

Josef Vala

Über einige spezielle Kongruenzenpaare

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 20 (1970), No. 1, 140–148

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100953>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1970

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ÜBER EINIGE SPEZIELLE KONGRUENZENPAARE

JOSEF VALA, Brno

(Eingegangen am 10. April 1969)

Die zweiparametrische Geradenmannigfaltigkeit Γ des n -dimensionalen projektiven Raumes P_n nennen wir die Kongruenz. $V_3(\Gamma)$ sei die Punktmannigfaltigkeit, die aus sämtlichen Punkten aller Erzeugenden p der Kongruenz Γ besteht. Wir werden voraussetzen, daß längs $p \subset \Gamma$ die Berührräume von $V_3(\Gamma)$ existieren. Die niedrigste Dimension des Unterraumes, der alle Berührräume von $V_3(\Gamma)$ längs p enthält, nennen wir *Charakter* der Geraden p (ŠVEC [3], S. 12).

Im projektiven dreidimensionalen Raum P_3 betrachten wir das Paar P der Kongruenzen $\Gamma_1(p_1), \Gamma_2(p_2)$. Ein solches Paar besitze eine Korrespondenz C , wobei die einander zugeordneten Geraden p_1, p_2 stets demselben Parameterpaar (u, v) entsprechen. Die Parameterpaare (u, v) sollen alle Werte aus dem Gebiet Δ annehmen. Für alle Wertepaare $(u, v) \in \Delta$ seien die sich entsprechenden Erzeugenden beider Kongruenzen windschief.

Die Kleinschen Bilder der Geraden p_1, p_2 bilden die Punktmannigfaltigkeiten K_1, K_2 des Kleinschen Raumes P_5 . Die Koordinaten der erwähnten Kleinschen Bilder der Geraden p_1, p_2 seien Funktionen der Differentialklasse C^2 .

a) Wir betrachten ein bewegliches Koordinatentetraeder mit den Eckpunkten A_1, A_2, A_3, A_4 , wobei

$$p_1 = (A_1, A_4), \quad p_2 = (A_2, A_3)$$

gilt. Wenn wir mit ω_i^k die Komponenten der differentiellen Verrückung des Tetraeders bezeichnen, dann folgt:

$$(1) \quad \begin{aligned} dA_i &= \omega_i^k A_k; \\ D\omega_i^k &= [\omega_i^r, \omega_r^k]; \quad i, r, k = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

$\omega_1^2, \omega_1^3, \omega_2^1, \omega_2^4, \omega_3^1, \omega_3^4, \omega_4^2, \omega_4^3$ sind die Hauptformen.

Im Folgenden werden wir voraussetzen, daß die Dimension der Berührräume der Punktmannigfaltigkeit K_1 für alle Wertepaare $(u, v) \in \Delta$ gleich zwei ist. Dasselbe werden wir für die Punktmannigfaltigkeit K_2 voraussetzen. Für alle Wertepaare

$(u, v) \subset \Delta$ seien noch folgende Bedingungen erfüllt: Die Kongruenzen Γ_1, Γ_2 sollen hyperbolisch sein und reguläre Brennmannigfaltigkeiten haben. Alle Geraden p_1, p_2 sollen den Charakter 3 haben.

Wir wählen die Punkte A_1, A_4 in den Brennpunkten der Kongruenz Γ_1 , ebenso A_2, A_3 in den Brennpunkten der Kongruenz Γ_2 . Mit $\alpha_i, i = 1, 2, 3, 4$, bezeichnen wir die Berührebenen in den Brennpunkten bezüglich der zugehörigen Brennflächen.

Die Gleichungen (1) kann man dann in folgender Form (VALA [4]) schreiben:

$$(2) \quad \begin{aligned} dA_1 &= \omega_1^1 A_1 + a_1^2 \omega_1 A_2 + a_1^3 \omega_1 A_3 + \omega_1^4 A_4, \\ dA_2 &= a_2^1 \omega_2 A_1 + \omega_2^2 A_2 + \omega_2^3 A_3 + a_2^4 \omega_2 A_4, \\ dA_3 &= a_3^1 \omega_3 A_1 + \omega_3^2 A_2 + \omega_3^3 A_3 + a_3^4 \omega_3 A_4, \\ dA_4 &= \omega_4^1 A_1 + a_4^2 \omega_4 A_2 + a_4^3 \omega_4 A_3 + \omega_4^4 A_4. \end{aligned}$$

ω_1, ω_4 sind die unabhängigen Hauptformen, ebenso die Formen $\omega_2, \omega_3, a_1^2, a_1^3, a_1^4, a_2^1, a_2^3, a_2^4, a_3^1, a_3^2, a_3^4$ sind im allgemeinen die Funktionen der Hauptparameter und der sekundären Parameter. Nach den Voraussetzungen gilt noch:

$$(3) \quad A_1 = a_1^2 a_4^3 - a_1^3 a_4^2 \neq 0, \quad A_2 = a_2^1 a_3^4 - a_2^4 a_3^1 \neq 0 \quad (\text{für } (u, v) \subset \Delta).$$

Durch jede der Gleichungen

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_4 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 0$$

sind im P die sich entsprechenden Paare der Regelflächen bestimmt. Mindestens eine Regelfläche des Paares ist immer die Torse. Solche Paare nennt man *Torsalpaare* des Paares P (IVLEV [2], S. 19). Die zu jeder der angeführten Gleichungen gehörigen Torsalpaare bilden *das Torsalsystem*.

Durch die äußere Differentiation folgender Gleichungen:

$$(4) \quad \begin{aligned} \omega_1^2 &= a_1^2 \omega_1, & \omega_1^3 &= a_1^3 \omega_1, & \omega_4^2 &= a_4^2 \omega_4, & \omega_4^3 &= a_4^3 \omega_4, \\ \omega_2^1 &= a_2^1 \omega_2, & \omega_2^4 &= a_2^4 \omega_2, & \omega_3^1 &= a_3^1 \omega_3, & \omega_3^4 &= a_3^4 \omega_3 \end{aligned}$$

bekommt man die Relationen:

$$(5) \quad \begin{aligned} [a_1^2(\omega_1^1 - \omega_2^2) - da_1^2 - a_1^3 \omega_3^2, \omega_1] + [a_4^2 \omega_4^1, \omega_4] &= a_1^2 D\omega_1, \\ [a_1^3(\omega_1^1 - \omega_3^3) - da_1^3 - a_1^2 \omega_2^3, \omega_1] + [a_4^3 \omega_4^1, \omega_4] &= a_1^3 D\omega_1, \\ [a_1^2 \omega_4^1, \omega_1] + [a_4^2(-\omega_2^2 + \omega_4^4) - da_4^2 - a_4^3 \omega_3^2, \omega_4] &= a_4^2 D\omega_4, \\ [a_1^3 \omega_4^1, \omega_1] + [a_4^3(-\omega_3^3 + \omega_4^4) - da_4^3 - a_4^2 \omega_2^3, \omega_4] &= a_4^3 D\omega_4, \\ [a_2^1(-\omega_1^1 + \omega_2^2) - da_2^1 - a_2^4 \omega_4^1, \omega_2] + [a_3^1 \omega_3^2, \omega_3] &= a_2^1 D\omega_2, \\ [a_2^4(\omega_2^2 - \omega_4^4) - da_2^4 - a_2^1 \omega_1^4, \omega_2] + [a_3^4 \omega_3^2, \omega_3] &= a_2^4 D\omega_2, \\ [a_2^1 \omega_3^2, \omega_2] + [a_3^1(-\omega_1^1 + \omega_3^3) - da_3^1 - a_3^4 \omega_4^1, \omega_3] &= a_3^1 D\omega_3, \\ [a_2^4 \omega_3^2, \omega_2] + [a_3^4(\omega_3^3 - \omega_4^4) - da_3^4 - a_3^1 \omega_1^4, \omega_3] &= a_3^4 D\omega_3. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Cartanschen Lemmas und unter Voraussetzung der Gültigkeit von (3) geben die Gleichungen (5) die Relationen:

$$\begin{aligned} \omega_1^4 &= \varrho_1^4 \omega_1 + \bar{\varrho}_1^4 \omega_4, & \omega_4^1 &= \varrho_4^1 \omega_1 + \bar{\varrho}_4^1 \omega_4, \\ \omega_2^3 &= \sigma_2^3 \omega_2 + \bar{\sigma}_2^3 \omega_3, & \omega_3^2 &= \sigma_3^2 \omega_2 + \bar{\sigma}_3^2 \omega_3, \end{aligned}$$

$$(6) \quad \begin{aligned} a_1^2 da_1^3 - a_1^3 da_1^2 + a_1^2 a_1^3 (\omega_3^3 - \omega_2^2) - (a_1^3)^2 \omega_3^2 + (a_1^2)^2 \omega_2^3 &= H_1 \omega_1 - A_1 \varrho_1^4 \omega_4, \\ a_4^2 da_4^3 - a_4^3 da_4^2 - a_4^2 a_4^3 (\omega_2^2 - \omega_3^3) + (a_4^2)^2 \omega_2^3 - (a_4^3)^2 \omega_3^2 &= A_1 \bar{\varrho}_4^1 \omega_1 + H_4 \omega_4, \\ a_2^1 da_2^4 - a_2^4 da_2^1 + a_2^1 a_2^4 (-\omega_1^1 + \omega_4^4) - (a_2^4)^2 \omega_4^1 + (a_2^1)^2 \omega_1^4 &= \\ &= H_2 \omega_2 - A_2 \sigma_2^3 \omega_3, \\ a_3^1 da_3^4 - a_3^4 da_3^1 + a_3^1 a_3^4 (-\omega_1^1 + \omega_4^4) - (a_3^4)^2 \omega_4^1 + (a_3^1)^2 \omega_1^4 &= \\ &= A_2 \bar{\sigma}_3^2 \omega_2 + H_3 \omega_3. \end{aligned}$$

b) Im Folgenden werden wir immer voraussetzen, daß die Korrespondenz $C : \Gamma_1(p_1) \rightarrow \Gamma_2(p_2)$ torsal ist. Die Erzeugenden jeder Torse $\Omega_1 \subset \Gamma_1$ entsprechen dann den Erzeugenden der Torse $\Omega_2 \subset \Gamma_2$. Dann fallen je zwei Torsalsysteme zusammen.

Wir können also voraussetzen, daß

$$(7) \quad \omega_2 = b_1^2 \omega_1, \quad \omega_3 = b_3^4 \omega_4$$

gilt. b_1^2, b_3^4 sind allgemein die Funktionen der Hauptparameter und der sekundären Parameter.

Bei der Änderung des Parameterpaares $(u, v) \subset A$ bilden die Geraden

$$q_1 = (A_1, A_2), \quad q_2 = (A_4, A_3)$$

das Paar Q der zweiparametrischen Geradenmannigfaltigkeit, d. h. das Paar der Kongruenzen $L_1(q_1), L_2(q_2)$. Es existiert die Korrespondenz $E : L_1(q_1) \rightarrow L_2(q_2)$, wobei die zugeordneten Geraden stets demselben Parameterpaar $(u, v) \subset A$ entsprechen. Die Kleinschen Bilder der Geraden q_1 bilden die Punktmannigfaltigkeit Q_1 , ebenso bilden die Kleinschen Bilder der Geraden q_2 die Punktmannigfaltigkeit Q_2 . Die Verbindungsgeraden m der zum gleichen Wertepaar $(u, v) \subset A$ gehörigen Punkte der Mannigfaltigkeiten Q_1, Q_2 bilden eine Kongruenz. Diese Kongruenz nennt man *Rosenfeldsches Bild des Paares Q* . Der Charakter der Erzeugenden dieser Kongruenz ist im allgemeinen gleich 5.

Mit Hilfe der Gleichungen (2), (6), (7) bekommen wir leicht:

$$(8) \quad \begin{aligned} dq_1 = d(A_1, A_2) &= (\omega_1^1 + \omega_2^2)(A_1, A_2) + \omega_1[\sigma_2^3 b_2^1(A_1, A_3) + a_2^4 b_2^1(A_1, A_4) - \\ &- a_1^3(A_2, A_3) - \varrho_1^4(A_2, A_4)] + \omega_4[\bar{\sigma}_2^3 b_3^4(A_1, A_3) - \\ &- \bar{\varrho}_1^4(A_2, A_4)], \end{aligned}$$

$$dq_2 = d(A_4, A_3) = -(\omega_3^3 + \omega_4^4)(A_3, A_4) + \omega_1[\varrho_4^1(A_1, A_3) - \sigma_3^2 b_2^1(A_2, A_4)] + \\ + \omega_4[\bar{\varrho}_4^1(A_1, A_3) - a_3^1 b_3^4(A_1, A_4) + a_4^2(A_2, A_3) - \\ - \bar{\sigma}_3^2 b_3^4(A_2, A_4)].$$

Der Charakter des Rosenfeldschen Bildes der Kongruenzen $L_1(q_1), L_2(q_2)$ längs der Geraden m ist nur dann kleiner als 5, wenn für das zugehörige Wertepaar $(u, v) \subset \Delta$ die Relation

$$(9) \quad (\varrho_4^1 \bar{\varrho}_1^4 - \sigma_3^2 \bar{\sigma}_2^3 b_2^1 b_3^4)(a_1^3 a_3^1 b_3^4 - a_2^4 a_4^2 b_2^1) = 0$$

gilt. Das folgt aus den Gleichungen (8).

Wir werden nun voraussetzen, daß für ein festes Wertepaar $(u, v) \subset \Delta$ die Relation

$$(10) \quad \varrho_4^1 \bar{\varrho}_1^4 - \sigma_3^2 \bar{\sigma}_2^3 b_2^1 b_3^4 = 0$$

gilt. Betrachten wir das zu den erwähnten Parametern gehörige Geradenpaar q_1, q_2 . Die zur Gleichung $\omega_1 = 0$ gehörige Tangente von Q_1 im Punkte (A_1, A_2) und die zur Gleichung $\omega_4 = 0$ gehörige Tangente von Q_2 im Punkte (A_4, A_3) liegen bei der Gültigkeit von (10) und nur dann in einer Ebene. Die zur Gleichung $\omega_1 = 0$ gehörenden Berührgeraden der Punktmannigfaltigkeit $V_3(L_1)$ in den Punkten der Geraden q_1 bilden die Kongruenz. Ähnlich bilden die Kongruenz die Berührgeraden von $V_3(L_2)$, die zur Gleichung $\omega_4 = 0$ längs q_2 gehören. Bei der Gültigkeit der Gleichung (10) und nur dann gehören beide angeführten Kongruenzen zu einem linearen Komplex.

$$\bar{\sigma}_2^3 b_3^4(A_1, A_3) - \bar{\varrho}_1^4(A_2, A_4)$$

ist das sekundäre Bild dieses Komplexes.

Wir werden nun voraussetzen, daß für ein festes Wertepaar $(u, v) \subset \Delta$ die Relation

$$(11) \quad a_1^3 a_3^1 b_3^4 - a_2^4 a_4^2 b_2^1 = 0$$

gilt. Wir werden die geometrischen Eigenschaften von (11) suchen. Mit R_3 bezeichnen wir den zur Geraden $m = ((A_1, A_2), (A_4, A_3))$ gehörigen Polarraum der Kleinschen Quadrik. Dieser ist durch die Punkte $(A_1, A_3), (A_1, A_4), (A_2, A_3), (A_2, A_4)$ bestimmt. Der Berührraum der Mannigfaltigkeit Q_1 im Punkte (A_1, A_2) schneidet den Raum R_3 in einem linearen Raum 1R . Ähnlich schneidet der Berührraum der Mannigfaltigkeit Q_2 im Punkte (A_4, A_3) den Raum R_3 in einem linearen Raum 2R . Bei der Gültigkeit der Gleichung (11) und nur dann existiert im Kleinschen Raum die Ebene, die die Verbindungsgerade der Punkte $(A_1, A_3), (A_4, A_2)$ und die Räume ${}^1R, {}^2R$ enthält.

Wenn für das feste Wertepaar $(u, v) \subset \Delta$ wenigstens eine der Gleichungen (10), (11) gilt, dann hat die zugehörige Erzeugende m des Rosenfeldschen Bildes des Paares Q der Kongruenzen $L_1(q_1), L_2(q_2)$ im allgemeinen den Charakter 4.

Definition. Wenn für alle Wertepaare $(u, v) \subset \Delta$ die Relation (10) gilt, dann bezeichnen wir das betrachtete Paar mit PD . Wenn für alle Wertepaare $(u, v) \subset \Delta$ die Relation (11) gilt, dann bezeichnen wir das Paar P mit PT .

Bemerkung. Untersuchen wir nun den Fall, daß die Punktmannigfaltigkeit Q_1 in eine Kurve zerfällt. Dann zerfällt die Kongruenz $L_1(q_1)$ in eine Regelfläche. Nach (8) gilt dann:

$$(12) \quad a_1^3 = 0, \quad a_2^4 = 0,$$

$$(13) \quad \sigma_2^3 \bar{q}_1^4 b_2^1 - \bar{\sigma}_2^3 q_1^4 b_3^4 = 0.$$

Jede Ebene α_1 geht durch den zugehörigen Punkt A_2 , jede Ebene α_2 geht durch den zugehörigen Punkt A_1 . Auf den Flächen $(A_1), (A_2)$ betrachten wir die Linien $\omega_1^4 = 0$. Das Kleinsche Bild aller Tangenten jeder dieser Linien ist ein Punkt auf der Kleinschen Quadrik. Aus den Gleichungen (2), (13) folgt dann, daß diese Linien die Geraden q_1 sind. Die Flächen $(A_1), (A_2)$ gehören dann zu einer Regelfläche.

c) Wir werden nun einige Eigenschaften der Ebenen $\alpha_i, i = 1, 2, 3, 4$, betrachten. Es gilt:

$$(14) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= -a_1^2(A_1, A_2, A_4) - a_1^3(A_1, A_3, A_4), \\ \alpha_2 &= a_2^1(A_1, A_2, A_3) + a_2^4(A_2, A_3, A_4), \\ \alpha_3 &= -a_3^1(A_1, A_2, A_3) - a_3^4(A_2, A_3, A_4), \\ \alpha_4 &= a_4^2(A_1, A_2, A_4) + a_4^3(A_1, A_3, A_4). \end{aligned}$$

P_3^* sei der zum P_3 duale Raum. In diesem Raume untersuchen wir das Koordinatentetraeder mit den Ecken $\alpha_i, i = 1, 2, 3, 4$. Für die infinitesimale Verrückung des Tetraders gilt dann:

$$(15) \quad d\alpha_i = \Omega_i^k \alpha_k; \quad i, k = 1, 2, 3, 4.$$

Mit Hilfe der Gleichungen (14), (15), (2) bekommen wir nach einer längeren Berechnung:

$$(16) \quad \begin{aligned} -\Omega_1^2 A_2 &= a_3^4 \omega_4 A_1, & -\Omega_1^3 A_2 &= a_2^4 \omega_4 A_1, \\ -\Omega_2^1 A_1 &= a_4^3 \omega_3 A_2, & -\Omega_2^3 A_2 &= H_2 \omega_2 - A_2 \sigma_2^3 \omega_3, \\ -\Omega_3^1 A_1 &= a_4^2 \omega_2 A_2, & \Omega_3^2 A_2 &= H_3 \omega_3 + A_2 \bar{\sigma}_3^2 \omega_2, \\ \Omega_4^1 A_1 &= A_1 \bar{q}_4^1 \omega_1 + H_4 \omega_4, & -\Omega_4^2 A_2 &= a_3^1 A_1 \omega_1, \\ & & -\Omega_1^4 A_1 &= H_1 \omega_1 - A_1 q_1^4 \omega_4, \\ & & -\Omega_2^4 A_1 &= a_1^3 \omega_3 A_2, \\ & & -\Omega_3^4 A_1 &= a_1^2 \omega_2 A_2, \\ & & -\Omega_4^3 A_2 &= a_2^1 A_1 \omega_1. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun das Paar Q^* der Kongruenzen

$$L_1^* = (\alpha_1, \alpha_2), \quad L_2^* = (\alpha_4, \alpha_3).$$

Aus den Gleichungen (15), (16) folgt leicht:

$$(17) \quad \begin{aligned} d(\alpha_1, \alpha_2) &= \omega_1 \left[-\frac{1}{\Delta_2} H_2 b_2^1(\alpha_1, \alpha_3) + \frac{1}{\Delta_1} H_1(\alpha_2, \alpha_4) \right] + \\ &\quad + \omega_4 \left[+\sigma_2^3 b_3^4(\alpha_1, \alpha_3) - \frac{\Delta_2}{\Delta_1} a_1^3 b_3^4(\alpha_1, \alpha_4) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} a_2^4(\alpha_2, \alpha_3) - \varrho_1^4(\alpha_2, \alpha_4) \right] + E_1(\alpha_1, \alpha_4). \\ -d(\alpha_4, \alpha_3) &= \omega_1 \left[-\bar{\varrho}_4^1(\alpha_1, \alpha_3) - a_4^2 \frac{\Delta_2}{\Delta_1} b_2^1(\alpha_1, \alpha_4) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} a_3^1(\alpha_2, \alpha_3) + \bar{\sigma}_3^2 b_2^1(\alpha_2, \alpha_4) \right] + \\ &\quad + \omega_4 \left[-\frac{1}{\Delta_1} H_4(\alpha_1, \alpha_3) + \frac{1}{\Delta_2} H_3 b_3^4(\alpha_2, \alpha_4) \right] + E_2(\alpha_3, \alpha_4). \end{aligned}$$

Die Koeffizienten E_1, E_2 gebrauchen wir im Folgenden nicht.

Untersuchen wir den Fall, daß der Charakter des Rosenfeldschen Bildes des Paares Q^* kleiner als 5 ist.

Mit Hilfe der Gleichungen (17) bekommen wir folgende Bedingung:

$$(18) \quad \left[\frac{1}{(\Delta_2)^2} H_2 H_3 b_2^1 b_3^4 - \frac{1}{(\Delta_1)^2} H_1 H_4 \right] (a_1^3 a_3^1 b_3^4 - a_2^4 a_4^2 b_2^1) = 0.$$

Satz 1. Wenn P das Paar PT ist, dann sind die Charaktere der beiden einander entsprechenden Paare Q, Q^* kleiner als 5.

Beweis. Die Behauptung des Satzes folgt aus den Gleichungen (9), (18).

Bemerkung. Die durch α_1 gebildete Mannigfaltigkeit (α_1) zerfällt nur in dem Falle, wenn $H_1 = 0$ gilt. Das folgt aus den Gleichungen (16), (3). Ähnliche Sätze bekommt man für die Mannigfaltigkeiten $(\alpha_2), (\alpha_3), (\alpha_4)$.

d) Im Folgenden werden wir die Punktabwicklung der Kongruenzen Γ_1, Γ_2

betrachten. Wir wählen ein neues Koordinatensystem mit den Eckpunkten $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3, \tilde{A}_4$.

$$(19) \quad \begin{aligned} \tilde{A}_1 &= A_1, & \tilde{A}_4 &= A_4, \\ \tilde{A}_2 &= a_1^2 A_2 + a_1^3 A_3 + \varrho_1^4 A_4, \\ \tilde{A}_3 &= a_4^2 A_2 + a_4^3 A_3 + \bar{\varrho}_4^1 A_1. \end{aligned}$$

Der Punkt \tilde{A}_2 liegt immer auf der zur Gleichung $\omega_4 = 0$ gehörigen Tangente der Fläche (A_1), ebenso liegt der Punkt \tilde{A}_3 immer auf der zur Gleichung $\omega_1 = 0$ gehörigen Tangente der Fläche (A_4).

Wenn wir mit $\tilde{\omega}_i^k$ die Komponenten der differentiellen Verrückung des Tetraeders bezeichnen, dann gilt:

$$(20) \quad d\tilde{A}_i = \tilde{\omega}_i^k \tilde{A}_k; \quad i, k = 1, 2, 3, 4.$$

Aus den Gleichungen (19), (20) folgt dann:

$$(21) \quad \begin{aligned} \tilde{\omega}_1^1 &= \omega_1^1, & \tilde{\omega}_1^2 &= \omega_1, & \tilde{\omega}_1^3 &= 0, & \tilde{\omega}_1^4 &= \bar{\varrho}_1^4 \omega_4, \\ \tilde{\omega}_4^1 &= \varrho_4^1 \omega_1, & \tilde{\omega}_4^2 &= 0, & \tilde{\omega}_4^3 &= \omega_4, & \tilde{\omega}_4^4 &= \omega_4^4. \end{aligned}$$

Wir wählen ein weiteres Koordinatensystem mit den Eckpunkten $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{A}_4$.

$$(22) \quad \begin{aligned} \hat{A}_2 &= A_2, & \hat{A}_3 &= A_3, \\ \hat{A}_1 &= a_2^1 A_1 + a_2^4 A_4 + \sigma_2^3 A_3, \\ \hat{A}_4 &= a_3^1 A_1 + a_3^4 A_4 + \bar{\sigma}_3^2 A_2. \end{aligned}$$

Die Wahl der Koordinateneckpunkte ist ähnlich wie in den Gleichungen (19).

Mit $\hat{\omega}_i^k$, $i, k = 1, 2, 3, 4$, bezeichnen wir die Komponenten der differentiellen Verrückung des Tetraeders, es gilt dann:

$$(23) \quad d\hat{A}_i = \hat{\omega}_i^k \hat{A}_k; \quad i, k = 1, 2, 3, 4.$$

Daraus folgt:

$$(24) \quad \begin{aligned} \hat{\omega}_2^1 &= \omega_2, & \hat{\omega}_2^2 &= \omega_2^2, & \hat{\omega}_2^3 &= \bar{\sigma}_2^3 \omega_3, & \hat{\omega}_2^4 &= 0, \\ \hat{\omega}_3^1 &= 0, & \hat{\omega}_3^2 &= \sigma_3^2 \omega_2, & \hat{\omega}_3^3 &= \omega_3^3, & \hat{\omega}_3^4 &= \omega_3. \end{aligned}$$

Satz 2. Die Korrespondenz C ist genau dann die Punktabwicklung der Kongruenzen Γ_1, Γ_2 , wenn Γ_1, Γ_2 ein PD-Paar bilden.

Beweis. Zu jedem Geradenpaare p_1, p_2 knüpfen wir die Kollineation $\pi: p_1 \rightarrow p_2$ durch die Relationen:

$$\pi \tilde{A}_1 = \tau_1 \hat{A}_2 + \bar{\tau}_1 \hat{A}_3, \quad \pi \tilde{A}_4 = \bar{\tau}_4 \hat{A}_2 + \tau_4 \hat{A}_3, \quad \tau_1 \tau_4 - \bar{\tau}_1 \bar{\tau}_4 \neq 0$$

an. Alle diese Kollineationen bilden die Korrespondenz $C^b : V_3(\Gamma_1) \rightarrow V_3(\Gamma_2)$. Für jedes Wertepaar $(u, v) \in \Delta$ bilden wir die Kollineation $K(u, v) : P_3 \rightarrow P_3$ durch folgende Gleichungen:

$$(25) \quad \begin{aligned} K\tilde{A}_1 &= \tau_1\hat{A}_2 + \bar{\tau}_1\hat{A}_3, & K\tilde{A}_4 &= \bar{\tau}_4\hat{A}_2 + \tau_4\hat{A}_3, \\ K\tilde{A}_2 &= c_{21}\hat{A}_1 + c_{22}\hat{A}_2 + c_{23}\hat{A}_3 + c_{24}\hat{A}_4, \\ K\tilde{A}_3 &= c_{31}\hat{A}_1 + c_{32}\hat{A}_2 + c_{33}\hat{A}_3 + c_{34}\hat{A}_4, & c_{21}c_{34} - c_{31}c_{24} &\neq 0. \end{aligned}$$

C ist gerade dann die Punktabwicklung (ŠVEC [3], S. 14), wenn man zur C^b für jedes Wertepaar $(u, v) \in \Delta$ die Kollineation $K(u, v)$ mit folgenden Eigenschaften finden kann: Sei $A \in p_1(u, v)$, $A = x_1\tilde{A}_1 + x_4\tilde{A}_4$ der beliebige Punkt und γ die durch ihn gehende beliebige Kurve von $V_3(\Gamma_1)$, dann haben die Kurven $C^b\gamma$, $K(u, v)\gamma$ die analytische Berührung erster Ordnung im Punkte C^bA . Es gilt:

$$K dA = d(C^bA) + \Theta C^bA \quad (\Theta \text{ ist die Pfaffsche Form}).$$

Mit Hilfe der Gleichungen (19), (21), (22), (24) bekommen wir folgende Bedingungen für die Punktabwicklung:

$$(26a) \quad \begin{aligned} c_{31} = c_{24} = 0, \quad c_{21} = \tau_1 b_2^1, \quad c_{34} = \tau_4 b_3^4, \quad c_{23} = c_{32} = 0, \\ \bar{\tau}_1 = \bar{\tau}_4 = 0, \end{aligned}$$

$$(26b) \quad \varrho_4^1 \tau_1 - \sigma_3^2 \tau_4 b_2^1 = 0, \quad -\bar{\sigma}_2^3 \tau_1 b_3^4 + \bar{\varrho}_1^4 \tau_4 = 0,$$

$$(26c) \quad \begin{aligned} \tau_1 \tau_4 (\omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_4^4) + \tau_4 c_{22} \omega_1 - \tau_1 c_{33} \omega_4 - \\ - \tau_4 d\tau_1 + \tau_1 d\tau_4 = 0. \end{aligned}$$

Die nichttriviale Lösung der Gleichungen (26b) für die Unbekannten τ_1, τ_4 existiert nur dann, wenn (10) gilt. Aus den Gleichungen (21), (24), (26b) bekommen wir dann:

$$\tau_1 \tilde{\omega}_4^1 = \tau_4 \hat{\omega}_3^2.$$

Durch die äußere Differentiation und mit Hilfe des Cartanschen Lemmas folgt, daß

$$\tau_1 \tau_4 (\omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_4^4) - \tau_4 d\tau_1 + \tau_1 d\tau_4$$

die Hauptform ist. Aus den Gleichungen (26c) bekommen wir dann die Größen c_{22}, c_{33} .

Satz 3. Wenn $C : \Gamma_1(p_1) \rightarrow \Gamma_2(p_2)$ die Ebeneabwicklung der Kongruenzen Γ_1, Γ_2 ist, dann ist der Charakter des Rosenfeldschen Bildes des Paares Q^* kleiner als 5.

Der Beweis des Satzes ist ähnlich wie im Satze 2. Man muß aus den Gleichungen (14) ausgehen. Die notwendige und hinreichende Bedingung der Ebeneabwicklung

der Kongruenzen Γ_1, Γ_2 ist die Gültigkeit der Relation:

$$\frac{1}{(A_2)^2} H_2 H_3 b_2^1 b_3^4 - \frac{1}{(A_1)^2} H_1 H_4 = 0.$$

Wenn $C : \Gamma_1(p_1) \rightarrow \Gamma_2(p_2)$ die projektive Abwicklung des zweiten Grades ist, dann sind die Charaktere der Rosenfeldschen Bilder der Paare Q, Q^* kleiner als 5. Das folgt aus den Sätzen 2, 3.

Literaturverzeichnis

- [1] С. П. Фиников: Теория пар конгруэнций, Москва 1956.
- [2] Е. Т. Ивлев: Канонический репер пары конгруэнций в трехмерном проективном пространстве, Труды гос. унив. Томск 160, 1, 15—24 (1962).
- [3] A. Švec: Projective differential geometry of line congruences, Praha 1965.
- [4] J. Vala: Über die Torsalsysteme des Kongruenzenpaares (im Druck).

Anschrift des Verfassers: Brno, Barvičova 85, ČSSR (Vysoké učení technické).