Jaromír Suchomel

Wronskische Determinanten von Lösungen iterierter Gleichungen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 19 (1969), No. 4, 711–715

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100930

Czechoslovak Mathematical Journal, 19 (94) 1969, Praha

WRONSKISCHE DETERMINANTEN VON LÖSUNGEN ITERIERTER GLEICHUNGEN

JAROMÍR SUCHOMEL, Brno

(Eingelangt am 24. Februar 1969)

1. Es sei I ein beliebiges Intervall und es seien $\alpha(x)$, $u(x)$, $v(x)$ Funktionen mit folgenden Eigenschaften

$$(1,1) \qquad \alpha, u, v \in C_n(I), \quad (n > 0, \text{ ganz}), \quad \alpha > 0, \quad u \neq 0 \quad \text{in } I,$$

$$(1,2) \qquad W(u, v) = uv' - u'v = 1 \quad \text{in } I.$$

Setzen wir

$$(1,3) \qquad y_k(x) = \begin{cases} ((k-1)!)^{-1} \alpha u^{n-k} v^{k-1} & \text{für } k = 1, 2, \ldots, n, \\ 0 & \text{für } k \leqq 0. \end{cases}$$

1.1. *Es gilt*

$$(1,4) \qquad y_k^{(l)} = \sum_{j=0}^{l} \varphi_j^l(x)\, y_{k-j}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad l = 0, 1, \ldots, n-1,$$

wo $\varphi_j^l \in C_{n-l}(I)$ *für gegebenes* l *die* j*-te Funktion ist, die die Gleichung*

$$(1,5) \qquad \varphi_j^{l+1} = \varphi_0^1 \varphi_j^l + \varphi_1^1 \varphi_{j-1}^l + (\varphi_j^l)', \quad l = 0, 1, \ldots, n-1, \quad j = 0, 1, \ldots, l$$

mit

$$(1,6) \qquad \varphi_0^0 = 1, \quad \varphi_0^1 = (n-1)\, u'u^{-1} + \alpha'\alpha^{-1}, \quad \varphi_1^1 = u^{-2}, \quad \varphi_{-j}^l = \varphi_{l+j}^l = 0, \quad j = 1, 2, \ldots$$

erfüllt.

Beweis. Die Formeln (1,4), (1,5) werden mittels Induktion in bezug auf l vermöge (1,2), (1,3), (1,6) bewiesen.

1.2. Nach (1,5), (1,6) gilt

$$(1,7) \qquad \varphi_l^l = u^{-2l}\,, \quad l = 0, 1, \ldots, n\,.$$

2. Im Folgenden bezeichnen wir mit dem Symbol $D_s(a_{ik})$ eine Determinante s-ter Ordnung, die in der i-ten Zeile und der k-ten Spalte das Element a_{ik} hat. Es sei ferner

$$(2,1) \qquad \{r_k\}_s = \{r_1, r_2, \ldots, r_s\}\,, \quad s \leqq n\,, \quad r_s \leqq n$$

eine s-gliedrige wachsende Folge von natürlichen Zahlen und es sei

$$(2,2) \qquad c_i = \begin{cases} (i!)^{-1} & \text{für} \quad i = 0, 1, \ldots, \\ 0 & \text{für} \quad i < 0\,. \end{cases}$$

2.1. *Für die Wronskische Determinante* $W(y_{r_1}, y_{r_2}, \ldots, y_{r_s})$ *gilt*

$$(2,3) \qquad W(y_{r_1}, \ldots, y_{r_s}) = u^{s(1-s)} D_s(y_{r_k - i + 1})\,.$$

Beweis. Nach (1,4) ist

$$W(y_{r_1}, \ldots, y_{r_s}) = D_s(y_{r_k}^{(i-1)}) = D_s\Big(\sum_{j=0}^{i-1} \varphi_j^{i-1} y_{r_k - j}\Big) = D_s(\varphi_{i-1}^{i-1} y_{r_k - i + 1})\,,$$

woraus vermöge (1,7) die Formel (2,3) folgt.

2.2. *Nach* (1,3) *gilt*

$$(2,4) \qquad D_s(y_{r_k - i + 1}) = \alpha^s D_s(a_{ik}(x))\,,$$

wo

$$(2,5) \qquad a_{ik} = \begin{cases} c_{r_k - i} u^{n - r_k + i - 1} v^{r_k - i} & \text{für} \quad r_k - i \geqq 0\,, \\ 0 & \text{für} \quad r_k - i < 0\,. \end{cases}$$

2.3. *Es gilt*

$$(2,6) \qquad D_s(a_{ik}) = u^{sn - R + (s/2)(s-1)} v^{R - (s/2)(s+1)}\, D_s(c_{r_k - i})\,,$$

wo

$$(2,7) \qquad R = \sum_{k=1}^{s} r_k\,.$$

Beweis. Es ist $D_s(a_{ik}) = \sum_M \operatorname{sgn}(i_1, i_2, \ldots, i_s) \prod_{k=1}^{s} a_{i_k k}$, wobei die Summe sich auf die Menge M aller Permutationen $\begin{Bmatrix} 1, 2, \ldots, s \\ i_1, i_2, \ldots, i_s \end{Bmatrix}$ der Zeilenindizes erstreckt und wobei

$\operatorname{sgn}(i_1, \ldots, i_s) = 1$ bzw. -1 für eine gerade bzw. ungerade Permutation ist, siehe [2, S. 18, 19]. Ferner gilt

$$D_s(a_{ik}) = \sum_{M^*} \operatorname{sgn}(i_1, \ldots, i_s) \prod_{k=1}^{s} c_{r_k - i_k} u^{n - r_k + i_k - 1} v^{r_k - i_k} =$$

$$= u^{sn - R + (s/2)(s-1)} v^{R - (s/2)(s+1)} \sum_{M^*} \operatorname{sgn}(i_1, \ldots, i_s) \prod_{k=1}^{s} c_{r_k - i_k},$$

wo $M^* \subset M$ die Menge aller Permutationen ist, für die $r_k - i_k \geqq 0$ für alle $k = 1, 2, \ldots, s$ in Kraft ist.

2.4. Satz. *Für die Wronskische Determinante der Funktionen* (1,3) *gilt die Formel*

(2,8) $$W(y_{r_1}, \ldots, y_{r_s}) = \alpha^s u^{sn - R - (s/2)(s-1)} v^{R - (s/2)(s+1)} D_s(c_{r_k - i})$$

mit den Bezeichnungen (2,1), (2,2), (2,7).

Beweis folgt aus (2,3), (2,4), (2,6).

3. Es gilt

(3,1) $$D_s(c_{k-i}) = 1, \quad s = 1, 2, \ldots, n.$$

3.1. Lemma. *Es gilt*

(3,2) $$W(y_1, y_2, \ldots, y_s) = \alpha^s u^{s(n-s)}, \quad s = 1, 2, \ldots, n.$$

Das Lemma folgt aus Satz 2.4, wo $R = \frac{1}{2}s(s+1)$ und (3,1) zu nehmen ist.

3.2. *Es sei $j > 0$, ganz, und für $l = 0, 1, \ldots, j-1$ gelte*

$$b_{ik}^l = \begin{cases} c_{l+k} & \text{für} \quad i = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, j - l, \\ c_{k-i+1} & \text{für} \quad i = 2, 3, \ldots, j - l, \quad k = 1, 2, \ldots, j - l. \end{cases}$$

Dann gilt

(3,3) $$\sum_{\nu=0}^{l} (-1)^\nu c_\nu D_{j-\nu}(c_{k-i+1}) = (-1)^l D_{j-l}(b_{ik}^l), \quad l = 0, 1, \ldots, j-1.$$

Beweis wird mittels Induktion in bezug auf l durchgeführt.

3.3. Setzen wir $l = j - 1$ in (3,3) ein, so erhalten wir nach Umformung

(3,4) $$\sum_{\nu=0}^{j} (-1)^\nu c_\nu D_{j-\nu}(c_{k-i+1}) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

wo wir

$$D_0(c_{k-i+1}) = 1 \tag{3,5}$$

setzen.

3.4. *Es gilt*

$$D_j(c_{k-i+1}) = c_j\,, \quad j > 0\,, \quad \textit{ganz}. \tag{3,6}$$

Beweis wird mittels Induktion in bezug auf j mit Hilfe (3,4), (3,5) durchgeführt.

3.5. *Bezeichnen wir* $\{r_k^j\}_{n-1} = \{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n\}$ *für* $j = 1, 2, \ldots, n$. *Dann gilt*

$$D_{n-1}(c_{r_k^j - i}) = c_{n-j}\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{3,7}$$

Beweis. Nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz, siehe z. B. [2, S. 34], gilt $D_{n-1}(c_{r_k^j - i}) = D_{j-1}(c_{k-i})\, D_{n-j}(c_{k-i+1})$, woraus vermöge (3,1), (3,5), (3,6) die Formel (3,7) folgt, wo $D_0(c_{k-i}) = 1$ zu nehmen ist.

3.6. Lemma. *Es gilt*

$$W(y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n) = \alpha^{n-2} y_{n-j+1}\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{3,8}$$

Das Lemma folgt aus Satz 2.4, wo $R = \frac{1}{2}n\,(n+1) - j$ und (3,7) zu nehmen ist.

4. Es sei eine iterierte Differentialgleichung n-ter Ordnung, $n \geqq 3$, von der Form

$$I_n(y;\, a_1, a_2) = 0 \tag{4,1}$$

gegeben, wo $a_i \in C_{n-i}(I)$, $i = 1, 2$ und I ein beliebiges Intervall ist. Es sei ferner $\alpha = \exp\{-\int_{x_0}^x a_1(t)\,\mathrm{d}t\}$, $x_0 \in I$, $W(u, v) = 1$ in I, wo u, v Lösungen der Gleichung

$$y'' + \frac{3}{n-1}\,(a_2 - a_1 - a_1^2)\, y = 0 \tag{4,2}$$

darstellen. Dann bilden die Funktionen

$$y_k(x) = ((k-1)!)^{-1}\, \alpha u^{n-k} v^{k-1}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{4,3}$$

ein Hauptsystem von Lösungen der Gleichung (4,1). Siehe [1, S. 49].

4.1. Satz. *Für die Wronskische Determinante der Funktionen* (4,3) *gilt die Formel* (2,8) *mit den Bezeichnungen* (2,1), (2,2), (2,7).

Beweis. Nach (2,7) gilt $\frac{1}{2}s\,(s+1) \leqq R \leqq \frac{1}{2}s\,(2n - s + 1)$, woraus die Stetigkeit der rechten Seite von (2,8) folgt. Nehmen wir an, daß $x_0 \in I$ existiert, für das

$(2,8)$ nicht gilt. Da beide Seiten von $(2,8)$ stetig sind, existiert ein geschlossenes nichtleeres Intervall $I_0 \subset I$, $x_0 \in I_0$, in dem $(2,8)$ nicht gilt. Da u eine Lösung von $(4,2)$ ist, hat es in I_0 nur endlich viele Wurzeln und es existiert ein nichtleeres Intervall $I_1 \subset I_0$, in dem $u \neq 0$ in Kraft ist. In I_1 gilt $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$ und gemäß dem Satze 2.4 gilt $(2,8)$. Dieser Widerspruch beweist den Satz 4.1.

4.2. *Für die Funktionen* $(4,3)$ *gelten die Lemmata* 3.1 *und* 3.6.

Beweis folgt aus Satz 4.1.

4.3. Satz. *Es seien* $z_1, z_2, \ldots, z_s$, $s \leqq n$, *beliebige Lösungen von* $(4,1)$. *Dann gilt*

$$W(z_1, \ldots, z_s) = \alpha^s \sum_{j=0}^{s(n-s)} b_j u^{s(n-s)-j} v^j ,$$

wo b_j, $j = 0, 1, \ldots, s(n-s)$, *Konstanten sind.*

Beweis. Es gilt $z_k = \sum_{j=1}^{n} c_{kj} y_j$, $k = 1, 2, \ldots, s$, wo c_{kj} Konstanten sind. Nach dem Multiplikationssatz rechteckiger Matrizen, siehe [2, S. 65, 66], gilt

$$W(z_1, \ldots, z_s) = D_s\Big(\sum_{j=1}^{n} c_{kj} y_j^{(i-1)}\Big) = \sum_N D_s(c_{ir_k})\, D_s(y_{r_k}^{(i-1)}) ,$$

wobei die Summe sich auf die Menge N aller Folgen von der Form $(2,1)$ erstreckt. Nach dem Satz 4.1 gilt ferner

$$W(z_1, \ldots, z_s) = \sum_{j=0}^{s(n-s)} \sum_{N_j} D_s(c_{ir_k})\, \alpha^s u^{sn-R_j-(s/2)(s-1)} v^{R_j-(s/2)(s+1)} D_s(c_{r_k-i}) =$$
$$= \alpha^s \sum_{j=0}^{s(n-s)} u^{s(n-s)-j} v^j \sum_{N_j} D_s(c_{ir_k})\, D_s(c_{r_k-i}) ,$$

wo $N_j \subset N$ eine durch die Formel

$$\{r_k\}_s \in N_j \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{s} r_k = R_j = \frac{s}{2}(s+1) + j , \quad j = 0, 1, \ldots, s(n-s)$$

definierte Menge ist.

Literatur

[1] *Z. Hustý:* Die Iteration homogener linearer Differentialgleichungen. Publ. Fac. Sci. Univ. J. E. Purkyně, Brno, No. 449, 23–56 (1964).

[2] *G. Kowalewski:* Einführung in die Determinantentheorie, Berlin, 1942.

Anschrift des Verfassers: Brno, nám. 28. října 26, ČSSR.