Jan Voráček
Über eine nichtlineare Differentialgleichung dritter Ordnung

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 20 (1970), No. 2, 207–219

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100961

Czechoslovak Mathematical Journal, 20 (95) 1970, Praha

ÜBER EINE NICHTLINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNG DRITTER ORDNUNG

JAN VORÁČEK, Olomouc

(Eingelangt am 20. November 1968)

In dieser Mitteilung werden wir einige Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung (Dgl.)

$$x''' + f(x'') + g(x)\,x' + h(x) = e(t) \tag{1}$$

studieren. In (1) seien die Funktionen f, g, h, e stetig für alle Werte ihrer Argumente. Wir führen weiter folgende Voraussetzungen über diese Funktionen ein:

$$\frac{f(z)}{z} \geqq \alpha > 0 \quad \text{für alle} \quad z \neq 0\,, \quad f(0) = 0\,, \tag{2}$$

$$0 < \varepsilon \leqq g(x) < g \quad \text{für alle} \quad x\,, \tag{3}$$

$$|h(x)| \leqq H \quad \text{für alle} \quad x\,, \tag{4}$$

$$|e(t)| \leqq E \quad \text{für alle} \quad t\,. \tag{5}$$

Außerdem benutzen wir die Bezeichnungen $F = \max_{|z| \leqq 1} |f(z)|$, $G(x) = \int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s$; t_0 soll eine reelle Zahl bedeuten.

Lemma 1. *Die Voraussetzungen* (2), (3), (4), (5) *seien erfüllt und das maximale rechte Existenzintervall der Lösung* $x(t)$ *der* Dgl. (1) *sei* $\langle t_0, T)$. *Dann gilt*

$$\liminf_{t \to T-} |x'(t)| \leqq \frac{1}{\varepsilon}(F + H + E + 1) = M\,. \tag{6}$$

Beweis. Wir setzen voraus, daß (6) nicht richtig ist, d. h. daß ein $t_1 \in \langle t_0, T)$ existiert so daß $|x'(t)| > M$ auf $\langle t_1, T)$ ist. In diesem Falle gibt es drei Möglichkeiten:

a) $|x''(t)| \geqq 1$ auf $\langle t_1, T)$,

b) $|x''(t)| \leqq 1$ auf $\langle t_1, T)$,

c) in jedem Intervalle $\langle t, T)$ mit $t_1 \leqq t < T$ gibt es Punkte t', t'' so, daß $|x''(t')| > 1$, $|x''(t'')| < 1$.

a) Es sei z. B. $x''(t) \geqq 1$, $x'(t) > M$ auf $\langle t_1, T)$. Die Dgl. (1) schreiben wir in der Form

$$x''' = -f(x'') - g(x)\, x' - h(x) + e(t)\,. \tag{7}$$

Daraus bekommen wir mit Hilfe von (2), (4), (5) die Ungleichheit

$$x''' \leqq -\alpha x'' - g(x)\, x' + H + E\,. \tag{8}$$

Aus $x'(t) > M$ und aus (3) folgt $-g(x)\, x' \leqq -\varepsilon x' < -\varepsilon M$ und dadurch geht schließlich aus (8) die Ungleichheit

$$x''' < -\alpha x'' - \varepsilon M + H + E \tag{9}$$

hervor. Aus (9) ist nun ersichtlich, daß für $x'' \geqq (H + E)/\alpha + 1$ auch $x''' \leqq -\varepsilon M - \alpha$ sein muß, d. h. mit $X_2 = \max\left(x''(t_1), (H + E)/\alpha + 1\right)$ die Relationen

$$x''(t) \leqq X_2 \quad \text{auf} \quad \langle t_1, T)\,, \quad \liminf_{t \to T-} x''(t) \geqq 1 \tag{10}$$

gelten. Wenn wir also noch $x'(t_1) = X_1$, $x(t_1) = X_0$ setzen, so bekommen wir aus (10) und aus dem Mittelwertsatz

$$x'(t) \leqq X_1 + X_2(T - t)\,, \tag{11}$$

$$|x(t)| \leqq |X_0| + [X_1 + X_2(T - t)]\,(T - t) \tag{12}$$

für alle $t \in \langle t_1, T)$. Wäre also $T < +\infty$, so könnte keine der Relationen

$$\limsup_{t \to T-} |x(t)| = +\infty\,, \quad \limsup_{t \to T-} |x'(t)| = +\infty\,, \quad \limsup_{t \to T-} |x''(t)| = +\infty$$

gelten; laut Existenzsatz für Systeme von Dgln. (vgl. z. B. [1], S. 135, Satz 2) muß also $T = +\infty$ sein. Von der Voraussetzung $x''(t) \geqq 1$ folgt dann

$$\lim_{t \to +\infty} x'(t) = \lim_{t \to +\infty} x(t) = +\infty \tag{13}$$

und da $f(x''(t)) > 0$ ist, so bekommen wir aus (7), (3), (4), (5) auch die Relation

$$\lim_{t \to +\infty} x'''(t) = -\infty\,,$$

die aber der Voraussetzung $x''(t) \geqq 1$ auf $\langle t_1, +\infty)$ widerspricht.

Wenn auf $\langle t_1, T)$ die Ungleichheiten $x''(t) \geqq 1$, $x'(t) < -M$ gelten, so muß auf diesem Intervalle $x'(t) > x'(t_1)$ für $t > t_1$ sein und deshalb (vgl. (3)) $g(x)\,x' \geqq \geqq gx' > g\,x'(t_1)$ für diese t. Aus (7) haben wir also mit Hilfe von (2), (4), (5)

$$x''' < -\alpha x'' - gx'(t_1) + H + E \quad (t \in (t_1, T)) . \tag{14}$$

Daraus

$$\limsup_{t \to T-} x''(t) \leqq \max\left(\frac{1}{\alpha}(H + E - g\,x'(t_1) + 1, x''(t_1)\right), \quad \liminf_{t \to T-} x''(t) \geqq 1$$

und ähnlich wie vorher folgern wir hiervon $T = +\infty$ und $\lim_{t \to +\infty} x'(t) = +\infty$, was bereits im Widerspruch zu der Voraussetzung $x'(t) < -M$ steht.

Auch im Falle $x''(t) \leqq -1$, $x'(t) < -M$ bzw. $x'(t) > M$ auf $\langle t_1, T)$ kann man ähnlich schließen; nur anstatt (9) bzw. (14) ziehen wir die Ungleichheiten

$$x''' > -\alpha x'' + \varepsilon M - H - E$$

bzw.

$$x''' < -\alpha x'' - g\,x'(t_1) - H - E$$

in Betracht.

b) Auf dieselbe Weise wie oben sehen wir zunächst, daß $T = +\infty$ sein muß und wegen der Beschränktheit von $x''(t)$ muß auch $\liminf_{t \to +\infty} |x'''(t)| = 0$ gelten. Nehmen wir nun ein $\tau \in \langle t_1, +\infty)$ mit der Eigenschaft $|x'''(\tau)| < 1$, so folgt in diesem Falle aus (1), (3), (4), (5) und aus den Definitionen von M und F die unrichtige Beziehung

$$E < \varepsilon|x'| - (1 + F + H) \leqq g(x)\,x' - (|x'''| + f(x'') + |h(x)|) \leqq$$
$$\leqq |x''' + f(x'') + g(x)\,x' + h(x)| \leqq E .$$

c) Wir zeigen zuerst, daß im Intervalle $\langle t_1, T)$ ein τ_r und ein τ_s so existieren müssen daß $|x''(\tau_r)| \leqq 1$, $x'''(\tau_r) \leqq 0$ und $|x''(\tau_s)| \leqq 1$, $x'''(\tau_s) \geqq 0$ ist. Es gibt nämlich einen Punkt $t^{(1)} \in \langle t_1, T)$ so daß $|x''(t^{(1)})| < 1$ ist, einen Punkt $t^{(2)} \in (t^{(1)}, T)$ so daß $|x''(t^{(2)})| > 1$ ist und schließlich einen Punkt $t^{(3)} \in (t^{(2)}, T)$ so daß $|x''(t^{(3)})| < 1$ ist. Aus der Stetigkeit von $x''(t)$ auf $\langle t_1, T)$ folgt die Existenz eines Intervalls $I = (t_1^{(2)}, t_2^{(2)})$, $t^{(1)} < t_1^{(2)} < t^{(2)} < t_2^{(2)} < t^{(3)} < T$ so daß $|x''(t)| > 1$ auf I bleibt und $|x''(t_1^{(2)})| = |x''(t_2^{(2)})| = 1$ gilt. Ist $x'''(t_1^{(2)}) = 0$, so können wir einfach $\tau_r = \tau_s = t_1^{(2)}$ setzen. Anderenfalls muß es $x'''(t_1^{(2)}) < 0$ ($x'''(t_1^{(2)}) > 0$) gelten. Dann ist natürlich $x''(t^{(2)}) < -1$ ($x''(t^{(2)}) > 1$) und also auch $x'''(t_2^{(2)}) \geqq 0$ ($x'''(t_2^{(2)}) \leqq 0$). In diesem Falle setzen wir $\tau_r = t_1^{(2)}$, $\tau_s = t_2^{(2)}$ ($\tau_r = t_2^{(2)}$, $\tau_s = t_1^{(2)}$).

Es sei jetzt $x'(t) > M$ auf $\langle t_1, T)$. Für $t = \tau_s$ bekommen wir dann aus (4), aus der Definition von F, (3) und (6) (Definition von M)

$$x''' + f(x'') + g(x)\,x' + h(x) \geqq g(x)\,x' - F - H > \varepsilon M - F - H > E ,$$

was im Widerspruch mit (5) ist. Ganz analog für $x'(t) < -M$ auf $\langle t_1, T)$ bekommen wir die widersprüchliche Ungleichheit

$$x''' + f(x'') + g(x)\,x' + h(x) \leqq g(x)\,x' + F + H < -\varepsilon M + F + H < -E\,.$$

Damit ist Lemma 1 bewiesen.

Lemma 2. *Die Voraussetzungen des Lemmas* 1 *seien erfüllt und es gelte noch*

$$\left|\int_0^t e(s)\,\mathrm{d}s\right| \leqq E \quad \text{für alle} \quad t\,. \tag{15}$$

Wenn (θ_i, θ_{i+1}) *ein solches Intervall ist, daß* $|x'(t)| > M + 1$ *auf* (θ_i, θ_{i+1}) *und* $|x'(\theta_i)| = |x'(\theta_{i+1})| = M + 1$ *gilt, so sind auf* $\langle\theta_i, \theta_{i+1}\rangle$ *folgende Abschätzungen richtig*:

a) *Für* $x'(t) \geqq M + 1$

$$M + 1 \leqq x'(t) \leqq \leqq M + 1 + \frac{1}{\alpha}\left(x''(\theta_i) + 2E\right) = C_{\theta_i}\,, \tag{16}$$

$$x''(\theta_i) \geqq x''(t) \geqq -\frac{1}{\alpha}\left(gC_{\theta_i} + H + E\right). \tag{17}$$

b) *Für* $x'(t) \leqq -M - 1$

$$-M - 1 \geqq x'(t) \geqq -M - 1 + \frac{1}{\alpha}\left(x''(\theta_i) - 2E\right) = C'_{\theta_i}\,, \tag{18}$$

$$x''(\theta_i) \leqq x''(t) \leqq -\frac{1}{\alpha}\left(gC'_{\theta_i} - H - E\right). \tag{19}$$

Beweis. Wir werden zuerst den Fall a) betrachten. Es ist leicht einzusehen, daß in dem betrachteten Intervalle die Funktion $x'(t)$ genau ein Maximum besitzt. Für $x'' \geqq 0$ bekommen wir nämlich, ähnlich wie wir (9) gefunden haben, die Ungleichheit

$$x''' < -\varepsilon(M + 1) + H + E < 0\,. \tag{9'}$$

Den Punkt des Maximums von $x'(t)$ in (θ_i, θ_{i+1}) wollen wir durch λ_i bezeichnen. Wenn wir die Dgl. (1) zwischen den Grenzen θ_i, λ_i integrieren, so bekommen wir $(x''(\lambda_i) = 0)$

$$-x''(\theta_i) + \int_{\theta_i}^{\lambda_i} f(x''(t))\,\mathrm{d}t + G(x(\lambda_i)) - G(x(\theta_i)) + \int_{\theta_i}^{\lambda_i} h(x(t))\,\mathrm{d}t = \int_{\theta_i}^{\lambda_i} e(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{20}$$

Auf $\langle\theta_i, \lambda_i)$ muß auch $x''(t) > 0$ gelten; daher folgt aus (20) mit Hilfe von (2) und (15)

$$\begin{aligned}(21)\qquad \alpha[x'(\lambda_i) - x'(\theta_i)] &\leqq \int_{\theta_i}^{\lambda_i} f(x''(t))\,\mathrm{d}t \leqq x''(\theta_i) - \\ &- [G(x(\lambda_i)) - G(x(\theta_i))] - \int_{\theta_i}^{\lambda_i} h(x(t))\,\mathrm{d}t + 2E\,.\end{aligned}$$

Wegen der Ungleichheit $x'(t) \geqq M + 1$, die auch auf $\langle\theta_i, \lambda_i\rangle$ erfüllt ist, bekommen wir aus (3)

$$(22)\qquad G(x(\lambda_i)) - G(x(\theta_i)) = \int_{\theta_i}^{\lambda_i} g(x)\,x'\,\mathrm{d}t \geqq \varepsilon(M + 1)(\lambda_i - \theta_i)\,.$$

Schließlich bekommen wir aus (4)

$$(23)\qquad \left|\int_{\theta_i}^{\lambda_i} h(x(t))\,\mathrm{d}t\right| \leqq H(\lambda_i - \theta_i)\,.$$

Aus (22) und (23) folgt

$$- [G(x(\lambda_i)) - G(x(\theta_i))] - \int_{\theta_i}^{\lambda_i} h(x(t))\,\mathrm{d}t < 0$$

und damit aus (21) (es ist $x'(\theta_i) = M + 1$)

$$\alpha\,x'(\theta_i) \leqq \alpha(M + 1) + x''(\theta_i) + 2E\,.$$

Wegen der Bedeutung von λ_i müssen also auf $\langle\theta_i, \theta_{i+1}\rangle$ die Ungleichheiten

$$M + 1 \leqq x'(t) \leqq M + 1 + \frac{1}{\alpha}(x''(\theta_i) + 2E) = C_{\theta_i}$$

gelten, d. h. (16).

Aus (7) folgt mit Hilfe von (4), (5)

$$(24)\qquad x''' \geqq -f(x'') - g(x)\,x' - H - E\,.$$

Infolge (16) und (3) besteht auf $\langle\lambda_i, \theta_{i+1}\rangle$ die Ungleichheit $-g(x)\,x' \geqq -gC_{\theta_i}$ und da auf diesem Intervalle $x''(t) \leqq 0$ ist, bekommen wir aus (2) $-f(x'') \geqq -\alpha x''$. So erhalten wir aus (24)

$$x''' \geqq -\alpha x'' - gC_{\theta_i} - H - E$$

und daraus sehen wir, daß für $x'' < -(gC_{\theta_i} + H + E)/\alpha$ $x''' > 0$ sein muß. Hiervon folgen bereits für $x''(t)$ auf $\langle\theta_i, \theta_{i+1}\rangle$ die Ungleichheiten

$$x''(\theta_i) \geqq x''(t) \geqq -\frac{1}{\alpha}(gC_{\theta_i} + H + E),$$

d. h. (17).

Im Falle b) sind die Betrachtungen ganz analog; wir benutzen hier die Existenz genau eines Punktes des Minimums von $x'(t)$ in (θ_i, θ_{i+1}). Diesen Punkt wollen wir ebenso durch λ_i bezeichnen.

Bemerkung 1. Im Beweise von Lemma 2 haben wir auch folgendes gesehen: wenn die Voraussetzungen des Lemmas 2 erfüllt sind, so besitzt $x''(t)$ auf $\langle\theta_i, \theta_{i+1}\rangle$ genau einen Nullpunkt λ_i. Auf $\langle\theta_i, \lambda_i)$ gilt $\operatorname{sgn} x'''(t) \operatorname{sgn} x''(t) \leqq 0$ und $x''^2(t)$ und $|x''(t)|$ sind daher auf diesem Intervall monotone nicht wachsende Funktionen.

Lemma 3. *Wenn die Voraussetzungen des Lemmas 2 erfüllt sind, so gilt (wir behalten die Bezeichnungen aus dem Beweise dieses Lemmas) auf $\langle\theta_i, \lambda_i\rangle$ die Ungleichheit*

$$g(x)\, x'x'' \geqq 0 \tag{25}$$

und auf $\langle\lambda_i, \theta_{i+1}\rangle$

a) *für $x'(t) \geqq M + 1$ die Ungleichheit*

$$0 \geqq g(x)\, x'x'' \geqq -\frac{g^2}{\alpha^3} x''^2(\theta_i) + A_1\, x''(\theta_i) + B_1\,, \tag{26}$$

b) *für $x'(t) \leqq -M - 1$ die Ungleichheit*

$$0 \geqq g(x)\, x'x'' \geqq -\frac{g^2}{\alpha^3} x''^2(\theta_i) + A_2\, x''(\theta_i) + B_2\,, \tag{27}$$

wo A_1, B_1, A_2, B_2 Konstanten sind, die nur von M, E, α, g, H abhängen.

Beweis. Aus dem Beweise des Lemmas 2 wissen wir, daß auf $\langle\theta_i, \lambda_i\rangle$ $x'(t)\, x''(t) \geqq 0$ ist, so daß (25) (vgl. (3)) offensichtlich richtig ist. Auf $\langle\lambda_i, \theta_{i+1}\rangle$ haben wir im Falle a) mit Hilfe von (3), (16), (17) (es gilt auch $x'(t)\, x''(t) \leqq 0$)

$$0 \geqq g(x)\, x'x'' \geqq -gC_{\theta_i}\frac{1}{\alpha}(gC_{\theta_i} + H + E)\,. \tag{28}$$

Wenn wir für C_{θ_i} den Ausdruck aus (16) einsetzen, sehen wir sofort, daß (28) in der Form (26) geschrieben werden kann.

Ganz ähnlich haben wir im Falle b) infolge (3), (18), (19)

$$0 \geqq g(x)\,x'x'' \geqq -gC'_{\theta_i}\frac{1}{\alpha}\left(gC'_{\theta_i} - H - E\right) = -\frac{g^2}{\alpha^3}\,x''^2(\theta_i) + A_2\,x''(\theta_i) + B_2\,,$$

womit alles bewiesen ist.

Im Folgenden werden wir einige Konstanten gebrauchen, die nur von M, E, α, g, H abhängen. Es handelt sich um diese Konstanten

$$(29)\qquad A = \max\left(|A_1|, |A_2|\right) + \frac{g}{\alpha^2}(H + E)\,,$$

$$(30)\qquad B = \max\left(|B_1|, |B_2|\right) + \frac{1}{\alpha}(H + E)\,g(M + 1) + \frac{2gE}{\alpha}\,,$$

$$(31)\qquad K = \max\left[ZB, \frac{\alpha^3(Z^2A + 1)}{\alpha^4 - Z^2g^2}, \frac{1}{\alpha}\left[g(M + 1) + H + E\right] + 1\right],$$

wo Z eine Zahl bedeutet, deren Wahl unten beschrieben wird.

Lemma 4. *Die Voraussetzungen von Lemma* 3 *seien erfüllt und es sei weiter*

$$(32)\qquad \alpha^2 > g\,.$$

Wir legen eine Zahl $Z > 1$ fest, welche die Ungleichheit $\alpha^2 - Zg > 0$ erfüllt und benutzen wieder die Bezeichnungen aus den vorigen zwei Lemmas. Wenn $|x''(\theta_i)| \geqq ZK$ ist, so gilt die Relation

$$(33)\qquad |x''(t)| \leqq \frac{1}{Z}\,|x''(\theta_i)|$$

für alle $t \in \langle \lambda_i, \theta_{i+1})$.

Beweis. Wir betrachten die Funktion $\frac{1}{2}x''^2(t)$. Deren Ableitung ist (vgl. (1))

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\,x''^2(t) = x''(t)\,x'''(t) = -f(x'')\,x'' - g(x)\,x'x'' - \left(h(x) + e(t)\right)x''\,.$$

Mittels (2), (4), (5) bekommen wir weiter

$$(34)\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\,x''^2(t) \leqq -\alpha\,x''^2(t) - g(x)\,x'x'' + (H + E)\,|x''|\,.$$

Auf $\langle \lambda_i, \theta_{i+1}\rangle$ folgt dann aus (26) bzw. (27), (17) bzw. (19) und aus den Definitionen (29), (30) der Zahlen A, B die Ungleichheit

$$(35)\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\,x''^2(t) \leqq -\alpha\,x''^2(t) + \frac{g^2}{\alpha^3}\,x''^2(\theta_i) + A|x''(\theta_i)| + B\,.$$

Wenn es ein $t \in \langle \lambda_i, \theta_{i+1} \rangle$ gibt so daß $|x''(t)|\, Z \geqq |x''(\theta_i)|$ ist, dann folgt aus (35) weiter

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}x''^2(t) \leqq \left(-\frac{\alpha}{Z^2} + \frac{g^2}{\alpha^3}\right) x''^2(\theta_i) + A|x''(\theta_i)| + B \leqq \tag{36}$$

$$\leqq \frac{Z^2 g^2 - \alpha^4}{Z^2 \alpha^3}\, x''^2(\theta_i) + \left(A + \frac{1}{Z^2}\right) |x''(\theta_i)|$$

(die letzte Abschätzung bekommen wir aus der Relation $|x''(\theta_i)| \geqq ZK \geqq Z^2 B$).

Aus (36) geht schließlich (wenn wir die Definition (31) der Konstante K in Auge fassen)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}x''^2(t) \leqq -|x''(\theta_i)| \left[\frac{\alpha^4 - Z^2 g^2}{Z^2 \alpha^3} |x''(\theta_i)| - \left(A + \frac{1}{Z^2}\right)\right] \leqq 0 \tag{37}$$

hervor. Weil $x''(\lambda_i) = 0$ ist, sehen wir leicht aus (37), daß auf $\langle \lambda_i, \theta_{i+1} \rangle$ (33) gelten muß. Damit ist alles bewiesen.

Lemma 5. *$x(t)$ sei eine Lösung der Dgl. (1). θ_s $(s = 1, 2, \ldots)$ sei eine wachsende Folge, die nur aus Zahlen des Intervalls $\langle t_0, T)$ besteht und folgende Eigenschaften hat:*

(i) *auf $(\theta_{2s-1}, \theta_{2s})$ $(s = 1, 2, \ldots)$ ist $|x'(t)| > M + 1$,*
(ii) *$|x'(\theta_s)| = M + 1$ $(s = 1, 2, \ldots)$,*
(iii) *auf $\langle \theta_{2s}, \theta_{2s+1} \rangle$ ist $|x'(t)| \leqq M + 1$ für alle s.*

Wir setzen weiter

$$C_{ZK} = M + 1 + \frac{1}{\alpha}(ZK + 2E)\,, \tag{38}$$

$$C = \max\left(ZK, \frac{1}{\alpha}(gC_{ZK} + H + E)\right) \tag{39}$$

und $J_s = \langle \theta_s, \theta_{s+1} \rangle$. Wenn die Voraussetzungen des Lemmas 4 erfüllt sind, so behaupten wir:

a) *Gibt es einen Punkt $\vartheta \in J_{2s}$ (s – natürlich) so daß $|x''(\vartheta)| \leqq C$ gilt, dann besteht die Ungleichheit*

$$|x''(t)| \leqq C \tag{40}$$

auf dem Intervalle $\langle \vartheta, \theta_{2s+1} \rangle$.

b) *Wenn für ein natürliches s die Ungleichheit*

$$|x''(\theta_{2s-1})| \leqq C \tag{41}$$

gilt, so ist (40) auf J_{2s-1} erfüllt.

Beweis. Wir benutzen wiederum die Funktion $\frac{1}{2} x''^2(t)$, deren Ableitung in (34) abgeschätzt ist. Daraus bekommen wir auf J_{2s} (vgl. (iii)) mit Hilfe von (3)

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} x''^2(t) \leqq - |x''| \left[\alpha|x''| - g(M + 1) - H - E\right].$$

Hieraus folgt aber für $|x''| \geqq K \geqq [g(M + 1) + H + E]/\alpha + 1$

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} x''^2(t) \leqq -\alpha K < 0 \quad \text{auf} \quad J_{2s} \quad \text{für} \quad |x''| \geqq K. \tag{42}$$

Die Funktion $|x''(t)|$ ist also entweder auf J_{2s} monoton abnehmend, oder gilt $|x''(t)| \leqq$ $\leqq K < C$. Daraus kann bereits die Behauptung a) unseres Lemmas einfach gefolgert werden.

b) Wir betrachten zwei Möglichkeiten:

1) $|x''(\theta_{2s-1})| \geqq ZK$. Auf $\langle \lambda_{2s-1}, \theta_{2s} \rangle$ benutzen wir Lemma 4. Dadurch kommen wir zu der Ungleichheit

$$|x''(t)| \leqq \frac{1}{Z} |x''(\theta_{2s-1})| < C \quad \text{auf} \quad \langle \lambda_{2s-1}, \theta_{2s} \rangle. \tag{43}$$

Der Bemerkung 1 nach ist

$$|x''(t)| \leqq |x''(\theta_{2s-1})| < C \quad \text{auf} \quad \langle \theta_{2s-1}, \lambda_{2s-1}). \tag{44}$$

In diesem Falle sehen wir also aus (43) und (44), daß (40) auf J_{2s-1} gelten muß.

2) $|x''(\theta_{2s-1})| \leqq ZK$. Auf J_{2s-1} haben wir aus (16) bzw. (18)

$$|x'(t)| \leqq C_{ZK} \tag{45}$$

und daraus die den Ungleichheiten (17) bzw. (19) analoge Ungleichheit

$$|x''(t)| \leqq C \quad \text{auf} \quad J_{2s-1}.$$

Damit ist alles bewiesen.

Bemerkung 2. Aus dem Lemma 5 folgt: Gilt (40) auf J_s (s – natürlich), so gilt diese Ungleichheit auch auf J_{s+1}. Für ein gerades (ungerades) s haben wir nämlich $|x''(\theta_{s+1})| \leqq C$ und alles folgt aus der Behauptung b) (a)) vom Lemma 5.

Lemma 6. *Die Voraussetzungen des Lemmas 5 seien erfüllt und J_s ($s = 1, 2, \ldots$) sei die Intervallenfolge aus diesem Lemma. Dann gibt es ein natürliches r so daß*

$$|x''(\theta_r)| \leqq C \tag{46}$$

ist.

Beweis. Setzen wir voraus, daß unsere Behauptung nicht richtig sei, d. h. es gelte

$$|x''(\theta_s)| > C \geqq ZK \quad (s = 1, 2, \ldots)\,. \tag{47}$$

Dann ist es zunächst klar, daß auf J_{2s} ($s = 1, 2, \ldots$) die Ungleichheit $|x''(t)| > C > K$ bestehen muß, da anderenfalls laut Behauptung a) von Lemma 5 $|x''(\theta_{2s+1})| \leqq C$ sein müßte, was aber der Relation (47) widerspricht. Infolge (42) nimmt $|x''(t)|$ auf J_{2s} monoton ab, d. h. es gilt

$$|x''(\theta_{2s})| > |x''(\theta_{2s+1})| > C \quad (s = 1, 2, \ldots)\,. \tag{48}$$

Weiter bekommen wir durch Anwendung von Lemma 4

$$\frac{1}{Z}|x''(\theta_{2s-1})| \geqq |x''(\theta_{2s})| \quad (s = 1, 2, \ldots)\,. \tag{49}$$

Aus (47), (48) und (49) folgt für jedes natürliche n

$$C < |x''(\theta_{2n+1})| < |x''(\theta_{2n})| \leqq \frac{1}{Z}|x''(\theta_{2n-1})| < \frac{1}{Z}|x''(\theta_{2n-2})| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{Z^2}|x''(\theta_{2n-3})| < \ldots \leqq \frac{1}{Z^n}|x''(\theta_1)|\,,$$

was für genügend großes n bestimmt unrichtig ist. Es kann deshalb (47) nicht gelten, womit alles bewiesen ist.

Satz 1. *Die Voraussetzungen von Lemma 6 seien erfüllt. Dann existieren alle Lösungen der Dgl.* (1) *auf der Halbgeraden* $\langle t_0, +\infty)$ *und es gibt eine Gleichungskonstante* D' *so, daß jede Lösung* $x(t)$ *der Dgl.* (1) *die Relationen*

$$\limsup_{t\to+\infty} |x'(t)| \leqq D'\,, \quad \limsup_{t\to+\infty} |x''(t)| \leqq D' \tag{50}$$

erfüllt.

Beweis. Aus Lemma 1 folgt, daß für $x(t)$ nur folgende zwei Fälle möglich sind:

a) Es gibt ein $\theta \in \langle t_0, T)$ so daß $|x'(t)| \leqq M + 1$ auf $\langle \theta, T)$ gilt.

b) Es gibt eine wachsende Folge θ_s ($s = 1, 2, \ldots$), die nur aus Zahlen des Intervalles $\langle t_0, T)$ besteht und die Eigenschaften (i), (ii), (iii) aus dem Lemma 5 besitzt. Außerdem muß natürlich $\lim_{s\to+\infty} \theta_s = T$ sein.

a) Auf $\langle \theta, T)$ kann man die Ungleichheit (ebenso wie (42) bewiesen wurde)

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}x''^2(t) \leqq -\alpha K < 0 \quad \text{für alle} \quad t \in \langle \theta, T) \tag{42'}$$

aufstellen. $x''^2(t)$ nimmt also auf $\langle \theta, T)$ mindestens so schnell ab, wie die lineare Funktion $x''^2(\theta) - 2\alpha K(t - \theta)$, oder es gilt $|x''(t)| \leqq K$. Aus denselben Gründen wie im Beweise von Lemma 1 muß also $T = +\infty$ sein. Weiter gilt offensichtlich

$$\limsup_{t \to +\infty} |x'(t)| \leqq M + 1 \,, \quad \limsup_{t \to +\infty} |x''(t)| \leqq K \tag{51}$$

und deshalb ist in diesem Falle die Behauptung unseres Satzes richtig.

b) In diesem Falle existiert laut Lemma 6 ein natürliches r so, daß (46) gilt. Aus Lemma 5 folgt nun, daß (40) auf J_r besteht. Mittels Bemerkung 2 ist also (40) auf $\langle \theta_r, T)$ durch Induktion bewiesen. Es ist also wieder $T = +\infty$ und außerdem

$$\limsup_{t \to +\infty} |x''(t)| \leqq C \,. \tag{52}$$

Aus (16) bzw. (18) haben wir schließlich

$$\limsup_{t \to +\infty} |x'(t)| \leqq M + 1 + \frac{1}{\alpha}(C + 2E) \tag{53}$$

und der Satz ist bewiesen.

Bemerkung 3. Die Konstante D' kann mittels (51), (52), (53) folgendermaßen abgeschätzt werden

$$D' \leqq \max\left[C, M + 1 + \frac{1}{\alpha}(C + 2E)\right] . \tag{54}$$

Satz 2. *Die Voraussetzungen des Satzes* 1 *seien erfüllt. Wenn noch positive Konstanten* c, m, h *existieren so daß*

$$|f(z) - cz| \leqq m \quad \textit{für alle} \quad z \tag{55}$$

$$h(x) \operatorname{sgn} x \geqq m \quad \textit{für alle} \quad |x| \geqq h \tag{56}$$

ist, so sind alle Lösungen der Dgl. (1) *beschränkt.*

Beweis. Wir werden eine bestimmte Lösung $x(t)$ betrachten. Aus dem Satze 1 folgt die Existenz eines $T \geqq t_0$ so, daß

$$|x'(t)| \leqq D' + 1 \,, \quad |x''(t)| \leqq D' + 1 \quad \text{für alle} \quad t \geqq T \tag{57}$$

ist. Durch Integration der Dgl. (1) zwischen den Grenzen T, $t \geqq T$ entsteht die Identität

$$\begin{aligned} G(x(t)) - G(x(T)) &= \\ = x''(T) - x''(t) - \int_T^t f(x''(s)) + h(x(s)) \, ds + \int_T^t e(s) \, ds \,. \end{aligned} \tag{58}$$

Führen wir noch die Funktion $\varphi(z) = f(z) - cz$ ein und setzen wir voraus, daß für alle $t \geqq T$ die Ungleichheit $|x(t)| \geqq h$ gilt, so bekommen wir zunächst durch Multiplikation von (58) mit der Konstante $\operatorname{sgn} x(t)$

$$(58') \qquad |G(x(t))| = |G(x(T))| + [x''(T) - x''(t) + c(x'(t) - x'(t))] \operatorname{sgn} x(t) - \\ - \int_T^t [h(x(s)) + \varphi(x''(s))] \operatorname{sgn} x(s)\, ds + \int_T^t e(s)\, ds \operatorname{sgn} x(t)$$

and daraus mittels (15) und (57)

$$(59) \qquad |G(x(t))| \leqq |G(x(T))| + 2[(c + 1)(D' + 1) + E] = C_x$$

(nach (55) und (56) ist nämlich $\int_T^t [h(x(s)) + \varphi(x''(s))] \operatorname{sgn} x(s)\, ds \geqq 0$). Für jede Lösung $x(t)$ der Dgl. (1) muß also eine der Relationen

$$(\mathrm{B}_1) \qquad \limsup_{t \to +\infty} |G(x(t))| \leqq C_x\,,$$

$$(\mathrm{B}_2) \qquad \limsup_{t \to +\infty} |G(x(t))| \leqq \max(G(h)\,, \quad -G(-h)) + 2[(c + 1)(D' + 1) + E] + 1$$

richtig sein, womit alles bewiesen ist.

Satz 3. *Die Voraussetzungen des Satzes* 1 *und die Ungleichheit* (55) *seien erfüllt und weiter sei*

$$(60) \qquad \liminf_{|x| \to +\infty} h(x) \operatorname{sgn} x > m\,.$$

Dann gibt es eine Gleichungskonstante D so daß jede Lösung $x(t)$ *der Dgl.* (1) *die Ungleichheiten*

$$\limsup_{t \to +\infty} |x''(t)| \leqq D\,, \quad \limsup_{t \to +\infty} |x'(t)| \leqq D\,, \quad \limsup_{t \to +\infty} |x(t)| \leqq D$$

erfüllt.

Beweis. Aus (60) folgt die Existenz der Zahlen h, δ, die positiv sind und

$$(61) \qquad h(x) \operatorname{sgn} x \geqq m + \delta \quad \text{für alle} \quad |x| \geqq h\,.$$

Wenn T, t und $\varphi(t)$ ihre Bedeutung aus dem Beweise des Satzes 1 behalten, so folgt im Falle $|x(t)| \geqq h$ für alle $t \geqq T$ aus (58)

$$(62) \qquad |G(x(t))| \leqq |G(x(T))| + 2[(c + 1)(D' + 1) + E] - \delta(t - T)\,;$$

diese Ungleichheit führt zum Widerspruch für genügend großes $t - T$. Es muß deshalb

$$\liminf_{t \to +\infty} |x(t)| \leqq h$$

für jede Lösung $x(t)$ der Dgl. (1) gelten. Gleich wie im Beweise von Satz 2 sehen wir nun, daß für jede $x(t)$ die Abschätzung (B_2) gelten muß und Satz 3 ist bewiesen.

Folgerung. *Die Vorassetzungen des Satzes* 3 *seien erfüllt und* $e(t)$ *sei eine periodische Funktion. Wenn die Dgl.* (1) *noch eine Eindeutigkeitsbedingung erfüllt, so besitzt sie eine periodische Lösung.*

Satz 4. *Die Voraussetzungen des Satzes* 1 *und die Ungleichheit* (47) *seien erfüllt und weiter sei*

$$\limsup_{|x| \to +\infty} h(x) \operatorname{sgn} x < -m .$$

Dann gibt es Lösungen $x(t)$ *der Dgl.* (1), *für welche*

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = +\infty$$

gilt.

Beweis. Unter Benutzung der Funktion

$$2\,U(x, y, z; t) = 2c \int_0^x h(s)\,\mathrm{d}s + (z + cy + G(x) - \int_0^t e(s)\,\mathrm{d}s)^2$$

kann man Satz 4 auf dieselbe Weise beweisen, wie eine analoge Behauptung z. B. in [2].

Literatur

[1] *E. Kamke:* Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1956.

[2] *J. Voráček:* Einige Bemerkungen über eine nichtlineare Differentialgleichung dritter Ordnung, Archivum mathematicum T. 2, 1966, 19—26.

Anschrift des Verfassers: Olomouc, Gottwaldova 15, ČSSR (Palackého universita).