Lieven Vanhecke

Variétés pseudo-ombilicales de codimension 2 et de courbure moyenne constante dans un espace elliptique à $n + 2$ dimensions et généralisations

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 23 (1973), No. 3, 404–412

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101182

Czechoslovak Mathematical Journal, 23 (98) 1973, Praha

VARIÉTÉS PSEUDO-OMBILICALES DE CODIMENSION 2 ET DE COURBURE MOYENNE CONSTANTE DANS UN ESPACE ELLIPTIQUE À $n + 2$ DIMENSIONS ET GÉNÉRALISATIONS

L. VANHECKE, Heverlee

(Reçu 16. mars 1972)

Introduction. Le travail actuel se rapporte aux variétés de codimension 2, de courbure moyenne [3] constante non nulle et qui sont pseudo-ombilicalement immergées dans un espace elliptique $(n + 2)$-dimensionnel P_e^{n+2}. Le point de courbure d'une pareille variété est le point générique d'une variété V_{cm}^n de même définition et qui est telle que l'application $f: V^n \to V_{cm}^n$ est conforme. Il existe une variété associée aux deux variétés précédentes qui est telle que la $(n - 1)$-ième courbure moyenne [2] est nulle et qui possède des asymptotiques (l'invariant arithmétique de Chern [4] est 1). Cette dernière variété forme avec les deux premières une triade de variétés de m-index $V^n = 1$ [5] dont les lignes de courbure sont en correspondance, les 1-formes de connexion tangentielles sont les mêmes, à forme de torsion nulle et qui ont un espace tangent dual commun. Dans le cas particulier où l'espace est 4-dimensionnel, cette dernière variété est minimale et contenue comme hypersurface minimale dans une variété tridimensionnelle, totalement géodésique.

A l'aide du produit cartésien (indécomposable dans le sens de Wong [9]) de chacune des variétés pseudo-ombilicales avec la quasi-normale principle (dans le sens de R. Rosca [6]) afférente à la troisième variété, on détermine deux hypersurfaces minimales de nombre type n [8]. Les quasi-normales principales afférentes aux variétés pseudo-ombilicales décrivent des systèmes de droites à n paramètres possédant n nappes focales et dont les développables correspondent aux lignes de courbure des trois variétés. Dans le cas où l'application f est une isométrie, alors les nappes focales se groupent en couples de variétés isométriques.

Pour finir et par une méthode similaire on obtient quelques résultats analogues pour les variétés de codimension N dans l'espace P_e^{n+N}.

1. Soit P_e^{n+2} un espace elliptique à $n + 2$ dimensions dont on suppose que la courbure a été réduite à l'unité par une homothétie préalable et soit $\pi: V^n \to P_e^{n+2}$ une immersion isométrique d'une C^∞-variété n-dimensionnelle orientable.

$X_0(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ étant le point générique de V^n, associons à X_0 un repère orthonormé $\mathscr{R}_{X_0} \equiv \{X_A\}$, $(A, B, C = 0, 1, 2, \ldots, n + 2)$. Notons par $T(X_0) \equiv \{X_i; i, j = 1, 2, \ldots, n\}$ et par $\omega^i(u \mid du)$ respectivement l'espace tangent dual de X_0 et la base duale de $T(X_0)$. Dans ces conditions la variété V^n est structurée par la connexion

$$\mathrm{d}X_A = \omega_A^B X_B, \tag{1}$$

où $\omega_A^B = \gamma_{Ai}^B \omega^i \in \wedge^1(V^n)$ sont les 1-formes de connexion de l'immersion π. Les deux groupes d'équations de structure sont condensés dans

$$d \wedge \omega_A^B = \omega_A^C \wedge \omega_C^B. \tag{2}$$

Mais V^n étant une variété intégrale du système $\omega^{n+1} = \omega^{n+2} = 0$, on trouve aussitôt à l'aide de (2) (lemme de Cartan):

$$\gamma_{ij}^{n+1} = \gamma_{ji}^{n+1}, \quad \gamma_{ij}^{n+2} = \gamma_{ji}^{n+2}. \tag{3}$$

En notant par $T^*(X_0) \equiv T^\perp(X_0) \equiv \{X_{i^*}; i^*, j^* = 0, n + 1, n + 2\}$ le complément orthogonal (ou le plan dual) de $T(X_0)$, il convient de remarquer que l'on peut écrire $T^*(X_0) \equiv X_0 \cup N_0$ où $N_0 \equiv X_{n+1}X_{n+2}$ est *la quasi-normale principale* [6] associé à X_0. Le point $H \in N_0$, défini par

$$H = f\gamma^r X_r, \quad (r, s = n + 1, n + 2; f \text{ facteur de normalisation}), \tag{4}$$

où

$$\gamma^r = \text{trace}\,[\gamma_{ij}^r], \tag{5}$$

sera dénommé *le point de courbure moyenne* [3]. Ce point est le point générique d'une variété, qui sera notée V_{cm}^n, si au moins une des traces γ^r est différent de zéro (la variété V^n n'est pas minimale).

2. Soient

$$\phi_{n+1} = -\langle \mathrm{d}X_0, \mathrm{d}X_{n+1} \rangle = \omega^i \omega_i^{n+1}, \tag{6}$$

$$\phi_{n+2} = -\langle \mathrm{d}X_0, \mathrm{d}X_{n+2} \rangle = \omega^i \omega_i^{n+2} \tag{7}$$

les deux secondes formes fondamentales associées à l'immersion d'une variété V^n de codimension 2. On sait qu'on peut toujours diagonaliser l'une d'entre elles. Supposons ici qu'il s'agisse de la forme ϕ_{n+2}. D'autre part on peut toujours, par un changement de repère, poser

$$H = X_{n+1}. \tag{8}$$

La première hypothèse implique

$$\omega_i^{n+2} = \lambda^i \omega^i, \quad \lambda^i \in \mathscr{D}(V^n), \tag{9}$$

et la deuxième entraîne

(10) $$\gamma^{n+2} = \sum \lambda^i = 0 .$$

En posant

(10′) $$\gamma^{n+1} = n\alpha , \quad \alpha \in \mathscr{D}(V^n) ,$$

pour la seconde trace, on obtient une fonction α qu'on appellera *la courbure moyenne scalaire* [3] de la variété $V^n(X_0)$.

3. Cela posé, la variété V^n sera *pseudo-ombilicale* [3] si et seulement si

(11) $$\gamma_{ij}^{n+1} = \alpha \delta_{ij} .$$

En étendant à l'espace elliptique le même raisonnement que celui fait dans le cas d'un espace euclidien par B. Y. Chen dans [3], on arrive au

Théorème. *La variété pseudo-ombilicale V^n de codimension 2 a une courbure moyenne scalaire constante si et seulement si la forme de torsion $\omega_{n+1}^{n+2} = 0$.*

Remarque. Il est facile de voir que la différentielle absolue du point $\boldsymbol{H}$ est un point de l'espace tangentiel si et seulement si $\omega_{n+1}^{n+2} = 0$. Cette condition exprime que le champ normal $\boldsymbol{H}$ sur la variété V^n immergée dans l'espace P_e^{n+2} est parallèle dans le faisceau normal $T^{\perp}(X_0)$ [10]. On obtient donc le

Théorème. *La variété pseudo-ombilicale V^n de codimension 2 a une courbure moyenne scalaire constante si et seulement si le champ normal $\boldsymbol{H}$ est parallèle dans le faisceau normal.*

Dans ce cas la connexion (1) montre aussitôt que les sommets X_{n+1} et X_{n+2} du repère décrivent eux aussi des variétés de codimension 2 dont les espaces tangents duaux sont les mêmes que celui de $V^n \equiv (X_0)$. On peut donc écrire

$$T(X_0) \equiv T(X_{n+1}) \equiv T(X_{n+2}) .$$

Il résulte de là que les 1-formes de connexion tangentielles ω_i^j (ou formes de rotation) sont *les mêmes* pour les trois variétés. D'autre part, conformément à la définition de Cartan [1], la nullité de la forme de torsion (ou forme de connexion normale) ω_{n+1}^{n+2} entraîne la nullité de la torsion gaussienne de la varieté V^n.

Considérons maintenant la variété V_{cm}^n décrite par le point de courbure moyenne X_{n+1} de V^n. Posons

(12) $$Z_0 = X_{n+1} , \quad Z_i = X_i , \quad Z_{n+1} = X_0 , \quad Z_{n+2} = X_{n+2} ,$$

et soit α^i la base duale de (Z_0) (α_A^B formes de connexion). A l'aide de la connexion (1) il résulte:

(13) $$\alpha^i = \omega_{n+1}^i , \quad \alpha_i^{n+1} = -\omega^i , \quad \alpha_i^{n+2} = \omega_i^{n+2} ,$$

et l'on déduit pour les coefficients de connexion $\bar{\gamma}_{ij}^{n+1}$, $\bar{\gamma}_{ij}^{n+2}$:

$$\bar{\gamma}_{ij}^{n+1} = \frac{1}{\alpha}\,\delta_{ij}\,, \quad \bar{\gamma}_{ij}^{n+2} = -\frac{1}{\alpha}\,\lambda^i\delta_j^i\,, \tag{14}$$

d'où le

Théorème. *Soit V^n une variété pseudo-ombilicale de courbure moyenne scalaire α constante. Le point de courbure moyenne de la variété décrit une nouvelle variété (notée V_{cm}^n) de codimension 2 qui est pareillement pseudo-ombilicale et dont la courbure moyenne scalaire constante est égale a l'inverse de celle de V^n, c-à-d. $1/\alpha$. Les deux variétés en jeu sont dans la même position réciproque et jouissent en outre de la propriété remarquable d'être homothétique.*

Le point orthogonal X_{n+2} du point de courbure X_{n+1} sur la quasi-normale principale N_0 décrit aussi une variété de codimension 2 (notée $\bar{V}^n$). Posons

$$Z_0 = X_{n+2}\,, \quad Z_i = X_i\,, \quad Z_{n+1} = X_{n+1}\,, \quad Z_{n+2} = X_0\,. \tag{15}$$

On trouve alors à l'aide de la connexion (1):

$$\alpha^i = \omega_{n+2}^i\,, \quad \alpha_i^{n+1} = \omega_i^{n+1}\,, \quad \alpha_i^{n+2} = -\omega^i\,, \tag{16}$$

et l'on déduit:

$$\bar{\gamma}_{ij}^{n+1} = -\frac{\alpha}{\lambda^i}\,\delta_{ij}\,, \quad \bar{\gamma}_{ij}^{n+2} = \frac{1}{\lambda^i}\,\delta_{ij}\,. \tag{17}$$

Convenons maintenant d'appeler comme dans [7] l'ensemble des trois variétés $(X_{i*}) \leqq (V^n, V_{cm}^n, \bar{V}^n)$ *une triade rectangulaire* τ dont $\bar{V}^n$ est *la variété de base.* En employant la notion de „*i-ième courbure moyenne d'une variété*" [2], on peut donc formuler le

Théorème. *L'orthogonal du point de courbure moyenne sur la quasi-normale principale associée a un point d'une variété V^n, pseudo-ombilicale et de courbure moyenne scalaire constante, est le point générique d'une variété n-dimensionnelle possédant des asymptotiques (invariant arithmétique de Chern = 1 [4]) dont la $(n-1)$-ième courbure moyenne est nulle. Cette variété est la variété de base d'une triade rectangulaire τ dont les éléments ont les mêmes espaces tangents duaux et les mêmes formes de connexion tangentielles. De plus, les formes de torsion de ces variétés sont nulles et les lignes de courbure se correspondent.*

4. On peut étendre à l'espace P_e^{n+2} la notion due à T. Ōtsuki [5] de m-index d'une variété immergée V^n de la manière suivante: Soit $X = \xi^r X_r$ un point de la quasi-normale principale N_0 associé au point générique X_0 de la variéte V^n. Nous définissons l'application lineaire $\overline{m}$: $N_0 \to \boldsymbol{R}$ par

$$\overline{m}(\xi^r X_r) = \frac{1}{n} \sum_r \xi^r \gamma^r \tag{18}$$

et l'application lineaire ψ de N_0 dans l'espace des matrices carrées symmétriques d'ordre n par

$$\psi(\xi^r X_r) = [\sum_r \xi^r [\gamma^r_{ij}]] . \tag{19}$$

Dénommons dim $(\psi(\ker \overline{m}))$ le *m-index* de V^n en X_0 (noté m-index V^n).

En revenant au cas que nous étudions, on voit immédiatement à l'aide de (10), (10′) et (14) que les trois variétés de la triade sont de m-index $V^n = 1$. Les formules (17) montrent alors que la variété de base $\overline{V}^n$ est toujours minimale dans l'espace P^4_e (voir aussi [7]). En égard au théorème d'Ōtsuki [5], on obtient donc le

Théorème. *Dans l'espace P^4_e il existe toujours une variété tridimensionnelle et totalement géodésique qui contient la variété de base $\overline{V}^2$ (bidimensionnelle) comme hypersurface minimale.*

Mais il y a plus. Soit Z_0 un point invariablement lié à la quasi-normale principale N_{n+2} associé au point générique X_{n+2} de $\overline{V}^n$. On a

$$Z_0 = X_0 \cos\theta + X_{n+1} \sin\theta\,, \quad \theta \text{ const}\,, \tag{20}$$

et en posant

$$Z_i = X_i\,, \quad Z_{n+1} = -X_0 \sin\theta + X_{n+1}\cos\theta\,, \quad Z_{n+2} = X_{n+2}\,, \tag{21}$$

on trouve

$$\begin{aligned} \alpha^i &= (\cos\theta - \alpha\sin\theta)\,\omega^i\,, \\ \alpha^{n+1}_i &= \frac{\sin\theta + \alpha\cos\theta}{\cos\theta - \alpha\sin\theta}\,\alpha^i\,, \\ \alpha^{n+2}_i &= \omega^{n+2}_i\,. \end{aligned} \tag{22}$$

De ce qui précède, on déduit que les variétés du couple $[(Z_0), (Z_{n+1})]$ sont pseudo-ombilicales, de courbure moyenne scalaire constante et de m-index $V^n = 1$. De plus, chacune d'entre elles est décrite par le point de courbure moyenne de l'autre. On a donc le

Théorème. *Soit $\overline{V}^n$ la variété de base de la triade τ et N_{n+2} la quasi-normale principale associée au point générique de $\overline{V}^n$. Alors, tout couple de points rectangu-*

laires et invariablement liés de N_{n+2} sont les points génériques d'un couple de variétés qui avec $\bar{V}^n$ forment une nouvelle triade du même type que τ. Les trois variétés de chacune de ces triades sont de m-index $V^n = 1$.

5. Comme N_0 est la quasi-normale principale afférente à la variété $\bar{V}^n_{cm} \equiv V^n$, $N_{n+1} \equiv X_0 X_{n+2}$ l'en est pour la variété V^n_{cm}. L'autre côté $N_{n+2} \equiv X_0 X_{n+1}$ du triangle rectangle $\Delta^{\perp} X_0 X_{n+1} X_{n+2}$ est, comme on l'a déjà remarqué, la quasi-normale principale afférente à la variété de base $\bar{V}^n$ de la triade τ.

u^{n+1} étant une $(n + 1)$-ième coordonnée locale, le point

$$Z_0 = X_0 \cos u^{n+1} + X_{n+1} \sin u^{n+1} \tag{23}$$

décrit une hypersurface que l'on peut considérer comme le produit cartésien (indécomposable [9]) de la variété X_0 et la quasi-normale principale N_{n+2}.

Posons

$$Z_i = X_i\,, \quad Z_{n+1} = -X_0 \sin u^{n+1} + X_{n+1} \cos u^{n+1}\,, \quad Z_{n+2} = X_{n+2}\,; \tag{24}$$

on trouve alors, à l'aide de la connexion (1), pour la seconde forme fondamentale ϕ de cette variété:

$$\phi = -\langle \mathrm{d}Z_0, \mathrm{d}Z_{n+2} \rangle = (\cos u^{n+1} - \alpha \sin u^{n+1}) \sum_i \lambda^i (\omega^i)^2\,. \tag{25}$$

Cette expression de ϕ montre que l'hypersurface (Z_0) est minimale et *de nombre type n* [8]. Il est manifeste que l'on obtient une seconde hypersurface possédant les mêmes propriétés en considérant le produit cartésien (indécomposable) de la variété (X_{n+1}) et de N_{n+2}. D'où le

Théorème. *Le produit cartésien indécomposable de chacune des variétés pseudo-ombilicales, de courbure moyenne constante et de m-index $V^n = 1$ de la triade avec la quasinormale principale N_{n+2} afférente à la variété de base détermine deux hypersurfaces minimales de nombre type n.*

Considérons maintenant les deux autres côtés du triangle et posons pour commencer

$$Y = X_0 \cos t + X_{n+2} \sin t\,. \tag{26}$$

A l'aide de la connexion (1) on trouve

$$\mathrm{d}Y = \bar{Y} \mathrm{d}t + (\cos t - \lambda^i \sin t)\, \omega^i X_i\,, \tag{27}$$

où

$$\bar{Y} = -X_0 \sin t + X_{n+2} \cos t\,. \tag{28}$$

On lit facilement sur (27) que la droite X_0X_{n+2} est l'élément générique d'un système $\mathscr{L}_{n+1}$ à n paramètres, système qui possède n variétés focales dont les points génériques sont

$$F_i = f(\lambda^i X_0 + X_{n+2}) \tag{29}$$

(f facteur de normalisation). Les développables de ce système correspondent aux lignes de courbure des variétés (X_{i*}). Par un procédé analogue on trouve que le côté $X_{n+1}X_{n+2}$ décrit un système du même type $\mathscr{L}_0$ dont les foyers du rayon $X_{n+1}X_{n+2}$ sont

$$F_i = g(\lambda^i X_{n+1} - \alpha X_{n+2}) \tag{30}$$

(g facteur de normalisation). A l'aide de la connexion (1), les formes métriques fondamentales des variétés focales s'écrivent:

$$\langle \mathrm{d}F_i, \mathrm{d}F_i \rangle = \{\mathrm{d}(f\lambda^i)\}^2 + (\mathrm{d}f)^2 + f^2 \sum_j (\lambda^i - \lambda^j)^2 (\omega^j)^2 , \tag{31}$$

$$\langle \mathrm{d}F_i, \mathrm{d}F_i \rangle = \{\mathrm{d}(g\lambda^i)\}^2 + (\mathrm{d}g)^2 + g^2\alpha^2 \sum_j (\lambda^i - \lambda^j)^2 (\omega^j)^2 . \tag{32}$$

La simple lecture de ces formes montre aussitôt que si l'application $f: (X_0) \to (X_{n+1})$ est isométrique, alors il en est de même pour les applications $(F_i) \to (\overline{F}_i)$, d'où le

Théorème. *Les quasi-normales principales N_0 et N_{n+1} afférentes aux variétés pseudoombilicales de la triade τ engendrent des systèmes de droites $\mathscr{L}_0$, $\mathscr{L}_{n+1}$ à n paramètres dont les n développables correspondent aux lignes de courbure (communes) des variétés (X_{i*}) de la triade τ. Dans le cas où les deux variétés sont isométriques, les variétés focales de $\mathscr{L}_0$ et $\mathscr{L}_{n+1}$ se groupent en n couples de variétés n-dimensionnelles qui sont elles aussi isométriques.*

6. Dans l'espace euclidien B. Y. Chen [2] a établi le théorème suivant: „Let x: $M^n \to E^{n+2}$ be an isometric immersion of a Riemannian manifold M^n of dimension n into an euclidean space E^{n+2} of dimension $n + 2$. Then M^n is a pseudo-ombilical submanifold of E^{n+2} with constant mean curvature if and only if M^n is a minimal hypersurface of a hypersphere of E^{n+2}“. Il est aisé de voir que ce théorème peut être étendu à l'espace elliptique. En effet, on vérifie à l'aide de la connexion (1) que le point

$$P = h(\alpha X_0 + X_{n+1}) , \tag{33}$$

où h est un facteur de normalisation, est fixe.

7. En nous rapportant à [7] il est facile de constater que l'on peut obtenir la triade de la théorie précédente en partant de la variété de base $\overline{V}^n$. Nous ne développerons pas ici les calculs mais nous indiquons seulement que pour réaliser le but envisagé on doit partir *d'une variété de codimension* 2 *dont la forme de torsion et la* $(n - 1)$-*ième courbure moyenne sont nulles et dont l'invariant arithmétique de Chern est* 1.

Il n'est pas sans intérêt de mentionner que si l'on se place dans le cas de la variété générale du numéro 1, la quasi-normale N_0 décrit toujours un système de droites à n paramètres et possédant n nappes focales. Mais cela n'est pas le cas pour les systèmes engendrès par les droites X_0X_{n+1} et X_0X_{n+2}. Il est facile de vérifier que la nullité de la forme de torsion est une condition nécessaire et suffisante pour que cela ait lieu. En prenant les hypothèses faites au numéro 2, on voit que cela implique que si X_{n+1} est le point de courbure moyenne correspondant à X_0, alors X_0 l'est pour X_{n+1}.

8. Supposons maintenant que l'immersion π se rapporte à une variètè V^n de codimension N de P_e^{n+N}. Nous associons de nouveau un repère orthonormé $\mathscr{R}_{X_0} \equiv \equiv \{X_A; A, B, C = 0, \ldots, n + N\}$ au point générique $X_0 \in V^n$. La connexion (1) et les équations de structure restent valable, V^n étant maintenant une variété intégrale du système $\omega^{n+r} = 0$ $(r, s = n + 1, \ldots, n + N)$. Le lemme da Cartan donne ici à l'aide de (2):

$$\gamma_{ij}^r = \gamma_{ji}^r . \tag{34}$$

Le système de droites engendré par la droite X_0X_{n+N} est un système à n paramètres et possédant n nappes focales si et seulement si

$$\omega_r^{n+N} = 0 . \tag{35}$$

Cette condition nécessaire et suffisante exprime donc que

$$T(X_0) \equiv T(X_{n+N}) . \tag{36}$$

Par un changement de repère qui laisse invariant l'espace orthogonal ou l'espace dual de $X_0 \cup T(X_0)$, on peut toujours supposer que X_{n+N} est le point de courbure moyenne si la variété $V^n(X_0)$ n'est pas minimale. L'hypothèse faite implique

$$\gamma^{n+1} = \ldots = \gamma^{n+N-1} = 0 . \tag{37}$$

Supposons en plus que V^n est pseudo-ombilicale, c.-à-d.

$$\gamma_{ij}^{n+N} = \alpha\delta_{ij} . \tag{38}$$

La différentiation extérieure de $\omega_i^{n+N} = \alpha\omega^i$ donne aussitôt α = const. D'où le

Théorème. *Soit X_0 le point générique d'une variété V^n de codimension N de P_e^{n+N} dont le point de courbure moyenne décrit une variété de codimension N ayant le même espace tangent dual. La propriété de V^n d'être pseudo-ombilicale entraîne la constance de la courbure moyenne scalaire de V^n.*

Finallement, par des considérations analogues, il résulte de tout ce qui précède le

Théorème. *Soit V^n une variété de codimension N de P_e^{n+1} qui est pseudo-ombilicale et dont le point de courbure moyenne décrit une variété $\bar{V}^n$ n-dimensionnelle ayant le même espace tangent dual que V^n aux points homologues. Alors la variété $\bar{V}^n$ est aussi pseudo-ombilicale et de courbure moyenne scalaire constante et le point de courbure moyenne de cette variété décrit V^n. Ces deux variétés sont de m-index $V^n = N - 1$ et tout point invariablement lié à la droite D qui joint les points homologues de V^n et $\bar{V}^n$ est lui aussi le point générique d'une variété pseudo-ombilicale, de m-index $V^n = N - 1$ et de courbure moyenne scalaire constante. Le produit cartésien indécomposable de chacune des variétés V^n et $\bar{V}^n$ avec la droite D détermine deux variétés de dimension $n + 1$, minimales et de nombre type n. Les variétés V^n et $\bar{V}^n$ sont conformes et les droites qui joignent les points homologues passent par un point fixe.*

Bibliographie

[1] *E. Cartan:* La géométrie des espaces de Riemann, Mém. Sc. Math., Fasc. IX, Gauthier-Villars, Paris (1925).

[2] *B. Y. Chen:* On an inequality of mean curvatures of higher degree, Bull. Am. Math. Soc., *77* (1971).

[3] *B. Y. Chen:* Minimal hypersurfaces in an *m*-sphere, Proc. Am. Soc., *29* (1971).

[4] *S. S. Chern & N. H. Kuiper:* Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemann manifolds in Euclidean space, Ann. of Math., vol. *56*, 3 (1952).

[5] *T. Ōtsuki:* Minimal hypersurfaces in a Riemannian manifold of constant curvature, Am. J. of Math., *192* (1970).

[6] *R. Rosca & F. Borel:* Sur les autotransformations infinitésimales équivalentes des variétés minimales à deux dimensions d'un espace elliptique *n*-dimensionnel, C.R. Acad. Sc. Paris, t. *268*, p. 399—401 (1969), série A.

[7] *R. Rosca, L. Vanhecke, L. Verstraelen:* Triade rectangulaire de variétés bidimensionnelles dont l'une est minimale et les deux autres pseudo-ombilicales et de *m*-index $V^2 = 1$, immergées dans un espace elliptique à quatre dimensions, Bull. Soc. Math. Belg. *XXIV*, 3 (1972).

[8] *R. Takagi:* Homogeneous hypersurfaces in a sphere with the type number 2, Tôhoku Math. Journ., *23* (1971).

[9] *Y. C. Wong:* A note on complementary subspaces in a Riemannian space, Bull. Am. Soc., *49* (1943).

[10] *K. Yano* and *B. Y. Chen:* Minimal submanifolds of a higher dimensional sphere, Tensor, *22* (1971).

Adresse de l'auteur: Katholieke Universiteit te Leuven, Wiskundig Instituut, Celestijnenlaan 200B, B — 3030 Heverlee, Belgique.