\,, \tag{2}$$

oder auf der in $\Omega(\alpha)$ zergliederten, auf der $(n-1)$-dimensionalen Einheitskugelfläche um den Aufpunkt von E_n liegenden Mannigfaltigkeit

$$\Omega = U\{\Omega(\alpha) : \alpha \in \langle 0, a)\} = \{\mathbf{N}(\alpha, u) : \alpha \in \langle 0, a), u \in \Omega(\alpha)\}\,. \tag{3}$$

Wir projizieren die Eifläche $\mathscr{F}(\alpha)$ in Richtung von $\mathbf{t}(\alpha)$ mittels einer Zylinderfläche

---

[1]) Für $n = 3$ eine Eikurve. Es ist nicht nötig, dieses immer zum Ausdruck zu bringen. Siehe übrigens [8].

[2]) Es wäre also zutreffender $u(\alpha)$ statt u zu schreiben. Da aber Missverständnisse ausgeschlossen sind, bevorzugen wir die kurze Bezeichnung.

$Z(\alpha)$ und nehmen an, dass die einparametrige Familie

$$\{Z(\alpha) : \alpha \in \langle 0, a)\} \tag{4}$$

eine singularitätenfreie geschlossene analytische Enveloppe S ohne Selbstdurchdringung besitzt. Da für jedes α die Vektoren $\mathbf{N}(\alpha, u)$ zugleich die Normalenvektoren von S längs der Charakteristik von $Z(\alpha)$ sind, so vermitteln sie im üblichen Sinn eine Abbildung zwischen S und ω oder Ω. Der Gegenstand der folgenden Untersuchungen ist die $(n - 1)$-dimensionale torusartige Enveloppe S (betreffs näherer Einschränkung siehe Abschn. 1).

B) Die auf (2) oder (3) definierte Funktion $H(\alpha, u)$ möchten wir als die „Stützfunktion von S" bezeichnen. Sie hängt natürlich von (1) ab. Es sei

$$C^* = \{\mathbf{x}^*(\alpha) : \alpha \in \langle 0, a)\} \tag{1*}$$

eine andere Kurve mit denselben Eigenschaften wie (1), namentlich mit demselben Tangentenbild wie (1) und mit positiver erster Krümmung $k_1^*(\alpha) = 1/\varrho^*(\alpha)$. Folglich haben C und C^* den gemeinsamen Einheitsvektor $\mathbf{n}(\alpha)$ der ersten Normale und wir setzen

$$\cos\gamma = \mathbf{N}(\alpha, u) \,.\, \mathbf{n}(\alpha)\,. \tag{5}$$

Ist jetzt $H^*(\alpha, u)$ die Stützfunktion von S in bezug auf C^*, d. h. ist $H^*(\alpha, u)$ für jedes $\alpha \in \langle 0, a)$ die in der $(n - 1)$-dimensionalen Normalebene $\nu^*(\alpha)$ von C^* in $\mathbf{x}^*(\alpha)$ in bezug auf $\mathbf{x}^*(\alpha)$ aufgefasste Stützfunktion der $(n - 2)$-dimensionalen Eifläche $Z(\alpha) \cap \nu^*(\alpha)$ – ähnlich wie $H(\alpha, u)$ die Stützfunktion in $\nu(\alpha)$ von $\mathscr{F}(\alpha) = Z(\alpha) \cap \cap\, \nu(\alpha)$ in bezug auf $\mathbf{x}(\alpha)$ ist – so besteht die Gleichung

$$\Delta_2(H^* - H) + (n - 1)(H^* - H) = (\varrho^* - \varrho) : \cos\gamma\,, \tag{6}$$

in der Δ_2 den zweiten Beltramischen Differentialoperator in bezug auf (3) bedeutet (s. Abschn. 2). Aber auch umgekehrt: Erfüllt die Differenz $H^* - H$ die Differentialgleichung (6), so gibt es so eine Kurve C^*, dass $H^*(\alpha, u)$ die Stützfunktion von S in bezug auf C^* ist (s. Abschn. 2). Falls sich die Kurve C nach einem Grenzübergang, welcher ihr Tangentenbild unverändert lässt, in einen Punkt zusammenzieht, so dass $1 : k_1(\alpha)$ gegen Null strebt, und wenn die Kurve C^* demselben Prozess unterworfen wird, so erhält man aus (6) die Gleichung, welche mit der Bedingung für die Differenz zweier Stützfunktionen eines konvexen Körpers in bezug auf zwei verschiedene Punkte formal identisch ist.

C) Für das Volumen V des Körpers K mit der Berandung S gilt die Formel

$$V = \frac{1}{n}\int_C \mathscr{V}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{n}\int_S H\,\mathrm{d}S\,, \tag{7}$$

in der $\mathscr{V}(\alpha)$ das $(n - 1)$-dimensionale Volumen des Eikörpers $\mathscr{K}(\alpha) \subset \nu(\alpha)$ mit der Begrenzungsfläche $\mathscr{F}(\alpha)$ bedeutet (s. Abschn. 3). Wir möchten die Aufmerksamkeit des Lesers darauf lenken, dass die rechte Seite in (7) nur scheinbar von C abhängt (s. Abschn. 4).

Es sollen $\mathscr{W}_i(\alpha)$ die Quermassintegrale von $\mathscr{K}(\alpha)$ bezeichnen; $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Wir setzen für $i = 1, \ldots, n$ (vgl. die formal gleichen Beziehungen in der Theorie der konvexen Körper [1], S. 63)

$$(8) \qquad W_0 = V, \quad W_i = \frac{1}{n\binom{n-1}{n-i}} \int_S \left\{\frac{1}{R_1} \cdots \frac{1}{R_{i-1}}\right\} \mathrm{d}S,$$

sodass W_0 das Volumen von K und nW_1 die Oberfläche und $n\binom{n-1}{n-i} W_i$ die Krümmungsintegrale von $S = \partial K$ sind. $1/R_1, \ldots, 1/R_{n-1}$ bezeichnen die Hauptkrümmungen von S und das Symbol $\{R_1^{-1} \ldots R_{i-1}^{-1}\}$ hat die übliche Bedeutung[3]). Dann gelten die Formeln (s. Abschn. 8)

$$(9) \quad W_i = \frac{1}{n}\int_C \mathscr{W}_i \,\mathrm{d}s + \frac{1}{n\binom{n-1}{n-i-1}} \int_S H \left\{\frac{1}{R_1} \cdots \frac{1}{R_i}\right\} \mathrm{d}S, \quad (i = 1, \ldots, n-1);$$

$$W_n = 0;$$

für $i = 0$ liefert (9) freilich (7).

Wenn sich die Kurve C auf obenerwähnte Weise in einen Punkt zusammenzieht, so fallen in (7) und (9) die Kurvenintegrale weg und aus (8) und (9) folgt $(n - i)$. . $\int_S \{R_1^{-1} \ldots R_{i-1}^{-1}\} \,\mathrm{d}S = i \int_S H\{R_1^{-1} \ldots R_i^{-1}\} \,\mathrm{d}S$. Diese Relationen sind formal identisch mit den von H. Minkowski für $n = 3$ und allgemein von T. Kubota hergeleiteten wohlbekannten Formeln der Theorie der konvexen Körper (s. [1], S. 63 oder [2], S. 47) und zugleich sind sie ein Spezialfall der Gleichungen von C.-C. Hsiung [6] (für $n = 3$ von W. Scherer [12]), welche die Gültigkeit der Formeln von T. Kubota auf orientierbare geschlossene Hyperflächen erweitern.

D) Wir beziehen den Tangentialraum einer Hyperfläche $\mathfrak{H}$ zweiter Klasse mit laufendem Punkt $\boldsymbol{x}$ auf die Basis $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$, so dass $\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n-1} \omega^i \mathbf{e}_i$. Es sollen $\varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_{n-1}$ gewisse Pfaffsche Formen bedeuten und es sei $i_1 i_2 \ldots i_r$ eine Kombination von $1, 2, \ldots, n-1$; $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$. Im äusseren Produkt $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \ldots \wedge \omega^{n-1} \neq 0$ ersetzen wir die Formen $\omega^{i_1}, \omega^{i_2}, \ldots, \omega^{i_r}$ durch $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \ldots, \varphi_{i_r}$ und die Summe solcher Produkte, welche allen Kombinationen $i_1 i_2 \ldots i_r$ entsprechen, bezeichnen wir mit

$$(10) \qquad \{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_r \wedge \omega^{r+1} \wedge \ldots \wedge \omega^{n-1}\} \quad (r = 1, \ldots, n-1).$$

[3]) Für $v = 1, \ldots, m$ bedeutet $\{a_1 \ldots a_v\}$ die v-te elementarsymmetrische Funktion von $a_1, \ldots, a_m$ und für $v = 0$ setzt man $\{a_1 \ldots a_v\} = 1$.

Ist f eine auf $\mathfrak{H}$ erklärte Funktion zweiter Klasse und sind f_i ihre kovarianten Ableitungen zu ω^i, so definieren wir die Pfaffschen Formen φ_i folgendermassen: $\mathrm{d} \wedge \sum_{i=1}^{n-1} f_i \omega^i = \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i \wedge \omega^i$. Die Ausdrücke

$$(11) \qquad \{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_r \wedge \omega^{r+1} \wedge \ldots \wedge \omega^{n-1}\} : \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^{n-1}$$
$$(r = 1, \ldots, n-1)$$

hängen dann nur von $\mathbf{x}$ ab und stellen somit $n - 1$ Differentialoperatoren in bezug auf $\mathfrak{H}$ dar (s. Abschn. 5). Der erste von denen ist der wohlbekannte zweite Beltramische Differentialoperator.

Die Operatoren (11) bezeichnen wir mit Δ_{r+1}, falls $\mathfrak{H}$ mit (3) identisch ist.

Es seien $\mathscr{R}_1(\alpha), \ldots, \mathscr{R}_{n-2}(\alpha)$ die Hauptkrümmungsradien der als Hyperfläche in $v(\alpha)$ betrachteten Eifläche $\mathscr{F}(\alpha)$. In den nichtparabolischen Punkten von S (d. h. in den Punkten mit $R_1^{-1} \ldots R_{n-1}^{-1} \neq 0$), welche durch die Ungleichung $\cos \gamma \neq 0$ für den nach (5) bestimmten Winkel gekennzeichnet werden (s. Abschn. 1), gilt dann (s. Abschn. 6)

$$(12) \qquad \Delta_r(H) = \varrho\{\mathscr{R}_1 - H, \ldots, \mathscr{R}_{r-2} - H\} : \cos \gamma + \{R_1 - H, \ldots, R_{r-1} - H\}$$
$$(r = 2, \ldots, n);$$

Speziell für $r = 2$ ist (vgl. (1,7) in [8])

$$(13) \qquad R_1 + \ldots + R_{n-1} = -\varrho : \cos \gamma + \Delta_2(H) + (n-1) H,$$

was eine Verallgemeinerung der wohlbekannten Formel von Weingarten ist.

E) Unter Verwendung der Operatoren (12) kann man die Formel (7) für den Rauminhalt V von K zu der Form (mit $\Delta_1(H) \equiv 1$; s. Abschn. 3 und 7)

$$(14) \qquad V = \int_C \mathscr{V} \, \mathrm{d}s + \frac{1}{n} \int_\Omega H \sum_{r=0}^{n-1} H^r \,.\, \Delta_{n-r}(H) \, \mathrm{d}\Omega,$$

bringen, wo Ω das sphärische Bild (3) von S ist.

Auch die Darstellungen (9) ermöglichen eine zu (14) ähnliche Umformung. Es gilt nämlich (s. Abschn. 8)

$$(15) \qquad W_i = \frac{n-i}{n} \int_C \mathscr{W}_i \, \mathrm{d}s + \frac{1}{n\binom{n}{i}} \int_\Omega \sum_{r=0}^{n-i} \binom{i+r}{i} H^r \,.\, \Delta_{n-i+1-r}(H) \, \mathrm{d}\Omega,$$
$$(i = 1, \ldots, n-1).$$

Benutzt man hier nach (8) direkt die Krümmungsintegrale und die Oberfläche O von S ebenso wie die Oberfläche $\mathscr{O}(\alpha)$ von $\mathscr{F}(\alpha)$, so erhält man[4])

[4]) Statt $\mathrm{d}\mathscr{F}(\alpha)$ schreiben wir für das Oberflächenelement von $\mathscr{F}(\alpha)$ nur kurz $\mathrm{d}\mathscr{F}$.

$$(16)\qquad O = \int_C \mathcal{O}\, \mathrm{d}s + \frac{1}{n} \int_\Omega \sum_{r=0}^{n-1} \binom{r+1}{1} H^r \,.\, \Delta_{n-r}(H)\, \mathrm{d}\Omega\,,$$

$$(17)\qquad \int_S \left\{\frac{1}{R_1} \cdots \frac{1}{R_{i-1}}\right\} \mathrm{d}S = \int_C \int_{\mathscr{F}(\alpha)} \left\{\frac{1}{\mathscr{R}_1} \cdots \frac{1}{\mathscr{R}_{i-1}}\right\} \mathrm{d}\mathscr{F}\, \mathrm{d}s +$$

$$+ \frac{i}{n} \int_\Omega \sum_{r=0}^{n-i} \binom{i+r}{i} H^r \,.\, \Delta_{n-i+1-r}(H)\, \mathrm{d}\Omega \quad (i = 2, \ldots, n-1)\,.$$

Im dreidimensionalen Raum bezeichnen wir mit $F(\alpha)$ den Flächeninhalt und mit $L(\alpha)$ den Umfang des durch die Eikruve $\mathscr{F}(\alpha)$ begrenzten Bereiches. Folglich $\mathscr{W}_0(\alpha) = F(\alpha)$, $2\mathscr{W}_1(\alpha) = L(\alpha)$, $\mathscr{W}_2(\alpha) = \pi$ und wenn wir noch $M = \frac{1}{2}\int_S (R_1^{-1} + R_2^{-1})\, \mathrm{d}S$ setzen, so erhalten wir aus (14) und aus (15) für $i = 1, 2,$ die Beziehungen

$$(18)\qquad V = \int_C F\, \mathrm{d}s + \frac{1}{3} \int_\Omega H\{H^2 + H \,.\, \Delta_2(H) + \Delta_3(H)\}\, \mathrm{d}\Omega\,,$$

$$O = \int_C L\, \mathrm{d}s + \frac{1}{3} \int_\Omega \{3H^2 + 2H \,.\, \Delta_2(H) + \Delta_3(H)\}\, \mathrm{d}\Omega\,,$$

$$M = \pi \int_C \mathrm{d}s + \frac{1}{3} \int_\Omega \{3H + \Delta_2(H)\}\, \mathrm{d}\Omega\,.$$

Im Abschn. 9 zeigen wir, dass (18) auch folgenderweise geschrieben werden kann

$$(19)\qquad V = \int_C F\, \mathrm{d}s + \int_\Omega \{\tfrac{1}{3}H^3 - \tfrac{1}{2}H \,.\, \Delta(H, H) + \tfrac{1}{4}\Delta(\Delta(H, H), H)\}\, \mathrm{d}\Omega\,,$$

$$O = \int_C L \mathrm{d}s + \int_\Omega \{H^2 - \tfrac{1}{2}\Delta(H, H)\}\, \mathrm{d}\Omega\,,$$

$$M = \pi \int_C \mathrm{d}s + \int_\Omega H\, \mathrm{d}\Omega\,;$$

hier bedeutet Δ den ersten Beltramischen Differentialoperator in bezug auf Ω. Die Formeln (19) für O und M sind mit (*) in [8] identisch.

Betreffs anderer Darstellungen für die Oberfläche und die Krümmungsintegrale siehe Abschn. 10.

F) Es ist natürlich zu fragen, ob es möglich ist, die Kurve C so zu wählen, dass die Flächenintegrale ganz rechts in (14), (16) und (17) verschwinden und dass folglich das Volumen, die Oberfläche und die Krümmungsintegrale von K nur als die längs einer einzigen Kurve C genommenen Kurvenintegrale von Volumen, Oberfläche und Krümmungsintegralen von $\mathscr{K}(\alpha)$ darstellbar sind.

Im allgemeinen ist das nicht der Fall, wie es schon von den elementaren Guldinschen Regeln zu sehen ist. Das einfache Beispiel für unsere Enveloppe ist zweifellos eine ringförmige Rotationsfläche S in E_3, deren Meridianschnitt die Randkurve $\mathscr{F}$ eines Eibereiches $\mathscr{K}$ ist. Falls sich nun die Schwerpunkte von $\mathscr{F}$ und $\mathscr{K}$ in verschiedenen Entfernungen von der Rotationsachse von S befinden, so ist es unmöglich, den Rauminhalt und die Oberfläche von S auf die obenerwähnte Weise auszudrücken.

Wenn aber für jedes $\alpha \in \langle 0, a)$ die Trägergerade des in $\mathbf{x}(\alpha)$ gebundenen Tangentenvektors $\mathbf{t}(\alpha)$ von C die Achse der Zylinderfläche $Z(\alpha)$ ist, so gelten die verlangten Integraldarstellungen (s. Abschn. 11):

$$V = \int_C \mathscr{V} \, \mathrm{d}s \,, \quad O = \int_C \mathscr{O} \, \mathrm{d}s \,, \tag{20}$$

$$\int_S \left\{\frac{1}{R_1} \cdots \frac{1}{R_{i-1}}\right\} \mathrm{d}S = \int_C \int_{\mathscr{F}(\alpha)} \left\{\frac{1}{\mathscr{R}_1} \cdots \frac{1}{\mathscr{R}_{i-1}}\right\} \mathrm{d}\mathscr{F} \, \mathrm{d}s \quad (i = 2, \ldots, n-1) \,.$$

Wie man diese Formeln verwerten kann, ist offensichtlich. Angenommen, es gelte für das Volumen von $\mathscr{K}(\alpha)$ und für die Oberfläche und die Krümmungsintegrale von $\mathscr{F}(\alpha) = \partial\mathscr{K}(\alpha)$ – und zwar für alle $\alpha \in \langle 0, a)$ – eine lineare Ungleichung mit konstanten Koeffizienten. Nach (20) erfüllen dieselbe Ungleichung auch das Volumen von K und die Oberfläche und die Krümmungsintegrale von $S = \partial K$.

Für den dreidimensionalen Raum ergibt sich aus (20) in der Bezeichnungsweise aus (18) oder (19), dass

$$V = \int_C F \, \mathrm{d}s \,, \quad O = \int_C L \, \mathrm{d}s \,, \quad M = \pi \int_C \mathrm{d}s \,. \tag{21}$$

Wenn alle (natürlich achsensymmetrische) Zylinderflächen $Z(\alpha)$ eine gemeinsame Breite haben (dies gilt z. B., falls C eben ist, da dann, wie leicht aus [8], S. 201 folgt, die parabolischen Punkte von S in zwei parallelen Ebenen liegen), genügen die Funktionale (21) der Ungleichung

$$O^2 - 4MV \geqq 0 \,, \tag{22}$$

in der das Gleichheitszeichen dann und nur dann besteht, wenn ale $Z(\alpha)$ Rotationszylinderflächen sind.

Die Ungleichung (22) wurde in [9] für solche kantige ringförmige Körper bewiesen, welche aus den Teilen der konvexen achsensymmetrischen Zylinder, deren Achsen ein geschlossenes Polygon von der Länge $l = M/\pi$ bilden, zusammengesetzt werden. Für diese Ungleichung ist in [11] eine Frobeniussche Verallgemeinerung und eine Verschärfung hergeleitet worden. Das Verfahren von [9] ist auch auf unsere glatten Enveloppen S anwendbar und es ist deshalb nötig, einen umständigen Beweis für (22) zu führen.

Wir möchten darauf Aufmerksamkeit lenken, dass nach [10], S. 298 für das Volumen, die Oberfläche und das Integral der mittleren Krümmung einer geschlossenen Kanalfläche vom Zusammenhang des Torus gerade die zu (22) umgekehrte Ungleichung gilt und dass die Gleichheit die Röhrenflächen kennzeichnet. Folglich haben die Ungleichung (22) für Enveloppen von konvexen achsensymmetrischen Zylinderflächen und die erwähnte Ungleichung für Kanalflächen dieselben Extremalkörper.

Es folgen die Beweise, auf welche wir bisher nur hinwiesen.

1. Im folgenden durchlaufen stets die oberen oder unteren lateinischen Indizes i, j, k die Werte $1, 2, \ldots, n-1$ und die griechischen Indizes λ, μ die Werte $2, \ldots, n-1$ und zwei gleiche Indizes – der eine oben, der andere unten – sollen nach Einsteinscher Konvention eine Summation bezeichnen.

Auf Grund der im Abschn. A) der Einleitung eingehend angeführten Konstruktion der Enveloppe S können wir jedem Punkt $\mathbf{y}(\alpha, u)$ von S ein rechtwinkliges n-Bein zuordnen, welches aus $\mathbf{t}(\alpha)$, $\mathbf{N}(\alpha, u)$ und aus weiteren Einheitsvektoren $\mathbf{t}_\lambda(\alpha)$ besteht. Für seine Infinitesimalbewegung gilt bekanntlich

$$(1,1) \qquad \mathrm{d}\mathbf{y} = \omega^1 \mathbf{t} + \omega^\lambda \mathbf{t}_\lambda ,$$

$$(1,2) \qquad \mathrm{d}\mathbf{t} = \omega_1^\mu \mathbf{t}_\mu + \omega_1^n \mathbf{N} ,$$

$$(1,3) \qquad \mathrm{d}\mathbf{t}_\lambda = \omega_\lambda \mathbf{t} + \omega_\lambda^\mu \mathbf{t}_\mu + \omega_\lambda^n \mathbf{N} ,$$

$$(1,4) \qquad \mathrm{d}\mathbf{N} = \omega_n^1 \mathbf{t} + \omega_n^\mu \mathbf{t}_\mu ,$$

wo alle ω gewisse Pfaffsche Formen sind, welche den Strukturgleichungen von E_n genügen. Die Matrix der ω aus (1,2)–(1,4) ist offenbar schiefsymmetrisch; man setze noch $\omega_1^1 = 0$.

Nachdem der Vektor $\mathbf{t}$ nur von α abhängt, ist nach (1,2)

$$(1,5) \qquad \omega_1^\mu \wedge \mathrm{d}\alpha = 0$$

und in Hinsicht auf (5) und $\mathrm{d}\mathbf{t} = \mathbf{n}\, \mathrm{d}\alpha$ noch

$$(1,6) \qquad \omega_1^n = \cos \gamma \,.\, \mathrm{d}\alpha .$$

Infolge der linearen Unabhängigkeit der Formen aus (1,1) ist

$$(1,7) \qquad \omega^1 = f\, \mathrm{d}\alpha + f_\lambda \omega^\lambda .$$

Wir setzen voraus, dass der Skalarkoeffizient f auf der ganzen Enveloppe S von Null verschieden ist:

$$(1,8) \qquad f \neq 0 .$$

Nach (1,1) und (1,7) ist $\mathrm{d}\mathbf{y} = f\mathbf{t}\, \mathrm{d}\alpha$ für $\omega^\lambda = 0$, woraus sofort die geometrische Bedeutung des Vorzeichens von f folgt.

Die Formen aus (1,1) und (1,4), in welche wir $\mathrm{d}\alpha = 0$ einsetzen, bezeichnen wir mit einem Streifen. Dem laufenden Punkt $\mathbf{z}(\alpha, u)$ von $\mathscr{F}(\alpha) = Z(\alpha) \cap \nu(\alpha)$ können wir in $\nu(\alpha)$ das $(n-1)$-Bein $\mathbf{t}_2 \ldots \mathbf{t}_{n-1} \mathbf{N}$ zuordnen. Dann gilt nach (1,1) und (1,4) – immer für fest gewähltes α — $\mathrm{d}\mathbf{z} = \overline{\omega}^{\lambda}\mathbf{t}_{\lambda}$, $\mathrm{d}\mathbf{N} = \overline{\omega}_n^{\mu}\mathbf{t}_{\mu}$ und weil $\mathscr{F}(\alpha)$ eine Eifläche ist, so können wir annehmen, dass für die üblichen Oberflächenelemente $\mathrm{d}\mathscr{F}(\alpha)$ und $\mathrm{d}\Omega(\alpha)$ der Fläche $\mathscr{F}(\alpha)$ und ihres sphärischen Bildes $\Omega(\alpha)$ und für das Produkt der Hauptkrümmungen von $\mathscr{F}(\alpha)$ gilt

$$(1,9) \qquad \mathrm{d}\mathscr{F}(\alpha) = \overline{\omega}^2 \wedge \ldots \wedge \overline{\omega}^{n-1}, \quad \mathrm{d}\Omega(\alpha) = \overline{\omega}_n^2 \wedge \ldots \wedge \overline{\omega}_n^{n-1},$$

$$(1,10) \qquad \frac{1}{\mathscr{R}_1(\alpha)} \cdots \frac{1}{\mathscr{R}_{n-2}(\alpha)} = \frac{\overline{\omega}_n^2 \wedge \ldots \wedge \overline{\omega}_n^{n-1}}{\overline{\omega}^2 \wedge \ldots \wedge \overline{\omega}^{n-1}} > 0\,.$$

Nach (1,1), (1,7), (1,8) und (1,10) ist das Flächenelement von S

$$(1,11) \qquad \mathrm{d}S = \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^{n-1} = f\,.\,\mathrm{d}\alpha \wedge \overline{\omega}^2 \wedge \ldots \wedge \overline{\omega}^{n-1}\,.$$

Das Flächenelement des sphärischen Bildes (3) von S ist nach (1,4) und (1,6)

$$(1,12) \qquad \mathrm{d}\Omega = \omega_n^1 \wedge \ldots \wedge \omega_n^{n-1} = -\cos\gamma\,.\,\mathrm{d}\alpha \wedge \overline{\omega}_n^2 \wedge \ldots \wedge \overline{\omega}_n^{n-1}\,.$$

Das Produkt der Hauptkrümmungen von S drückt sich deshalb nach (1,10)–(1,12) folgenderweise aus:

$$(1,13) \qquad \frac{1}{R_1} \cdots \frac{1}{R_{n-1}} = -\frac{\cos\gamma}{f}\,.\,\frac{1}{\mathscr{R}_1(\alpha)} \cdots \frac{1}{\mathscr{R}_{n-2}(\alpha)}\,.$$ [5])

Daraus ergibt sich, dass die parabolischen Punkte von S (d. h. die Punkte, in denen $R_1^{-1} \ldots R_{n-1}^{-1} = 0$) durch $\cos\gamma = 0$ gekennzeichnet sind.[6])

Nach dem Abschn. A) der Einleitung ist die Stützfunktion $H(\alpha, u)$ von S folgendermassen bestimmt:

$$(1,14) \qquad [\mathbf{y}(\alpha, u) - \mathbf{x}(\alpha)]\,.\,\mathbf{N}(\alpha, u) = H(\alpha, u)\,.$$

Deshalb setzt man

$$(1,15) \qquad \mathbf{y} = \mathbf{x} + H_1\mathbf{t} + \sum_{\lambda=2}^{n-1} H_{\lambda}\mathbf{t}_{\lambda} + H\mathbf{N}\,.$$

Offenbar ist $\mathrm{d}\mathbf{x} = \varrho\mathbf{t}\,\mathrm{d}\alpha$ und differenziert man weiter (1,15) nach (1,2) –(1,4) und vergleicht das Ergebnis mit (1,1), so erhält man

$$(1,16) \qquad \omega^1 = \varrho\,\mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}H_1 - H_i\omega_1^i - H\omega_1^n\,,$$

$$(1,17) \qquad \omega^{\lambda} = \mathrm{d}H_{\lambda} - H_i\omega_{\lambda}^i - H\omega_{\lambda}^n\,,$$

$$(1,18) \qquad \mathrm{d}H = H_i\omega_n^i\,.$$

---

[5]) Für $n = 3$ ist diese Formel schon in [8], (1,6) angegeben worden. In der Tat, das jetzt benutzte Dreibein hängt mit dem aus [8] einfach zusammen: $\mathbf{t} = \mathbf{t}$, $\mathbf{t}_2 = \mathbf{n}\sin\gamma - \mathbf{b}\cos\gamma$, $\mathbf{N} = \mathbf{n}\cos\gamma + \mathbf{b}\sin\gamma$; man kann noch $\gamma = u$ setzen. Die Formen ω^1, ω^2 sind dann leicht aus $\partial\mathbf{Q}/\partial\alpha$, $\partial\mathbf{Q}/\partial\gamma$ in [8], S. 203 mit $\mathbf{Q} = \mathbf{y}$ berechenbar und für die Skalarfunktion f aus (1,7) ergibt sich $f = A : (h + \partial^2 h/\partial\gamma^2) = A : \mathscr{R}_1(\alpha)$, wo A der in [8], (5) angeführte Ausdruck ist.

[6]) Vergleiche zum obigen die nachfolgende Fussnote[7]).

2. Benutzt man die in bezug auf die Kurve C^* aus (1^*) genommene Stützfunktion $H^*(\alpha, u)$ von S, so soll man $\boldsymbol{x}^*$ statt $\boldsymbol{x}$ in (1,15) schreiben und in (1,15)–(1,18) zu allen Buchstaben H ein Sternchen beifügen. Der Vergleich der so erhaltenen Gleichungen mit (1,16)–(1,18) liefert für die Differenzen

$$X(\alpha, u) = H^*(\alpha, u) - H(\alpha, u) \tag{2,1}$$

und $X_i = H_i^* - H_i$ unmittelbar das Gleichungssystem

$$\mathrm{d}X_1 - X_i\omega_1^i = (\varrho - \varrho^*)\,\mathrm{d}\alpha - X\omega_n^1\,, \tag{2,2}$$

$$\mathrm{d}X_\lambda - X_i\omega_\lambda^i = -X\omega_n^\lambda\,, \tag{2,3}$$

$$\mathrm{d}X = X_i\omega_n^i\,. \tag{2,4}$$

Nach (2,4) und (1,4) kann man den zweiten Beltramischen Differentialoperator $\Delta_2(X)$ in bezug auf (3) berechnen:

$$\Delta_2(X)\,.\,\omega_n^1 \wedge \ldots \wedge \omega_n^{n-1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \omega_n^1 \wedge \ldots \wedge \omega_n^{j-1} \wedge (\mathrm{d}X_j - X_i\omega_j^i) \wedge \omega_n^{j+1} \wedge \ldots \wedge \omega_n^{n-1}\,.$$

Infolge (2,2), (2,3) und (1,6) ergibt sich daraus – auch in Hinsicht auf (2,1) – sofort (6).

Aber auch umgekehrt, ist X eine Lösung von (6), so besteht das System (2,2)–(2,4) (man bestätigt zufolge (1,6) und (1,5), dass dieses System mit den Unbekannten $X, X_1, \ldots, X_{n-1}$ vollständig integrierbar ist). Der Ortsvektor $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x} - X_1\mathbf{t} - \sum_{\lambda=2}^{n-1} X_\lambda \mathbf{t}_\lambda - X\boldsymbol{N}$ beschreibt dann eine Kurve C^* und die Stützfunktion von S in bezug auf C^* ist $H^* = H + X$.

3. Mittels der Kurve (1) und der $(n-1)$-dimensionalen Fläche S definieren wir die n-dimensionale Punktmenge

$$M = \{\mathbf{x}(\alpha) + t[\mathbf{y}(\alpha, u) - \mathbf{x}(\alpha)] : \alpha \in \langle 0, a),\ u \in \Omega(\alpha),\ t \in \langle 0, 1\rangle\}\,. \tag{3,1}$$

Wir setzen

$$\mathrm{d}(\mathbf{x} + t[\mathbf{y} - \mathbf{x}]) = \tau^1\mathbf{t} + \tau^\lambda\mathbf{t}_\lambda + \tau^n\boldsymbol{N} \tag{3,2}$$

und das Volumen $V(K)$ des von S berandeten Körpers K erklären wir folgenderweise (vgl. [7], Teil II, Kap. I, § 5):

$$V(K) = \left|\int_M \tau^1 \wedge \ldots \wedge \tau^r\right|. \tag{3,3}$$

Aus (1,1)–(1,4), (1,15) und (3,2) folgt

$$(3{,}4)\qquad \tau^1 = (1-t)\,\varrho\,\mathrm{d}\alpha + H_1\,\mathrm{d}t + t\omega^1\,,$$
$$\tau^\lambda = H_\lambda\,\mathrm{d}t + t\omega^\lambda\,,\quad \tau^n = H\,\mathrm{d}t\,,$$

also nach (1,7) ist

$$(3{,}5)\qquad \tau^1 \wedge \ldots \wedge \tau^n = t^{n-2}[(1-t)\,\varrho + tf]\,H\,.\,\mathrm{d}\alpha \wedge \bar{\omega}^2 \wedge \ldots \wedge \bar{\omega}^{n-1} \wedge \mathrm{d}t\,.$$

Falls $f > 0$ ist und der Punkt $\boldsymbol{x}(\alpha)$ stets im Innern von $Z(\alpha)$ liegt, was $H(\alpha, u) > 0$ bedeutet, so ist nach (3,5) der Integrand des über $\langle 0, 1\rangle$, $\Omega(\alpha)$ und $\langle 0, a\rangle$ genommenen Integrales in (3,3) offensichtlich nichtnegativ (gleich 0 nur für $t = 0$) und folglich

$$(3{,}3')\qquad V(K) = \int_M \tau^1 \wedge \ldots \wedge \tau^n\,.$$

Nur diesen Fall werden wir im folgenden betrachten.

Gemäss (3,4) ist weiter

$$(3{,}6)\qquad \tau^1 \wedge \ldots \wedge \tau^n = (1-t)\,t^{n-2}H\varrho\,\mathrm{d}\alpha \wedge \bar{\omega}^2 \wedge \ldots \wedge \bar{\omega}^{n-1} \wedge \mathrm{d}t\, +$$
$$+\, t^{n-1}H\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^{n-1} \wedge \mathrm{d}t$$

oder

$$(3{,}7)\qquad \tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau^n = t^{n-2}H\varrho\,\mathrm{d}\alpha \wedge \bar{\omega}^2 \wedge \ldots \wedge \bar{\omega}^{n-1} \wedge \mathrm{d}t\, +$$
$$+\, t^{n-1}H(\omega^1 - \varrho\,\mathrm{d}\alpha) \wedge \omega^2 \wedge \ldots \wedge \omega^{n-1} \wedge \mathrm{d}t\,.$$

Beachtet man nun, dass nach (1,9) das $(n-1)$-dimensionale Volumen des Eikörpers $\mathscr{K}(\alpha)$ mit der Randfläche $\mathscr{F}(\alpha)$ gleich $(n-1)^{-1}\int_{\mathscr{F}(\alpha)} H\bar{\omega}^2 \wedge \ldots \wedge \bar{\omega}^{n-1}$ ist, so ergibt sich – nach elementarer Integrationen in bezug auf $t \in \langle 0, 1\rangle$ – aus (3,3′) mit (3,6) und hinsichtlich (1,11) sofort die Formel (7) und aus (3,3′) mit (3,7) noch

$$(3{,}8)\qquad V = \int_C \mathscr{V}\,\mathrm{d}s + (1/n)\int_S H(\omega^1 - \varrho\,\mathrm{d}\alpha) \wedge \omega^2 \wedge \ldots \wedge \omega^{n-1}\,.$$

An diese letzte Formel werden wir wieder im Abschn. 7 anknüpfen.[7])

[7]) Die Betrachtungen aus den Abschn. 1 und 3 möchten wir auf einem Beispiel in E_3 illustrieren. Die Kurve C aus (1) sei ein Kreis um den Aufpunkt O mit dem Radius v; die Richtung u in der Normalebene von C kann man mit dem Winkel γ identifizieren. Die Familie (4) definieren wir auf dreifache Weise: $Z(\alpha)$ sei jedesmal eine Rotationszylinderfläche mit festem Radius $r < v$, deren Achse entweder 1) die Tangente von C in $\boldsymbol{x}(\alpha)$ oder 2) der zu dieser Tangente parallele Durchmesser von C oder endlich 3) die Tangente von C in $\boldsymbol{x}(\alpha + \pi)$ ist. Die Enveloppe S ist fortschreitend ein Torus, eine Kugelfläche um O und ein Torus mit dem Mittenkreis C enbeso wie im ersten Fall. Die Stützfunktionen von S sind

$$(*)\qquad H = r \quad \text{bzw.} \quad r + v\cos\gamma \quad \text{bzw.} \quad r + 2v\cos\gamma\,.$$

4. Mittels der Kurve C^* aus (1^*) definieren wir – ählich wie im Abschn. 3 auf Grund der Kurve C – die Punktmenge

$$(4,1) \qquad M^* = \{\mathbf{x}^*(\alpha) + t[\mathbf{y}(\alpha, u) - \mathbf{x}^*(\alpha)] : \alpha \in \langle 0, a), u \in \Omega(\alpha), t \in \langle 0, 1\rangle\}$$

und setzen

$$(4,2) \qquad \mathrm{d}(\mathbf{x}^* + t[\mathbf{y} - \mathbf{x}^*]) = \overset{*}{\tau}{}^1\mathbf{t} + \overset{*}{\tau}{}^\lambda\mathbf{t}_\lambda + \overset{*}{\tau}{}^n\mathbf{N}\,.$$

Das Ziel dieses Abschn. ist der Beweis der Gleichung

$$(4,3) \qquad \int_M \tau^1 \wedge \ldots \wedge \tau^n = \int_{M^*} \overset{*}{\tau}{}^1 \wedge \ldots \wedge \overset{*}{\tau}{}^n\,.$$

Wir integrieren die Identität (3,6) über M und berechnen die elementaren Integrationen in bezug auf t. Dann versehen wir in (3,6) alle Formen τ und ebenso H und ϱ mit einem Sternchen und integrieren die so erhaltene Identität über M^*, indem wir wieder die Integrationen in bezug auf t durchführen. Die Ergebnisse zeigen, dass (4,3) zu

$$(4,4) \qquad (n - 1)\int_S (H^* - H)\,\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^{n-1} =$$
$$= \int_S (H\varrho - H^*\varrho^*)\,\mathrm{d}\alpha \wedge \bar{\omega}^2 \wedge \ldots \wedge \bar{\omega}^{n-1}$$

äquivalent ist.

Das begleitende Dreibein ist jedesmal

$$\mathbf{t} = \{\sin\alpha, -\cos\alpha, 0\}\,, \quad \mathbf{t}_2 = \{\sin\gamma\cos\alpha, \sin\gamma\sin\alpha, \cos\gamma\}\,,$$
$$\mathbf{N} = \{-\cos\gamma\cos\alpha, -\cos\gamma\sin\alpha, \sin\gamma\}$$

und die Parameterdarstellungen von S lauten folgends:

$$\mathbf{y} = \{(v - r\cos\gamma)\cos\alpha, (v - r\cos\gamma)\sin\alpha, r\sin\gamma\}$$

bzw.

$$\{-r\cos\gamma\cos\alpha, -r\cos\gamma\sin\alpha, r\sin\gamma\}$$

bzw.

$$\{-(v + r\cos\gamma)\cos\alpha, -(v + r\cos\gamma)\sin\alpha, r\sin\gamma\}\,.$$

Deshalb ist

$$(^{**}) \qquad \omega^1 = (v - r\cos\gamma)\,\mathrm{d}\alpha \quad \text{bzw.} \quad -r\cos\gamma\,\mathrm{d}\alpha \quad \text{bzw.} \quad -(v + r\cos\gamma)\,\mathrm{d}\alpha\,, \quad \omega^2 = r\,\mathrm{d}\gamma\,,$$

also ist $f > 0$ bzw. $\gtreqqless 0$ bzw. < 0 und $\mathrm{d}S = r(v - r\cos\gamma)\,\mathrm{d}\alpha \wedge \mathrm{d}\gamma$ bzw. $-r^2\cos\gamma\,\mathrm{d}\alpha \wedge \mathrm{d}\gamma$ bzw. $-r(v + r\cos\gamma)\,\mathrm{d}\alpha \wedge \mathrm{d}\gamma$; nachdem jedesmal $\mathscr{V}(\alpha) = \pi r^2$ der Flächeninhalt des Normalschnittes von $Z(\alpha)$ ist, so würde nach (*) die Formel (7)

$$(^{***}) \qquad 2\pi v\,.\,\pi r^2 \quad \text{bzw.} \quad 0 \quad \text{bzw.} \quad -2\pi v\,.\,\pi r^2$$

liefern. Weiter ist in unserem Beispiel $\varrho(\alpha) = v$; deshalb wäre das Flächenintegral in (3,8) nach (*) und (**) gleich 0 bzw. $-6\pi^2r^2v$ bzw. $-12\pi^2r^2v$, so dass die Formel (3,8) wieder zu (***) führen möchte.

In der Bezeichnungsweise aus dem Abschn. 2 ergibt sich aus (1,15), dass

$$\mathbf{x}^*(\alpha) - \mathbf{x}(\alpha) = X_1 \mathbf{t} + \sum_{\lambda=2}^{n-1} X_\lambda \mathbf{t}_\lambda + X\mathbf{N}\,. \tag{4,5}$$

Wir ordnen dem Vektorfeld (4,5) die äussere Form

$$T = \sum_{v=1}^{n-1} (-1)^{n-v} X_v \,.\, \tau^1 \wedge \ldots \wedge \tau^{v-1} \wedge \tau^{v+1} \wedge \ldots \wedge \tau^n + \\ + X \,.\, \tau^1 \wedge \ldots \wedge \tau^{n-1} \tag{4,6}$$

zu; sie nimmt auf der Enveloppe S gemäss (3,1) und (3,4) diesen Wert an:

$$T|_{t=1} = X \,.\, \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^{n-1}\,. \tag{4,7}$$

Aus (3,2) und (1,2)–(1,4) ergibt sich leicht, dass $\mathrm{d} \wedge \tau^i = \tau^j \wedge \omega_j^i + \tau^n \wedge \omega_n^i$, $\mathrm{d} \wedge \tau^n = \tau^j \wedge \omega_j^n$. Demzufolge ist für $v = 1, \ldots, n$

$$\mathrm{d} \wedge (\tau^1 \wedge \ldots \wedge \tau^{v-1} \wedge \tau^{v+1} \wedge \ldots \wedge \tau^n) = \\ = (-1)^{v-1} \sum_{r=1}^{n} \tau^1 \wedge \ldots \wedge \tau^{r-1} \wedge \omega_v^r \wedge \tau^{r+1} \wedge \ldots \wedge \tau^n\,. \tag{4,8}$$

Nach (2,2)–(2,4), (4,8) und (3,4) kann man schon das äussere Differential der Form (4,6) berechnen:

$$\mathrm{d} \wedge T = (-1)^{n-1} (\varrho - \varrho^*) \,.\, \mathrm{d}\alpha \wedge \tau^2 \wedge \ldots \wedge \tau^n = \\ = H(\varrho - \varrho^*)\, t^{n-2} \,.\, \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}\alpha \wedge \varpi^2 \wedge \ldots \wedge \varpi^{n-1}\,. \tag{4,9}$$

Aus (4,9) und (4,6) mit (4,7) erhalten wir, indem wir den Stokesschen Satz anwenden und die elementaren Integrationen in bezug auf t berechnen,

$$(n-1) \int_S X \,.\, \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^{n-1} = \int_S (\varrho - \varrho^*)\, H \,.\, \mathrm{d}\alpha \wedge \varpi^2 \wedge \ldots \wedge \varpi^{n-1}\,. \tag{4,10}$$

Das Integral links in (4,10) ist der Fluss des Vektorfeldes (4,5) durch die Enveloppe S und weil bekanntlich das $(n-1)$-malige Volumen des $(n-1)$-dimensionalen Eikörpers $\mathscr{K}(\alpha)$ mit der Berandung $\mathscr{F}(\alpha)$ unter Verwendung von (1,9) die Integraldarstellungen

$$\int_{\mathscr{F}(\alpha)} H\varpi^2 \wedge \ldots \wedge \varpi^{n-1} = \int_{\mathscr{F}(\alpha)} H^*\varpi^2 \wedge \ldots \wedge \varpi^{n-1} \tag{4,11}$$

hat, so lässt sich nach (4,10) der Fluss von (4,5) durch S geometrisch einfach interpretieren.

Integriert man die Identität (4,11) längs der Kurve C^*, so ergibt sich leicht, dass

$$(4,12) \quad \int_S H\varrho^* \,.\, \mathrm{d}\alpha \wedge \bar{\omega}^2 \wedge \ldots \wedge \bar{\omega}^{n-1} = \int_S H^*\varrho^* \,.\, \mathrm{d}\alpha \wedge \bar{\omega}^2 \wedge \ldots \wedge \bar{\omega}^{n-1} \,.$$

Aus (4,10), (2,1) und (4,12) folgt (4,4), womit (4,3) bewiesen ist.

5. Die Abschn. 5 und 6 beziehen sich auf den Teil D) der Einleitung. Der Kürze halber belassen wir für die $(n-1)$-dimensionale Fläche $\mathfrak{H}$ dieselbe Wahl und dieselbe Bezeichnung der n-Beine wie für S, so dass wir mit (1,1)–(1,4) arbeiten werden. Bekanntlich ist

$$(5,1) \qquad \omega_i^n = a_{ij}\omega^i$$

und die Koefflzienten der auf Grund der symmetrischen Matrix (a_{ij}) gebildeten Säkulargleichung sind höchstens bis auf Vorzeichen die elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen von $\mathfrak{H}$, d. h. diese Koeffizienten sind von den sekundären Parametern des n-Beines unabhängig. Die äussere Diferentiation von (5,1) und die nachfolgende Benutzung von (5,1) liefern

$$(5,2) \qquad (\mathrm{d}a_{ij} - a_{ik}\omega_j^k - a_{kj}\omega_i^k) \wedge \omega^j = 0 \,.$$

Für die auf $\mathfrak{H}$ definierte Funktion f setzen wir $\mathrm{d}f = f_i\omega^i$ und durch äussere Differentiation und Anwendung des Cartanschen Lemmas erhalten wir

$$(5,3) \qquad \mathrm{d}f_i - f_j\omega_i^j = A_{ij}\omega^j$$

mit der symmetrischen Matrix (A_{ij}) der Skalarfunktionen A_{ij}. Differenziert man (5,3) auf äussere Weise und benutzt man dann (5,3) und (5,1), so bekommt man nach einfachen Umformungen, dass

$$(5,4) \qquad (\mathrm{d}A_{ij} - A_{ik}\omega_j^k - A_{kj}\omega_i^k - f_k a_{ij}\omega_n^k) \wedge \omega^j = 0 \,.$$

Aus (5,2), (5,4) und (5,1) ergibt sich sofort, dass bei einer Änderung nur der sekundären Parameter die Variation von A_{ij} dieselbe wie die von a_{ij} ist. Demzufolge sind die Koeffizienten der zur Matrix (A_{ij}) gehörenden Säkulargleichung – d. h. die Ausdrücke (11) – von den sekundären Parametern unabhängig.

6. Jetzt berechnen wir $\Delta_r(H)$ für $r = 2, \ldots, n$, d. h. die auf die Stützfunktion von S angewandten Differentialoperatoren (11) in bezug auf das sphärische Bild (3) von S.

Nach (1,4) und (1,18) ist

$$(6,1) \quad \Delta_r(H) = \{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_{r-1} \wedge \omega_n^r \wedge \ldots \wedge \omega_n^{n-1}\} : \omega_n^1 \wedge \ldots \wedge \omega_n^{n-1} \,,$$

wo die Pfaffschen Formen φ folgendermassen bestimmt sind: $\mathrm{d} \wedge \mathrm{d}H = \varphi_i\omega_n^i$, also nach (1,18) und (1,16), (1,17)

$$\varphi_1 = \mathrm{d}H_1 - H_i\omega_1^i = \omega^1 - H\omega_n^1 - \varrho\,\mathrm{d}\alpha\,, \tag{6,2}$$
$$\varphi_\lambda = \mathrm{d}H_\lambda - H_i\omega_\lambda^i = \omega^\lambda - H\omega_n^\lambda\,.$$

Beachten wir die Bedeutung des Symbols (10), so erhalten wir aus (6,1) und (6,2) nach einfacher Rechnung, dass

$$\begin{aligned}\omega_n^1 \wedge \ldots \wedge \omega_n^{n-1}\, \Delta_r(H) = \\ = \varphi_1 \wedge \{\varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_{r-1} \wedge \omega_n^r \wedge \ldots \wedge \omega_n^{n-1}\} + \\ + \{\varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_r \wedge \omega_n^r \wedge \ldots \wedge \omega_n^{n-1}\} = \\ = -\varrho\,\mathrm{d}\alpha \wedge \{(\bar\omega^2 - H\bar\omega_n^2) \wedge \ldots \wedge (\bar\omega^{r-1} - H\bar\omega_n^{r-1}) \wedge \bar\omega_n^r \wedge \ldots \wedge \bar\omega_n^{n-1}\} + \\ + \{(\omega^1 - H\omega_n^1) \wedge \ldots \wedge (\omega^r - H\omega_n^r) \wedge \omega_n^r \wedge \ldots \wedge \bar\omega_n^{n-1}\}\,.\end{aligned} \tag{6,3}$$

Denken wir uns die Tangentenvektoren $\mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_{n-1}$ von $\mathscr{F}(\alpha)$ in Richtungen der Krümmungslinien, so überzeugen wir uns leicht, dass für die Hauptkrümmungsradien $\mathscr{R}_1(\alpha), \ldots, \mathscr{R}_{n-2}(\alpha)$ von $\mathscr{F}(\alpha)$ gilt

$$\begin{aligned}\{(\bar\omega^2 - H\bar\omega_n^2) \wedge \ldots \wedge (\bar\omega^{r-1} - H\bar\omega_n^{r-1}) \wedge \bar\omega_n^r \wedge \ldots \wedge \bar\omega_n^{n-1}\} = \\ = \{\mathscr{R}_1 - H, \ldots, \mathscr{R}_{r-2} - H\}\, \bar\omega_n^2 \wedge \ldots \wedge \bar\omega_n^{n-1}\,.\end{aligned} \tag{6,4}$$

Sehen wir auf einen Augenblick von der bestimmten Wahl des Tangentenvektors $\mathbf{t}$ ab und nehmen wir wieder an, dass die Tangentenvektoren $\mathbf{t}, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_{n-1}$ der Enveloppe S in Richtungen ihrer Krümmungslinien sind, so erhalten wir für die Hauptkrümmungen $1/R_1, \ldots, 1/R_{n-1}$ von S ähnlich

$$\begin{aligned}\{(\omega^1 - H\omega_n^1) \wedge \ldots \wedge (\omega^{r-1} - H\omega_n^{r-1}) \wedge \omega_n^r \wedge \ldots \wedge \omega_n^{n-1}\} = \\ = \{R_1 - H, \ldots, R_{r-1} - H\}\,.\, \omega_n^1 \wedge \ldots \wedge \omega_n^{n-1}\,.\end{aligned} \tag{6,5}$$

Weil $\{R_1 - H, \ldots, R_{r-1} - H\}$ von der Wahl der sekundären Parameter unabhängig ist, so gilt (6,5) auch für die ursprüngliche Lage des Tangentenvektors $\mathbf{t}$. (Wir möchten bemerken, dass die rechnerische Bestätigung von (6,5) mittels $\omega^i = b_j^i\omega_n^j$ umständlich ist; vgl. [1], S. 62–63.)

Gemäss (1,6) ergeben sich aus (6,3)–(6,5) in den nichtparabolischen Punkten von S sofort die Formeln (12).

7. Wir kehren zur Formel (3,8) zurück. Nach (1,16) und (1,17) ist

$$\begin{aligned}(\omega^1 - \varrho\,\mathrm{d}\alpha) \wedge \omega^2 \wedge \ldots \wedge \omega^{n-1} = \\ = (\mathrm{d}H_1 - H_i\omega_1^i + H\omega_n^1) \wedge \ldots \wedge (\mathrm{d}H_{n-1} - H_i\omega_{n-1}^i + H\omega_n^{n-1}) = \\ = (\Delta_n(H) + H\,\Delta_{n-1}(H) + \ldots + H^{n-2}\,\Delta_2(H) + H^{n-1})\,.\,\omega_n^1 \wedge \ldots \wedge \omega_n^{n-1}\,;\end{aligned} \tag{7,1}$$

wir gebrauchen natürlich noch (6,1) und (6,2). Aus (3,8), (7,1) und (1,12) folgt die Formel (14).

Betreffs der Formel (14) noch eine Bemerkung. Wegen $f > 0$ ist nach (1,13) auf dem unter Verwendung des Normalenvektors $\boldsymbol{N}$ durch $R_1^{-1} \ldots R_{n-1}^{-1} > 0$ (bzw. < 0. gekennzeichneten Teil S_e (bzw. S_h) der Enveloppe S offensichtlich $\cos \gamma < 0$ (bzw. $\cos \gamma > 0$). Dementsprechend gemäss (1,12) ist für das übliche Oberflächenelement des sphärischen Bildes Ω_e (bzw. Ω_h) von S_e (bzw. S_h) $\mathrm{d}\Omega_e = \omega_n^1 \wedge \ldots \wedge \omega_n^{n-1}$ (bzw. $\mathrm{d}\Omega_h = -\omega_n^1 \wedge \ldots \wedge \omega_n^{n-1}$) un das Integral $\int_\Omega \{\ldots\} \,\mathrm{d}\Omega$ ist die Differenz von zwei üblichen Oberflächenintegralen:

$$\int_\Omega \{\ldots\} \,\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega_e} \{\ldots\} \,\mathrm{d}\Omega_e - \int_{\Omega_h} \{\ldots\} \,\mathrm{d}\Omega_h . \tag{7,2}$$

8. Mittels der Steinerschen Formel für die Parallelkörper leiten wir aus (7) und (14) die Integraldarstellungen (9) und (15) her. Wir bezeichnen mit $Z_\sigma(\alpha)$ die konvexe zu $Z(\alpha)$ im Abstand σ parallele Zylinderfläche und statt (4) betrachten wir die einparametrige Familie $\{Z_\sigma(\alpha); \alpha \in \langle 0, a)\}$. Sie besitzt offensichtlich die zur Enveloppe S von (4) parallele und für genügend kleines $|\sigma|$ auch singularitätenfreie Enveloppe S_σ mit der Stützfunktion

$$H_\sigma(\alpha, u) = H(\alpha, u)_\gamma + \sigma . \tag{8,1}$$

Für den Rauminhalt V_σ des n-dimensionalen von S_σ berandeten und foglich zu K im Abstand σ parallelen Körpers K_σ gilt die von H. HADWIGER [3], [4][8]) erweiterte Steinersche Formel

$$V_\sigma = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \sigma^r W_r = V + \sigma \int_S \mathrm{d}S + \sum_{r=2}^{n} \frac{\sigma^r}{r} \int_S \left\{\frac{1}{R_1} \cdots \frac{1}{R_{r-1}}\right\} \mathrm{d}S , \tag{8,2}$$

und zwar für σ aus gewisser Umgebung von 0; wir haben freilich auch (8) benutzt.

Für das Volumen des $(n - 1)$-dimensionalen Körpers, dessen Berandung der Normalschnitt $\nu(\alpha) \cap Z_\sigma(\alpha)$ ist (d. h. für die zu $\mathscr{F}(\alpha)$ im Abstand σ parallele Eifläche), gilt die klassische Steinersche Formel

$$\mathscr{V}_\sigma(\alpha) = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} \sigma^r \mathscr{W}_r(\alpha) . \tag{8,3}$$

Auf das Volumen V_σ von K_σ ist auch die Formel (14) anwendbar:

$$V_\sigma = \int_C \mathscr{V}_\sigma \,\mathrm{d}s + \frac{1}{n} \int_\Omega H_\sigma\Big(\sum_{r=0}^{n-1} H_\sigma^r \,.\, \Delta_{n-r}(H_\sigma) + H_\sigma^{n-1}\Big) \,\mathrm{d}\Omega .$$

Setzt man hierher aus (8,1)–(8,3) ein und beachtet man, dass $\Delta_{n-r}(H_\sigma) = \Delta_{n-r}(H)$, so erhält man durch den Vergleich der Koeffizienten von σ^r mit Berücksichtigung von (8) tatsächlich (15).

---

[8]) Siehe auch [5], S. 287, Anm. 8 zur S. 214.

Ähnlich kann man auch (9) ermitteln. Denn nach (7) ist

$$V_\sigma = \frac{1}{n}\int_C \mathscr{V}_\sigma \, \mathrm{d}s + \frac{1}{n}\int_{S\sigma} H_\sigma \, \mathrm{d}S_\sigma \, ; \tag{8,4}$$

bekanntlich aber

$$\mathrm{d}S_\sigma = \left(1 + \sum_{r=1}^{n-1} \sigma^r \left\{\frac{1}{R_1} \cdots \frac{1}{R_r}\right\}\right) \mathrm{d}S \, , \tag{8,5}$$

sodass das Einsetzen aus (8,1), (8,3) und (8,5) in (8,4) und die nachfolgende Vergleichung mit (8,2) wieder (9) liefert.

9. Zu der Herleitung der Umformungen (19) von (18), welche aus dem Abschn. E) der Einleitung noch zu beweisen bleiben, verifizieren wir zuerst in E_3 diese Formeln (g bedeutet eine auf Ω definierte Funktion erster Klasse):

$$\int_\Omega g \, . \, \Delta_2(H) \, \mathrm{d}\Omega = - \int_\Omega (g, H) \, \mathrm{d}\Omega \, , \tag{9,1}$$

$$\int_\Omega \Delta_3(H) \, \mathrm{d}\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega \Delta(H, H) \, \mathrm{d}\Omega \, , \tag{9,2}$$

$$\int_\Omega H \, . \, \Delta_3(H) \, \mathrm{d}\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega H \, . \, \Delta(H, H) \, \mathrm{d}\Omega + \frac{3}{4}\int_\Omega \Delta(\Delta(H, H), H) \, \mathrm{d}\Omega \, ; \tag{9,3}$$

Δ ist der erste Beltramische Differentialoperator in bezug auf Ω.

In der Tat, erstens ist nach (1,12), (6,1) und (6,2)

$$\int_\Omega g \, . \, \Delta_2(H) \, \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega g \, . \, \mathrm{d} \wedge (H_1 \omega_3^2 - H_2 \omega_3^1) \tag{9,4}$$

und weil $g \, . \, \mathrm{d} \wedge (H_1\omega_3^2 - H_2\omega_3^1) = - \mathrm{d}g \wedge (H_1\omega_3^2 - H_2\omega_3^1) + \mathrm{d} \wedge (g(H_1\omega_3^2 - H_2\omega_3^1))$ ist, ergibt sich aus (9,4) unter Verwendung des Stokesschen Satzes sofort (9,1).

Zweitens folgt nach (6,1) und (6,2)

$$\Delta_3(H) \, . \, \omega_3^1 \wedge \omega_3^2 = \mathrm{d}H_1 \wedge \mathrm{d}H_2 + \tfrac{1}{2} \mathrm{d}\Delta(H, H) \wedge \omega_1^2 \, ; \tag{9,5}$$

infolge $\mathrm{d}H_1 \wedge \mathrm{d}H_2 = \mathrm{d} \wedge (H_1 \, \mathrm{d}H_2)$ und $\mathrm{d}\Delta(H, H) \wedge \omega_1^2 = \Delta(H, H) \, \omega_3^1 \wedge \omega_3^2 + \mathrm{d} \wedge (\Delta(H, H) \, . \, \omega_1^2)$ ist nach dem Stokesschen Satz das über Ω erstreckte Integral des ersten bzw. zweiten Summanden rechts in (9,5) gleich 0 bzw. $\frac{1}{2} \int_\Omega \Delta(H, H) \, . \, \omega_3^1 \wedge \omega_3^2$ und deshalb gilt in Hinsicht auf (1,12) wirklich (9,2).

Drittens die Anwendung des Stokesschen Satzes fortschreitend auf die über Ω erstreckten Integrale von $\mathrm{d} \wedge (H \, . \, \Delta(H, H) \, . \, \omega_1^2)$, $\mathrm{d} \wedge (H \, . \, H_1 \, . \, \mathrm{d}H_2)$, $\mathrm{d} \wedge (H \, . \, H_2 \, . \, \mathrm{d}H_1)$ und die Addition des ersten und zweiten und die Substraktion des dritten

Ergebnisses liefern nach einfachen Umformungen

$$(9,6) \qquad \int_\Omega H \,.\, \Delta_3(H) \,.\, \omega_3^1 \wedge \omega_3^2 = \frac{1}{2}\int_\Omega H \,.\, \Delta(H, H) \,.\, \omega_3^1 \wedge \omega_3^2 -$$

$$- \frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{d}H \wedge \left(H_1 \,\mathrm{d}H_2 - H_2 \,\mathrm{d}H_1 + \Delta(H, H)\, \omega_1^2\right).$$

Man bestätigt aber leicht, dass $\mathrm{d}H \wedge \left(H_1 \,\mathrm{d}H_2 - H_2 \,\mathrm{d}H_1 + \Delta(H, H)\, \omega_1^2\right) = \{\Delta(H, H) \,.\, \Delta_2(H) - \frac{1}{2}\Delta(\Delta(H, H), H)\} \,.\, \omega_3^1 \wedge \omega_3^2$ ist. Folglich ist nach (9,6) mit Rücksicht auf (1,12)

$$\int_\Omega H \,.\, \Delta_3(H)\, \mathrm{d}\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega H \,.\, \Delta(H, H)\, \mathrm{d}\Omega -$$

$$- \frac{1}{2}\int_\Omega \Delta(H, H) \,.\, \Delta_2(H)\, \mathrm{d}\Omega + \frac{1}{2}\int_\Omega \Delta(\Delta(H, H), H)\, \mathrm{d}\Omega$$

und wenn wir hier auf das zweite Integral rechts die Formel (9,1) für $g = \Delta(H, H)$ anwenden, so erhalten wir (9,3).

Die Gleichheit der dritten bzw. zweiten bzw. ersten Formeln in (18) und (19) ist nun eine unmittelbare Folgerung von (9,1) für $g = 1$ bzw. von (9,1) für $g = H$ und von (9,2) bzw. von (9,1) für $g = H^2$ und von (9,3).

10. Wir möchten noch kurz die direkte Herleitung der zu (15) oder (16), (17) analogen Formeln andeuten.
Nach (7,1) ist

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \ldots \wedge \omega^{n-1} = (\varrho \,\mathrm{d}\alpha + \omega^1 - \varrho \,\mathrm{d}\alpha) \wedge \omega^2 \wedge \ldots \wedge \omega^{n-1} =$$

$$= \varrho \,\mathrm{d}\alpha \wedge \bar{\omega}^2 \wedge \ldots \wedge \bar{\omega}^{n-1} + \sum_{r=0}^{n-1} H^r \,.\, \Delta_{n-r}(H) \,.\, \omega_n^1 \wedge \ldots \wedge \omega_n^{n-1}\,.$$

Folglich erhalten wir gemäss (1,11), (1,9) und (1,12) für $O = \int_\Omega \mathrm{d}S$ statt (16) diese Darstellung

$$(10,1) \qquad O = \int_C \Phi \,\mathrm{d}s + \int_\Omega \sum_{r=0}^{n-1} H^r \,.\, \Delta_{n-r}(H)\, \mathrm{d}\Omega\,.$$

Ähnlich, wenn auch gewissermassen komplizierter, kann man die Formeln für die Krümmungsintegrale von S herleiten.

Selbstverständlich, ist die Formel (10,1) auch auf die Oberfläche der zu S parallelen Enveloppe S_σ anwendbar (vgl. Abschn. 8) und der Vergleich mit der Steinerschen Formel für die Oberfläche liefert von neuem die Darstellungen für die Krümmungsintegrale. Dasselbe gilt für (17).

Für $n = 3$ ist nach (10,1) in der Bezeichnungsweise aus (18) oder (19)

$$(10,2) \qquad O = \int_C L \, \mathrm{d}s + \int_\Omega \{H^2 + H \, . \, \Delta_2(H) + \Delta_3(H)\} \, \mathrm{d}\Omega \, .$$

Unter Zuhilfenahme von (9,2) und (9,1) für $g = H$ sieht man sofort, dass (10,2) wieder zu der in (19) gegebenen Form grebacht werden kann.

11. Falls für jedes $\alpha \in \langle 0, a)$ die Zylinderfläche $Z(\alpha)$ in bezug auf die Tangente von (1) in $\mathbf{x}(\alpha)$ achsensymmetrisch ist, so gilt für die Stützfunktion $H(\alpha, u)$ von S

$$(11,1) \qquad H(\alpha, u) = H(\alpha, -u) \, ;$$

dabei bezeichnen u und $-u$ [9]) die Gegenpunkte von $\omega(\alpha)$ oder $\Omega(\alpha)$. Also

$$(11,2) \qquad \mathbf{N}(\alpha, -u) = -\mathbf{N}(\alpha, u) \, ,$$

sodass sich nach (5) die Werte von $\cos \gamma$ für u und $-u$ im Vorzeichen unterscheiden. Gemäss (1,13) sind deshalb die „Gegenpunkte" von S

$$(11,3) \qquad \mathbf{y}(\alpha, u) \, , \quad \mathbf{y}(\alpha, -u)$$

(diese Punkte liegen auf der Charakteristik von $Z(\alpha)$ und auf den Geraden von $Z(\alpha)$, welche die Gegenpunkte von $\mathscr{F}(\alpha) \subset \nu(\alpha)$ projizieren; folglich sind die Tangentenebenen von S in (11,3) parallel) parabolisch oder gehört der eine zum Teil S_e und der andere zum Teil S_h von S (s. Abschn. 7).

Angenommen, der Ausdruck $\{.\}$ in (7,2) enthielte nur

$$(11,4) \qquad H, \Delta(H, H), \Delta_2(H), \ldots \Delta_n(H) \, .$$

Die Abbildung $u \to -u$ nach (11,1) und (11,2) führt Ω_e in Ω_h, $\mathrm{d}\Omega_e$ in $\mathrm{d}\Omega_h$ (s. Abschn. 7) und reproduziert alle Werte (11,4). Demzufolge sind die Flächenintegrale rechts in (7,2) gleich, d. h. $\int_\Omega \{.\} \, \mathrm{d}\Omega = 0$.

Damit ist aber gezeigt, dass sich im betrachteten Fall aus (14), (16) und (17) die einfachen Formeln (20) ergeben.

Literatur

[1] *T. Bonnesen - W. Fenchel:* Theorie der konvexen Körper. Berlin 1934.

[2] *H. Busemann:* Convex surfaces. New York 1958, (Выпуклые поверхности. Москва 1964).

[3] *H. Hadwiger:* Über das Volumen der Parallelmengen. Mitt. natur. forsch. Ges. Bern *3* (1946), 121—125.

[4] *H. Hadwiger:* Über die erweiterten Steinerschen Formeln für Parallelmengen. Rev. mat. Hisp.-Amer. IV. Ser. 6 (1946), 160—163.

[9]) Oder ausführlicher $u(\alpha)$ und $-u(\alpha)$; vgl. die Fussnote [2]).

[5] *H. Hadwiger:* Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1957. (Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. Москва 1966.)
[6] *C.-C. Hsiung:* Some Integral Formulas for Closed Hypersurfaces. Math. Scand. *2* (1954), 286—294.
[7] *A. Lichnerowicz:* Algèbre et Analyse linéaire. Paris 1947. (Lineare Algebra und lineare Analysis. Berlin 1956.)
[8] *Z. Nádeník:* Über das Volumen des Körpers, dessen Randfläche die Enveloppe einer einparametrigen Familie von konvexen Zylinderflächen ist. Čas. pro pěst. mat. *88* (1963), 200—208.
[9] *Z. Nádeník:* Obere und untere Schranken für das isoperimetrische Defizit bei kantiger Enveloppe von achsensymmetrischen konvexen Zylinderflächen. Čas. pro pěst. mat. *90* (1965), 226—229.
[10] *Z. Nádeník:* Die Ungleichungen für die Masszahlen der geschlossenen Kanalflächen. Czech. Math. J. *16* (*91*) (1966), 296—306.
[11] *Z. Nádeník:* Eine Frobeniussche Ungleichung für kantige torusförmige Körper. Čas. pro pěst. mat. *92* (1967), 146—156.
[12] *W. Scherer:* Integralsätze der Flächentheorie. Comment. Math. Helv. *19* (1946), 105—114.

Anschrift des Verfassers: Praha 2, Trojanova 13, ČSSR (České vysoké učení technické).