Albrecht Pietsch

Interpolationsfunktoren, Folgenideale und Operatorenideale

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 21 (1971), No. 4, 644–652

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/101064`

Czechoslovak Mathematical Journal, 21 (96) 1971, Praha

INTERPOLATIONSFUNKTOREN, FOLGENIDEALE UND OPERATORENIDEALE

ALBRECHT PIETSCH, Jena

(Eingegangen am 8. Juni 1970)

Bekanntlich besteht eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Idealen im Operatorenring des unendlichdimensionalen separablen Hilbertraumes und den Idealen im Ring aller beschränkten Zahlenfolgen (vgl. [4], [5], [12]). In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß man diese Zuordnung für eine große Klasse von vollständigen normierten Operatoren- bzw. Folgenidealen besonders elegant und einfach durch die Verwendung von Interpolationsfunktoren beschreiben kann (Vgl. [1], [2], [6]).

1. INTERPOLATIONSFUNKTOREN

Ein *Raumtripel* $\{E_0, E_1 \mid E\}$ besteht aus zwei Banachräumen E_0 und E_1, die stetig in einen separierten topologischen linearen Raum E eingebettet sind. Für zwei Raumtripel $\{E_0, E_1 \mid E\}$ und $\{F_0, F_1 \mid F\}$ bezeichnen wir mit

$$\mathbf{L}(\{E_0, E_1 \mid E\}, \{F_0, F_1 \mid F\})$$

die Menge aller *Operatorentripel* $\{T_0, T_1 \mid T\}$, die dadurch charakterisiert sind, daß sich die beiden beschränkten linearen Operatoren $T_0 \in \mathbf{L}(E_0, F_0)$ und $T_1 \in \mathbf{L}(E_1, F_1)$ als Einschränkungen eines stetigen linearen Operators T ergeben, der E in F abbildet.

Aus jedem Raumtripel $\{E_0, E_1 \mid E\}$ kann man die Banachräume

$$E_\Delta = E_0 \cap E_1\,, \quad \|x\|_\Delta = \max\left(\|x\|_0, \|x\|_1\right),$$

und

$$E_\Sigma = E_0 + E_1\,, \quad \|x\|_\Sigma = \inf\left\{\|x_0\|_0 + \|x_1\|_1 : x = x_0 + x_1,\ x_0 \in E_0,\ x_1 \in E_1\right\}$$

erzeugen. Eine Abbildung Φ, die jedem Raumtripel $\{E_0, E_1 | E\}$ einen Banachraum E_Φ

zuordnet, heißt *Interpolationsfunktor*, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(E) Der Banachraum E_Φ ist eine Teilmenge von E mit $E_\Delta \subset E_\Phi \subset E_\Sigma$, und es gelten die Ungleichungen

$$\|x\|_\Delta \geqq \|x\|_\Phi \quad \text{für} \quad x \in E_\Delta \quad \text{und} \quad \|x\|_\Phi \geqq \|x\|_\Sigma \quad \text{für} \quad x \in E_\Phi .$$

(R) Für jedes Operatorentripel $\{T_0, T_1 \mid T\} \in \mathbf{L}(\{E_0, E_1 \mid E\}, \{F_0, F_1 \mid F\})$ definiert die Einschränkung von T auf E_Φ einen Operator

$$T_\Phi \in \mathbf{L}(E_\Phi, F_\Phi) \quad \text{mit} \quad \|T_\Phi\| \leqq \max(\|T_0\|, \|T_1\|) .$$

Die Zuordnungen

$$\Delta : \{E_0, E_1 \mid E\} \to E_\Delta \quad \text{und} \quad \Sigma : \{E_0, E_1 \mid E\} \to E_\Sigma$$

sind Interpolationsfunktoren.

Lemma 1. *Für drei Interpolationsfunktoren Φ_0, Φ_1 und Φ wird durch den Ansatz*

$$\Psi : \{E_0, E_1 | E\} \xrightarrow{\Phi_0, \Phi_1} \{E_{\Phi_0}, E_{\Phi_1} | E\} \xrightarrow{\Phi} E_\Psi$$

ein Interpolationsfunktor $\Psi = \{\Phi_0, \Phi_1, \Phi\}$ definiert.

Beweis. Aus

$$E_\Delta \subset E_{\Phi_i} \quad \text{und} \quad \|x\|_\Delta \geqq \|x\|_{\Phi_i} \quad \text{für} \quad x \in E_\Delta \quad (i = 0, 1)$$

folgt

$$E_\Delta \subset E_{\Phi_0} \cap E_{\Phi_1} \subset E_\Psi \quad \text{und} \quad \|x\|_\Delta \geqq \max(\|x\|_{\Phi_0}, \|x\|_{\Phi_1}) \geqq \|x\|_\Psi .$$

Andererseits gilt wegen

$$E_{\Phi_i} \subset E_\Sigma \quad \text{und} \quad \|x\|_{\Phi_i} \geqq \|x\|_\Sigma \quad \text{für} \quad x \in E_{\Phi_i} \quad (i = 0, 1)$$

auch

$$E_\Psi \subset E_{\Phi_0} + E_{\Phi_1} \subset E_\Sigma .$$

Zum Nachweis der Ungleichung

$$\|x\|_\Psi \geqq \|x\|_\Sigma \quad \text{für} \quad x \in E_\Psi$$

bestimmen wir zu einer vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ eine Darstellung

$$x = x_0 + x_1 \quad \text{mit} \quad x_0 \in E_{\Phi_0}, x_1 \in E_{\Phi_1} \quad \text{und} \quad \|x\|_\Psi + \varepsilon \geqq \|x_0\|_{\Phi_0} + \|x_1\|_{\Phi_1} .$$

Dann ergibt sich sofort die Beziehung

$$\|x\|_\Psi + \varepsilon \geqq \|x_0\|_{\Phi_0} + \|x_1\|_{\Phi_1} \geqq \|x_0\|_\Sigma + \|x_1\|_\Sigma \geqq \|x\|_\Sigma .$$

Da für jedes Operatorentripel $\{T_0, T_1 \mid T\} \in \mathbf{L}(\{E_0, E_1 \mid E\}, \{F_0, F_1 \mid F\})$ die Aussagen

$$T_{\Phi_i} \in \mathbf{L}(E_{\Phi_i}, F_{\Phi_i}) \quad \text{und} \quad \|T_{\Phi_i}\| \leqq \max(\|T_0\|, \|T_1\|) \quad (i = 0, 1)$$

gelten, hat man

$$T_\Psi \in \mathbf{L}(E_\Psi, F_\Psi) \quad \text{und} \quad \|T_\Psi\| \leqq \max(\|T_{\Phi_0}\|, \|T_{\Phi_1}\|) \leqq \max(\|T_0\|, \|T_1\|)\,.$$

2. FOLGENIDEALE

Die Menge $\mathbf{l}_\infty$ aller beschränkten Zahlenfolgen (τ_n) ist ein kommutativer Ring mit der Norm $\lambda_\infty(\tau_n) = \sup |\tau_n|$.

Eine Teilmenge $\mathbf{a}$ von $\mathbf{l}_\infty$ heißt *Ideal*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(O) Es gilt $(1, 0, 0, \ldots) \in \mathbf{a}$.

(A) Aus $(\sigma_n), (\tau_n) \in \mathbf{a}$ folgt $(\sigma_n + \tau_n) \in \mathbf{a}$.

(I) Aus $(\sigma_n) \in \mathbf{l}_\infty$ und $(\tau_n) \in \mathbf{a}$ folgt $(\sigma_n \tau_n) \in \mathbf{a}$.

(P) Für jede Permutation π der natürlichen Zahlen folgt aus $(\tau_n) \in \mathbf{a}$ stets $(\tau_{\pi(n)}) \in \mathbf{a}$.

Eine Abbildung α, die jeder Folge (τ_n) eines Ideals $\mathbf{a}$ eine nicht negative Zahl $\alpha(\tau_n)$ zuordnet, wird als *Norm* bezeichnet, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

(NO) Es gilt $\alpha(1, 0, 0, \ldots) = 1$.

(NA) Für $(\sigma_n), (\tau_n) \in \mathbf{a}$ gilt $\alpha(\sigma_n + \tau_n) \leqq \alpha(\sigma_n) + \alpha(\tau_n)$.

(NI) Für $(\sigma_n) \in \mathbf{l}_\infty$ und $(\tau_n) \in \mathbf{a}$ gilt $\alpha(\sigma_n \tau_n) \leqq \lambda_\infty(\sigma_n)\, \alpha(\tau_n)$.

(NP) Für jede Permutation π der natürlichen Zahlen und $(\tau_n) \in \mathbf{a}$ gilt $\alpha(\tau_{\pi(n)}) = \alpha(\tau_n)$.

Ein Folgenideal $\mathbf{a}$ auf dem eine Norm α gegeben ist, heißt *normiert*.

Satz 1. *Jeder Interpolationsfunktor Φ ordnet zwei beliebigen vollständigen normierten Folgenidealen $[\mathbf{a}_0, \alpha_0]$ und $[\mathbf{a}_1, \alpha_1]$ ein vollständiges normiertes Folgenideal $[\mathbf{a}_\Phi, \alpha_\Phi]$ zu.*

Beweis. Da man nach Voraussetzung aus dem Raumtripel $\{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{l}_\infty\}$ durch den Interpolationsfunktor Φ einen Banachraum $\mathbf{a}_\Phi$ mit der Norm α_Φ erhält, müssen nur noch die Eigenschaften (I) und (NI) sowie (P) und (NP) nachgewiesen werden. Zu diesem Zweck betrachten wir eine beliebige Folge $(\sigma_n) \in \mathbf{l}_\infty$. Dann wird durch den Ansatz

$$S(\tau_n) = (\sigma_n \tau_n)$$

ein Operatorentripel $\{S_0, S_1 \mid S\} \in \mathbf{L}(\{\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1 \mid \mathfrak{l}_\infty\}, \{\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1 \mid \mathfrak{l}_\infty\})$ mit $\|S_0\| = \|S_1\| = \lambda_\infty(\sigma_n)$ definiert. Für jede Folge $(\tau_n) \in \mathfrak{a}_\Phi$ gilt deshalb

$$(\sigma_n \tau_n) = S(\tau_n) \in \mathfrak{a}_\Phi$$

und

$$\alpha_\Phi(\sigma_n \tau_n) = \alpha_\Phi(S(\tau_n)) \leqq \|S_\Phi\| \, \alpha_\Phi(\tau_n) \leqq \lambda_\infty(\sigma_n) \, \alpha_\Phi(\tau_n) \, .$$

Demnach sind die Bedingungen (I) und (NI) erfüllt. Der Beweis für die Eigenschaften (P) und (NP) ergibt sich analog.

Die Menge $\mathfrak{l}_1$ aller absolutsummierbaren Zahlenfolgen (τ_n) mit der Norm

$$\lambda_1(\tau_n) = \sum_n |\tau_n|$$

ist das kleinste vollständige normierte Folgenideal. Das vollständige normierte Folgenideal, das man mit einem beliebigen Interpolationsfunktor Φ aus den extremalen Folgenidealen $[\mathfrak{l}_\infty, \lambda_\infty]$ und $[\mathfrak{l}_1, \lambda_1]$ erhält, wird im folgenden mit $[\mathfrak{l}_\Phi, \lambda_\Phi]$ bezeichnet. Wir sagen, daß ein vollständiges normiertes Folgenideal $[\mathfrak{a}, \alpha]$ die *Interpolationseigenschaft* besitzt, wenn es auf diese Weise erzeugt werden kann. Es gibt vollständige normierte Folgenideale ohne diese Eigenschaft (vgl. [13]).

Durch den Ansatz

$$P_k(\tau_1, \ldots, \tau_k, \tau_{k+1}, \ldots) = (\tau_1, \ldots, \tau_k, 0, \ldots)$$

wird eine Folge von Operatoren $P_k \in \mathbf{L}(\mathfrak{l}_\infty, \mathfrak{l}_\infty)$ definiert. Ein vollständiges normiertes Folgenideal $[\mathfrak{a}, \alpha]$ heißt *minimal* bzw. *maximal*, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

(Min) Für alle $(\tau_n) \in \mathfrak{a}$ gilt $(\tau_n) = \alpha - \lim_k P_k(\tau_n)$.

(Max) Aus $\lim_k \alpha(P_k(\tau_n)) < \infty$ folgt $(\tau_n) \in \mathfrak{a}$ und $\alpha(\tau_n) = \lim_k \alpha(P_k(\tau_n))$.

Aus den Ergebnissen von B. S. Mitiagin [7] kann man die nachstehende Aussage ableiten.

Satz 2. *Jedes minimale oder maximale vollständige normierte Folgenideal besitzt die Interpolationseigenschaft.*

Für die von A. Calderon [2] entdeckten komplexen Interpolationsfunktoren Φ_θ $(0 < \theta < 1)$ und die Ideale $\mathfrak{l}_p$ $(1 < p < \infty)$ der absolut-p-summierbaren Zahlenfolgen (τ_n) mit der Norm

$$\lambda_p(\tau_n) = \{\sum_n |\tau_n|^p\}^{1/p}$$

ergibt sich insbesondere

Satz 3. *Die (minimalen und maximalen) vollständigen normierten Folgenideale* $[\boldsymbol{l}_p, \lambda_p]$ *besitzen die Interpolationseigenschaft, denn mit* $\theta = 1/p$ *gilt*

$$\Phi_\theta : \{\boldsymbol{l}_\infty, \boldsymbol{l}_1 \mid \boldsymbol{l}_\infty\} \to \boldsymbol{l}_p .$$

Anstelle der komplexen Interpolationsfunktoren Φ_θ kann man auch die von J. LIONS und J. PEETRE [6] konstruierten reellen Interpolationsfunktoren $\Phi_{\theta,p}$ verwenden. In diesem Fall gilt mit $\theta = 1/p$ ebenfalls

$$\Phi_{\theta,p} : \{\boldsymbol{l}_\infty, \boldsymbol{l}_1 \mid \boldsymbol{l}_\infty\} \to \boldsymbol{l}_p .$$

Allerdings ergibt sich dabei auf $\boldsymbol{l}_p$ nur eine zu λ_p äquivalente Norm.

Wir zeigen nun, daß die Menge aller vollständigen normierten Folgenideale mit der Interpolationseigenschaft gegenüber Interpolation abgeschlossen ist.

Satz 4. *Für jeden Interpolationsfunktor* Φ *überträgt sich die Interpolationseigenschaft von zwei beliebigen vollständigen normierten Folgenidealen* $[\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{\alpha}_0]$ *und* $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{\alpha}_1]$ *auf das interpolierte vollständige normierte Folgenideal* $[\boldsymbol{a}_\Phi, \boldsymbol{\alpha}_\Phi]$.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es Interpolationsfunktoren Φ_0 und Φ_1 mit

$$[\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{\alpha}_0] = [\boldsymbol{l}_{\Phi_0}, \lambda_{\Phi_0}] \quad \text{und} \quad [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{\alpha}_1] = [\boldsymbol{l}_{\Phi_1}, \lambda_{\Phi_1}] .$$

Deshalb gilt nach Lemma 1 mit $\Psi = \{\Phi_0, \Phi_1, \Phi\}$ die Identität

$$[\boldsymbol{a}_\Phi, \boldsymbol{\alpha}_\Phi] = [\boldsymbol{l}_\Psi, \lambda_\Psi] .$$

3. OPERATORENIDEALE

Die Menge $\mathbf{L}(H, H)$ aller beschränkten linearen Operatoren T, die den unendlichdimensionalen separablen Hilbertraum H in sich selbst abbilden, ist ein nichtkommutativer Ring mit der Norm $\|.\|$.

Eine Teilmenge $\mathbf{A}(H, H)$ von $\mathbf{L}(H, H)$ heißt *Ideal*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(O) Für $e, f \in H$ gilt $e \otimes f \in \mathbf{A}(H, H)$.

(A) Aus $S, T \in \mathbf{A}(H, H)$ folgt $S + T \in \mathbf{A}(H, H)$.

(I) Aus $X, Y \in \mathbf{L}(H, H)$ und $T \in \mathbf{A}(H, H)$ folgt $YTX \in \mathbf{A}(H, H)$.

Eine Abbildung $\boldsymbol{\alpha}$, die jedem Operator T eines Ideals $\mathbf{A}(H, H)$ eine nicht negative Zahl $\boldsymbol{\alpha}(T)$ zuordnet, wird als *Norm* bezeichnet, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

(NO) Für $e, f \in H$ gilt $\alpha(e \otimes f) = \|e\| \, \|f\|$.

(NA) Für $S, T \in \mathbf{A}(E, F)$ gilt $\alpha(S + T) \leqq \alpha(S) + \alpha(T)$.

(NI) Für $X, Y \in \mathbf{L}(H, H)$ und $T \in \mathbf{A}(H, H)$ gilt $\alpha(YTX) \leqq \|Y\| \, \alpha(T) \, \|X\|$.

Ein Operatorenideal $\mathbf{A}(H, H)$, auf dem eine Norm α gegeben ist, heißt *normiert.*

Auf Grund eines fundamentalen Satzes von J. W. CALKIN kann man eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Operatorenidealen $\mathbf{A}(H, H)$ und den Folgenidealen $\boldsymbol{a}$ herstellen. ($\mathbf{A}(H, H) \to \boldsymbol{a}$): Dem Operatorenideal $\mathbf{A}(H, H) \neq \mathbf{L}(H, H)$ entspricht das Ideal $\boldsymbol{a}$ aller Zahlenfolgen (τ_n), für die der Operator

$$T = \sum_n \tau_n e_n \otimes f_n$$

zu $\mathbf{A}(H, H)$ gehört. Diese Eigenschaft ist nicht von der speziellen Wahl der Orthonormalsysteme (e_n) und (f_n) abhängig. ($\boldsymbol{a} \to \mathbf{A}(H, H)$): Dem Folgenideal $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{l}_\infty$ wird das Ideal aller Operatoren $T \in \mathbf{L}(H, H)$ zugeordnet, die sich mit einer Zahlenfolge $(\tau_n) \in \boldsymbol{a}$ und zwei geeigneten Orthonormalsystemen (e_n) und (f_n) in der Form

$$T = \sum_n \tau_n e_n \otimes f_n$$

darstellen lassen.

Offenbar geht bei dieser Zuordnung jede auf einem Operatorenideal $\mathbf{A}(H, H)$ definierte Norm α in eine Norm

$$\alpha(\tau_n) = \alpha\left(\sum_n \tau_n e_n \otimes f_n\right)$$

auf dem entsprechenden Folgenideal $\boldsymbol{a}$ über. Bis jetzt konnte jedoch noch nicht gezeigt werden, daß auch umgekehrt jede Folgenidealnorm eine Operatorenidealnorm liefert. Im Spezialfall $[\boldsymbol{l}_1, \lambda_1]$ läßt sich diese Vermutung allerdings leicht bestätigen. Man erhält auf diese Weise das kleinste vollständige normierte Operatorenideal $[\boldsymbol{S}_1(H, H), \sigma_1]$.

Satz 5. *Jeder Interpolationsfunktor Φ ordnet zwei beliebigen vollständigen normierten Operatorenidealen $[\mathbf{A}_0(H, H), \alpha_0]$ und $[\mathbf{A}_1(H, H), \alpha_1]$ ein vollständiges normiertes Operatorenideal $[\mathbf{A}_\Phi(H, H), \alpha_\Phi]$ zu.*

Beweis. Da man aus dem Raumtripel $\{\mathbf{A}_0(H, H), \mathbf{A}_1(H, H) \mid \mathbf{L}(H, H)\}$ durch den Interpolationsfunktor Φ einen Banachraum $\mathbf{A}_\Phi(H, H)$ mit der Norm α_Φ erhält, müssen wir nur noch die Eigenschaften (I) und (NI) beweisen. Zu diesem Zweck betrachten wir zwei beliebige Operatoren $X, Y \in \mathbf{L}(H, H)$. Dann wird durch den Ansatz

$$S(T) = YTX$$

ein Operatorentripel

$$\{S_0, S_1 \mid S\} \in \mathbf{L}(\{\mathbf{A}_0(H, H), \mathbf{A}_1(H, H) \mid \mathbf{L}(H, H)\}, \{\mathbf{A}_0(H, H), \mathbf{A}_1(H, H) \mid \mathbf{L}(H, H)\})$$

mit $\|S_0\| = \|S_1\| = \|Y\| \, \|X\|$ definiert. Für jeden Operator $T \in \mathbf{A}_\Phi(H, H)$ gilt deshalb

$$YTX = S(T) \in \mathbf{A}_\Phi(H, H)$$

und

$$\alpha_\Phi(YTX) = \alpha_\Phi(S(T)) \leqq \|S_\Phi\| \, \alpha_\Phi(T) \leqq \|Y\| \, \|X\| \, \alpha_\Phi(T) .$$

Das vollständige normierte Operatorenideal, das man mit einem beliebigen Interpolationsfunktor Φ aus den extremalen Operatorenidealen $[\mathbf{L}(H, H), \|.\|]$ und $[\mathbf{S}_1(H, H), \sigma_1]$ erhält, wird im folgenden mit $[\mathbf{S}_\Phi(H, H), \sigma_\Phi]$ bezeichnet. Wir sagen, daß ein vollständiges normiertes Operatorenideal $[\mathbf{A}(H, H), \alpha]$ die Interpolationseigenschaft besitzt, wenn es auf diese Weise erzeugt werden kann.

Lemma 2. *Für jeden Operator $T \in \mathbf{S}_\Phi(H, H)$ und zwei beliebige Orthonormalsysteme (e_n) und (f_n) gilt*

$$((Te_n, f_n)) \in \mathbf{l}_\Phi \quad \textit{und} \quad \lambda_\Phi((Te_n, f_n)) \leqq \sigma_\Phi(T) .$$

Beweis. Durch den Ansatz $A(T) = (Te_n, f_n))$ wird ein Operatorentripel

$$\{A_0, A_1 \mid A\} \in \mathbf{L}(\mathbf{L}\{H, H), \mathbf{S}_1(H, H) \mid \mathbf{L}(H, H)\} \; \{\mathbf{l}_\infty, \mathbf{l}_1 \mid \mathbf{l}_\infty\})$$

mit $\|A_0\| = \|A_1\| = 1$ definiert. Für $T \in \mathbf{S}_\Phi(H, H)$ gilt deshalb wie behauptet

$$((Te_n, f_n)) = A_\Phi(T) \in \mathbf{l}_\Phi \quad \text{und} \quad \lambda_\Phi((Te_n, f_n)) \leqq \|A_\Phi\| \, \sigma_\Phi(T) \leqq \sigma_\Phi(T) .$$

Lemma 3. *Für jede Folge $(\tau_n) \in \mathbf{l}_\Phi$ und zwei beliebige Orthonormalsysteme (e_n) und (f_n) gilt*

$$\sum_n \tau_n e_n \otimes f_n \in \mathbf{S}_\Phi(H, H) \quad \textit{und} \quad \sigma_\Phi(\sum_n \tau_n e_n \otimes f_n) \leqq \lambda_\Phi(\tau_n) .$$

Beweis. Durch den Ansatz $B(\tau_n) = \sum_n \tau_n e_n \otimes f_n$ wird ein Operatorentripel

$$\{B_0, B_1 \mid B\} \in \mathbf{L}(\{\mathbf{l}_\infty, \mathbf{l}_1 \mid \mathbf{l}_\infty\}, \{\mathbf{L}(H, H), \mathbf{S}_1(H, H) \mid \mathbf{L}(H, H)\})$$

mit $\|B_0\| = \|B_1\| = 1$ definiert. Für $(\tau_n) \in \mathbf{l}_\Phi$ gilt deshalb wie behauptet

$$\sum_n \tau_n e_n \otimes f_n = B_\Phi(\tau_n) \in \mathbf{S}_\Phi(H, H)$$

und

$$\sigma_\Phi(\sum_n \tau_n e_n \otimes f_n) \leqq \|B_\Phi\| \, \lambda_\Phi(\tau_n) \leqq \lambda_\Phi(\tau_n) .$$

Nun ergibt sich unmittelbar das

Theorem. *Für jeden Interpolationsfunktor Φ sind die vollständigen normierten Operatoren- bzw. Folgenideale*

$$[\mathbf{S}_\Phi(H, H), \sigma_\Phi] \quad \textit{und} \quad [\mathbf{l}_\Phi, \lambda_\Phi]$$

einander zugeordnet, und es gilt

$$\sigma_\Phi(T) = \sup\{\lambda_\Phi((Te_n, f_n)) : (e_n), (f_n)\}$$

und

$$\lambda_\Phi(\tau_n) = \sigma_\Phi(\sum_n \tau_n e_n \otimes f_n) .$$

Wir geben nun einige einfache Folgerungen an.

Satz 6. *Jedem vollständigen normierten Folgenideal $[\mathfrak{a}, \alpha]$, das die Interpolationseigenschaft besitzt, wird durch den Ansatz*

$$\mathbf{A}(H, H) = \{T = \sum_n \tau_n e_n \otimes f_n : (\tau_n) \in \mathfrak{a}, (e_n), (f_n)\} .$$

und

$$\alpha(T) = \alpha(\tau_n)$$

ein vollständiges normiertes Operatorenideal $[\mathbf{A}(H, H), \alpha]$ zugeordnet.

Satz 7. *Für zwei Interpolationsfunktoren Φ_0 und Φ_1 sind die Aussagen*

$$[\mathbf{S}_{\Phi_0}(H, H), \sigma_{\Phi_0}] = [\mathbf{S}_{\Phi_1}(H, H), \sigma_{\Phi_1}] \quad \textit{und} \quad [\mathbf{l}_{\Phi_0}, \lambda_{\Phi_0}] = [\mathbf{l}_{\Phi_1}, \lambda_{\Phi_1}]$$

äquivalent.

Für die den Folgenidealen $[\mathbf{l}_p, \lambda_p]$ zugeordneten Operatorenideale $[\mathbf{S}_p(H, H), \sigma_p]$ ergibt sich insbesondere der bekannte (vgl. [9]) .

Satz 8. *Mit $\theta = 1/p$ gilt*

$$\Phi_\theta : \{\mathbf{L}(H, H), \mathbf{S}_1(H, H) \mid \mathbf{L}(H, H)\} \to \mathbf{S}_p(H, H) .$$

Die entsprechende Beziehung (vgl. [10])

$$\Phi_{\theta,p} : \{\mathbf{L}(H, H), \mathbf{S}_1(H, H) \mid \mathbf{L}(H, H)\} \to \mathbf{S}_p(H, H)$$

besteht auch für die reellen Interpolationsfunktoren. Dabei erhält man auf $\mathbf{S}_p(H, H)$ allerdings nur eine zu σ_p äquivalente Norm.

Satz 9. *Wenn zwei vollständige normierte Folgenideale $[\mathfrak{a}_0, \alpha_0]$ und $[\mathfrak{a}_1, \alpha_1]$ und somit auch die zugeordneten vollständigen normierten Operatorenideale*

$[\mathbf{A}_0(H, H), \alpha_0]$ *und* $[\mathbf{A}_1(H, H), \alpha_1]$ *die Interpolationseigenschaft besitzen, sind für jeden Interpolationsfunktor* Φ *die Ideale* $[\mathbf{a}_\Phi, \alpha_\Phi]$ *und* $[\mathbf{A}_\Phi(H, H), \alpha_\Phi]$ *einander zugeordnet* (vgl. [11]).

4. SCHLUSSBEMERKUNGEN

Interpolationsfunktoren lassen sich mit gutem Erfolg für die Konstruktion von vollständigen normierten Operatorenidealen $[\mathbf{A}, \alpha]$ über der Klasse aller Banachräume ausnutzen (vgl. [8], [9]). Ist nämlich $[\mathbf{S}_1, \sigma_1]$ eine beliebige Fortsetzung des Operatorenideals $[\mathbf{S}_1(H, H), \sigma_1]$, so wird für jeden Interpolationsfunktor Φ durch den Ansatz

$$\Phi : \{\mathbf{L}(E, F), \mathbf{S}_1(E, F) \mid \mathbf{L}(E, F)\} \to \mathbf{S}_\Phi(E, F)$$

(E, F: Banachräume) ein vollständiges normiertes Operatorenideal $[\mathbf{S}_\Phi, \sigma_\Phi]$ definiert, das dann natürlich Fortsetzung von $[\mathbf{S}_\Phi(H, H), \sigma_\Phi]$ ist.

Literatur

[1] *P. L. Butzer* and *H. Berens*, Semi-Groups of Operators and Approximation, Berlin—Heidelberg—New York 1967.

[2] *A. Calderon*, Intermediate spaces and interpolation, the complex method, Studia Math. *24* (1964) 113—190.

[3] *N. Deutsch*, Interpolation dans les espaces vectoriels topologiques localement convexes, Bull. Soc. Math. France Mémoire *13* (1968).

[4] *D. J. H. Garling*, On Ideals of operators in Hilbert space, Proc. London Math. Soc. (3) *17* (1967) 115—138.

[5] *I. Z. Gochberg* und *M. G. Krein*, Einführung in die Theorie der linearen nichtselbstadjungierten Operatoren, Moskau 1965 (russisch).

[6] *J. Lions* et *J. Peetre*, Sur une classe d'espaces d'interpolation, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. *19* (1964) 5—68.

[7] *B. S. Mitiagin*, Interpolationstheorie für Modular-Räume, Mat. Sbornik *66* (1965) 473—482 (russisch).

[8] *A. Pietsch*, Ideale von S_p-Operatoren in Banachräumen, Studia Math. *38* (1970), 59—69.

[9] *A. Pietsch* und *H. Triebel*, Interpolationstheorie für Banachideale von beschränkten linearen Operatoren, Studia Math. *31* (1968) 95—109.

[10] *H. Triebel*, Über die Verteilung der Approximationszahlen kompakter Operatoren in Sobolev-Besov-Räumen, Invest. math. *4* (1967) 275—293.

[11] *H. Triebel*, Zur Interpolation von Normidealen in Hilberträumen, Wiss. Zeitschrift FSU Jena, Math.-Nat. Reihe, *18* (1969) 263—267.

[12] *R. Schatten*, Norm ideals of completely continuous operators, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1960.

[13] *G. I. Russu*, Symmetrische Funktionenräume ohne Majoranteneingenschaft, Mat. Issled (Kishinev) *4* (1969), 82—93 (russisch).

Anschrift des Verfassers: Friedrich-Schiller-Universität, Sektion Mathematik, Helmholzweg 1, 69 Jena, DDR.