František Machala
Projektive Abbildung von Moduln

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 24 (1974), No. 1, 26–39

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/101214`

Czechoslovak Mathematical Journal, 24 (99) 1974, Praha

PROJEKTIVE ABBILDUNG VON MODULN

FRANTIŠEK MACHALA, Olomouc

(Eingegangen am 26. September 1972)

Zu klassischen Ergebnissen der projektiven Geometrie gehört der sogenannte Fundamentalsatz der projektiven Geometrie: Jeder Isomorphismus von Verbänden, die von den Unterräumen zweier Vektorräume erzeugt sind (sonst auch projektive Abbildung), wird durch die halblineare Abbildung dieser Räume induziert. (Zum Beweis siehe z. B. [1].)

L. A. SKORNJAKOV verallgemeinerte diesen Satz für die Kategorie von Moduln. Bevor wir das Grundergebnis von [3] zitieren werden, seien zwei Definitionen erinnert.

Es gebe linke unitäre Moduln M, N über den Ringen R, Q mit Einselementen, kurz (R, M), (Q, N). (Im folgenden wird stets unter M ein R-Modul und unter N ein Q-Modul verstanden.) Die projektive Abbildung von Moduln M, N ist ein Isomorphismus von Verbänden, die von den Untermoduln der obigen Moduln erzeugt sind, der die bijektive Abbildung der Menge monogener Untermoduln aus M auf die Menge monogener Untermoduln aus N induziert, wobei es mindestens einen durch das freie Element erzeugten Untermodul aus M gibt, dem ein durch das freie Element erzeugter Untermodul aus N entspricht.

Der Modul M wird als zulässig bezeichnet, wenn folgende Bedingungen gelten:

1. Für alle $x, y, z \in M$ gibt es ein freies Element $w \in M$ derart, dass $(Rx + Ry + Rz) \cap Rw = o$ gilt.
2. Sind $x, y, u \in M$ freie Elemente, $t \in M$ und $Rx \cap Ry \neq o$, $Ru \cap Rt \neq o$, so gibt es ein freies Element $w \in M$ derart, dass $Rw \cap Rt = Rw \cap Rx = Rw \cap Ry = Rw \cap Ru = o$ gilt.

Das Theorem von [3] lautet dann: *R sei ein Ring mit Einselement* 1, *der die nachstehende Bedingung erfült*:

(P) *Gilt $\alpha\beta = 1$ für gewisse Elemente $\alpha, \beta \in R$, so existiert ein Element $\gamma \in R$ derart, dass $\gamma\alpha = 1$ ist.*

Es seien ferner (R, M) ein zulässiger Modul und (Q, N) ein Modul. Dann wird jede projektive Abbildung vom Modul (R, M) auf den Modul (Q, N) durch die halblineare Abbildung von Moduln (R, M), (Q, N) induziert.

In [2] wird gezeigt, dass in diesem Theorem die Voraussetzung (P) nicht notwendig ist und das Theorem wird hier auf eine breitere Modulnklasse ferallgemeinert.

Der vorliegende Artikel knüpft an die zitierten Arbeiten an und verallgemeinert diese noch weiter. Im ersten Teil werden notwendige Begriffe wie z. B. vollständiger Untermodul vom Modul M, relativ-freies Element, A-freies und freies Element im Modul eingeführt. Es wird weiter eine vollständige Gruppe vom Modul M definiert und mit deren Hilfe zu jedem Modul, der ein relativ-freies Element enthält, ein zugeordneter Modul konstruiert. Durch die Definition 3 wird die projektive Abbildung etwas allgemeiner als in [3] definiert, da sich diese nicht nur auf die Betrachtung von Moduln mit freien Elementen beschränkt. Die Definition 4 erklärt, wann die projektive Abbildung von Moduln durch den Isomorphismus deren vollständigen Gruppen induziert ist.

Der zweite Teil wurde der Verallgemeinerung des Satzes von Skornjakov gewidmet. Durch die Definition 7 werden die relativ-zulässigen Moduln eingeführt: Sind alle vollständigen Untermoduln von Modul M isomorph, so ist M relativ-zulässig, wenn er ähnlichen Bedingungen wie der zulässige Modul genügt, in welchen jedoch freie Elemente durch relativ-freie ersetzt werden. Das resultierende Theorem lautet dann: *Jede projektive Abbildung vom relativ-zulässigen Modul (R, M) auf den Modul (Q, N) wird durch eine halblineare Abbildung von zu (R, M), (Q, N) zugeordneten Moduln induziert.*

Der Bewies von diesem Theorem verläuft nach dem Schema der Beweisführung zum Satz von Skornjakov aus [3]. Zum Schluss werden noch einige Forderungen des bewiesenen Theorems angegeben.

I

Die Bezeichnungen (R, M), (Q, N), gegebenenfalls nur M, N, bedeuten jeweils linke unitäre Moduln M, N über den Ringen R, Q mit Einselementen. Es gebe also einen Modul M. Jedes Element $x \in M$ erzeugt einen monogenen Untermodul Rx. Der Anullator $A(S)$ einer Untermenge $S \subseteqq M$ wird erklärt als eine Menge aller Elemente $\alpha \in R$, für die $\alpha S = o$ gilt. Jeder Anullator stellt ein Linksideal von Ring R dar. Für jedes $x \in M$ bezeichnen wir mit M_x die Menge aller Elemente $t \in M$, für die $A(x) \subseteqq A(t)$ gilt. Für jede $y, z \in M_x$ ist $A(x) \subseteqq A(y - z)$ und demnach $y - z \in M_x$. Die Menge M_x ist eine Untergruppe der additiven Gruppe von Modul M.

Satz 1. *Für monogene Untermoduln U, V vom Modul M sind folgende Behauptungen äquivalent:*

(a) *Es existiert ein Homomorphismus (Isomorphismus) von Modul U auf V.*

(b) *Es existieren erzeugende Elemente u, v von Moduln U, V derart, dass $A(u) \subseteqq$ $\subseteqq A(v)$ $(A(u) = A(v))$ ist.*

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b). Es sei φ ein Homomorphismus vom Modul U auf V. Da U monogen ist, gibt es ein Element $u \in U$ derart, dass $U = Ru$. Setzt man nun $u\varphi = v$, so ergibt sich $A(u) \subseteqq A(v)$ und $V = Rv$. Ist speziell φ ein Isomorphismus, so ist $u = v\varphi^{-1}$ und daraus $A(v) \subseteqq A(u)$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Es gelten folgende Beziehungen: $A(u) \subseteqq A(v)$, $U = Ru$, $V = Rv$. Für jedes $\alpha \in R$ wird $(\alpha u)\,\varphi = \alpha v$ gesetzt. Somit ist die Abbildung von der Menge Ru auf Rv definiert, da aus der Beziehung $\alpha u = \beta u$ und vermöge $A(u) \subseteqq A(v)$ folgt $(\alpha u)\,\varphi = \alpha v = (\beta u)\,\varphi = \beta v$. Die Abbildung φ stellt offensichtlich einen Homomorphismus dar. Ist $A(u) = A(v)$, so ergibt sich aus $\alpha v = o$ die Beziehung $\alpha u = o$, so dass φ ein Isomorphismus ist.

Satz 2. *Es sei $S = Ru$ ein von einem Element $u \in M$ erzeugter monogener Untermodul. Folgende Behauptungen sind äquivalent:*

(a) *Es existiert ein Homomorphismus von Modul S auf einen beliebigen monogenen Untermodul aus M.*

(b) *In jedem monogenen Untermodul P aus M gibt es ein Element $y \in M_u$, $P = Ry$.*

Der Beweis wird durch Anwendung des Satzes 1 vollbracht.

Definition 1. Ein monogener die äquivalenten Forderungen (a), (b) des Satzes 2 erfüllender Untermodul heisst vollständig. Ein Element $x \in M$ heisst relativ-frei in M genau dann, wenn es einen vollständigen Untermodul vom Modul M erzeugt. Ein Element $x \in M$ ist A-frei bzw. frei, wenn $M_x = M$ bzw. $A(x) = o$ gilt.

Bemerkung 1. Jedes A-freie Element ist relativ-frei und jedes freie Element ist A-frei.

Definition 2. Eine Gruppe M_x wird genau dann vollstädig genannt, wenn das Element x relativ-frei ist.

Satz 3. a) *Ist M_x eine vollständige Gruppe von Modul M und gilt $M_x = M_y$, so ist y ein relativ-freies Element vom Modul M.*

b) *Ein Element $x \in M$ ist genau dann A-frei, wenn $A(x) = A(M)$. Ein relativ-freies Element $x \in M$ ist genau dann A-frei, wenn $A(x)$ ein zweiseitiges Ideal in R ist.*

c) *Enthält der Modul M ein A-freies Element x, so sind alle vollständigen Untermoduln aus M isomorph.*

Beweis. a) Aus der Beziehung $M_x = M_y$ ergibt sich $A(x) = A(y)$. Die Moduln Rx, Ry sind nach Satz 1 isomorph. Der Modul Ry ist nach Satz 2 vollständig und das Element y ist relativ-frei.

b) Ist $M_x = M$, so gilt $A(x) \subseteqq A(y)$ für alle $y \in M$ und danach $A(x) \subseteqq A(M)$. Es gilt zugleich $A(M) \subseteqq A(x)$ und man erhält $A(x) = A(M)$. Ist umgekehrt $A(x) = A(M)$, so ist $A(x)\, y = o$ für beliebiges Element $y \in M$ und folglich $M_x = M$. Der Anullator $A(M)$ stellt ein zweiseitiges Ideal in R dar. Nehmen wir nun an, dass ein Anullator $A(x)$ eines relativ-freien Elements $x \in M$ ein zweiseitiges Ideal in R ist und wählen wir ein Element $y \in M$. Hiernach besteht ein Homomorphismus φ vom Modul Rx auf Ry, wo $x'\varphi = y$ und $x' = \alpha x$ für gewisses $\alpha \in R$. Da $A(x)\, \alpha \subseteqq A(x)$ ist, gilt $A(x)\, y = A(x)\,(\alpha x \varphi) = (A(x)\, \alpha)\, x\varphi = o$ und man erhält $A(x) \subseteqq A(y)$, $y \in M_x$.

c) Es gebe ein A-freies Element $x \in M$ und wählen wir hierzu beliebige vollständige Untermoduln U, V aus M. Es existiert ein Homomorphismus φ_1 von Modul V auf Rx. Ist $v\varphi_1 = x$, so folgt $V = Rv$. Ähnlich existiert ein Homomorphismus φ_2 von Modul U auf V. Wenn $u\varphi_2 = v$ ist, so $Ru = U$. Die Abbildung $\varphi_2\varphi_1$ ist ein Homomorphismus von U auf Rx und es gilt $u\varphi_2\varphi_1 = v\varphi_1 = x$. Nach Satz 1 ist $A(u) \subseteqq A(v) \subseteqq A(x)$ und nach b) gilt $A(u) = A(v) = A(x)$. Die Moduln U, V sind isomorph.

Satz 4. *Es seien M_x eine vollständige Gruppe von Modul M und S, S' zwei Untermoduln aus M. Folgende Behauptungen sind äquivalent*:

(a) $S \subseteqq S'$ $(S = S')$

(b) $M_x \cap S \subseteqq M_x \cap S'$ $(M_x \cap S = M_x \cap S')$.

B e w e i s. Der Beweis wird bloss in der Richtung (b) $\Rightarrow$ (a) durchgeführt. Als gelted werde vorausgesetzt $M_x \cap S \subseteqq M_x \cap S'$ und es gebe ein Element $s \in S$, $s \notin S'$. Im modul Rs gibt es ein Element $u \in M_x$ derart, dass $Rs = Ru$. Offensichtlich $u \in M_x \cap S$. Nach der Voraussetzung ist auch $u \in M_x \cap S'$ und $Ru \subseteqq S'$, d. h. $s \in S'$ was jedoch ein Widerspruch ist. Somit gilt $S \subseteqq S'$. Der weitere Teil des Beweises ist evident.

Es sei M_x eine vollständige Gruppe vom Modul M. Eine Menge $\bar{R}_x$ von Elementen $\xi \in R$, für die $A(x)\, \xi \subseteqq A(x)$ gilt, stellt einen Unterring mit Eins in R dar und $A(x)$ ist ein zweiseitiges Ideal in $\bar{R}_x$. Bezeichnen wir mit $R_x = \bar{R}_x / A(x)$ den zugehörigen Restklassenring und mit $\bar{\xi} = \xi + A(x)$, $\xi \in \bar{R}_x$ seine Elemente. Wenn x ein A-freies Element in M ist, so gilt $\bar{R}_x = R$, wenn x ein freies Element ist, so gilt $R_x = R$. Für jede $u \in M_x$, $\bar{\xi} \in R_x$ wird $\bar{\xi} u = \xi u$ gesetzt. Diese Definition ist sinnvoll: Werde vorausgesetzt, dass $\bar{\xi} = \bar{\mu}$. Dann existiert ein Element $\alpha \in A(x)$ derart, dass $\mu = \xi + \alpha$ und man erhält $\bar{\mu} u = (\xi + \alpha)\, u = \bar{\xi} u$. Wählen wir ein beliebiges Element $\alpha \in A(x)$. Dann gilt $\alpha(\bar{\xi} u) = \alpha \xi u$. Da $\xi \in \bar{R}_x$ ist, gilt $\alpha \xi \in A(x)$ und mithin $\alpha(\bar{\xi} u) = o$. Hieraus ergeben sich weiter $A(x) \subseteqq A(\bar{\xi} u)$ und $\bar{\xi} u \in M_x$. Die Gruppe M_x mit der eben eingeführten äusseren Operation stellt einen unitären R_x-Modul dar, den wir mit (R_x, M_x) bezeichnen und zum Modul (R, M) z u g e o r d n e t benennen. Ist x ein freies Element im Modul M, so gilt $(R, M) = (R_x, M_x)$. Ist ein Element $u \in M_x$ relativ-frei im Modul M, so ist es frei im (R_x, M_x). Ein zu (R_x, M_x) zugeordneter Modul ist wiederum (R_x, M_x). Ist S ein Untermodul im M, so ist $S \cap M_x$ ein Untermodul im (R_x, M_x). Wenn für ein $u \in M_x$ die Beziehung $M_x = M_u$ gilt, so ist $M_x \cap Ru = R_x u$: Die Inklusion $R_x u \subseteqq M_x \cap Ru$ ist offensichtlich, denn $M_x \cap Ru$ ist ein R_x-Modul. Es sei umgekehrt ein Element $v = \alpha u \in M_x$ gegeben. Da $A(x) = A(u)$ ist, gilt $A(u) \subseteqq A(\alpha u)$, d. h. $A(u)\,\alpha \subseteqq A(u)$ und $A(x)\,\alpha \subseteqq A(x)$. Folglich ist $\alpha \in \bar{R}_x$ und $v = \alpha u = \bar{\alpha} u \in R_x u$. Es erweist sich aus dem Beispiel am Schluss des ersten Teiles, dass die Gleichheit $R_x u = M_x \cap Ru$ im Falle $M_x \neq M_u$ nicht gelten muss.

Definition 3. Es gebe unitäre Moduln M, N und bezeichnen wir mit $L(M)$, $L(N)$ die Verbände deren Untermoduln mit den Operationen $\cap$, $+$. Ein Isomorphismus von Verbänden $L(M)$, $L(N)$, der eine bijektive Abbildung von Mengen monogener Untermoduln aus M, N induziert, wird eine projektive Abbildung von Moduln M, N genannt. Wenn eine projektive Abbildung von Moduln M, N existiert, so heissen diese Moduln projektiv äquivalent. Eine projektive Abbildung vom Modul M auf M wird autoprojektiv genannt.

Bemerkung 2. Ist M_x eine vollständige Gruppe vom Modul M, so existiert für jeden monogenen Untermodul U aus M ein $u \in M_x$ derart, dass $Ru = U$. Jeder Untermodul S aus M stellt die Summe monogener Untermoduln dar und lässt sich in der Form $S = \sum_{\nu \in J} Ru_\nu$ schreiben, wo $u_\nu \in M_x$ für alle $\nu \in J$ gilt.

Definition 4. Die projektive Abbildung $\varkappa$ von Moduln M, N ist induziert durch den Isomorphismus σ deren vollständigen Gruppen M_x, N_y, wenn für jeden Untermodul $S = \sum_{\nu \in J} Ru_\nu$, $u_\nu \in M_x$ die Beziehung $S^\varkappa = \sum_{\nu \in J} Qu_\nu^\sigma$ gilt.

Satz 5. *Es sei σ ein Isomorphismus vollständiger Gruppen M_x, M_y von Moduln M, N. Folgende Behauptungen sind äquivalent:*

(a) *σ induziert die projektive Abbildung von Moduln M, N.*

(b) *Für beliebige $u_\nu \in M_x$ gilt $[M_x \cap (\sum_{\nu \in J} Ru_\nu)]^\sigma = N_y \cap (\sum_{\nu \in J} Qu_\nu^\sigma)$.*

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b). Nehmen wir an, dass der Isomorphismus σ die projektive Abbildung $\varkappa$ von Moduln M, N induziert und dass $u \in M_x \cap (\sum_{\nu \in J} Ru_\nu)$, $u_\nu \in M_x$ ist. Dann ist $u \in M_x$ und $u^\sigma \in N_y$. Es gilt zugleich $u \in \sum_{\nu \in J} Ru_\nu$ und folglich auch $Ru \subseteqq \sum_{\nu \in J} Ru_\nu$. Ferner gilt nach den Definitionen 3,4: $(Ru)^\varkappa = Qu^\sigma$, $(\sum_{\nu \in J} Ru_\nu)^\varkappa = \sum_{\nu \in J} Qu_\nu^\sigma$ und $(Ru)^\varkappa \subseteqq (\sum_{\nu \in J} Ru_\nu)^\varkappa$. Somit gilt $Qu^\sigma \subseteqq \sum_{\nu \in J} Qu_\nu^\sigma$, $u^\sigma \in \sum_{\nu \in J} Qu_\nu^\sigma$ und man erhält $[M_x \cap (\sum_{\nu \in J} Ru_\nu)]^\sigma \subseteqq N_y \cap (\sum_{\nu \in J} Qu_\nu^\sigma)$. Es sei umgekehrt ein Element $v \in N_y \cap (\sum_{\nu \in J} Qu_\nu^\sigma)$ gegeben. Dann gibt es ein Element $u \in M_x$ derart, dass $u^\sigma = v$, d. h. $Qu^\sigma \subseteqq \sum_{\nu \in J} Qu_\nu^\sigma$ ist. Dabei gilt $(Ru)^\varkappa = Qu^\sigma$, $(\sum_{\nu \in J} Ru_\nu)^\varkappa = \sum_{\nu \in J} Qu_\nu^\sigma$ und somit $Ru \subseteqq \sum_{\nu \in J} Ru_\nu$. Man erhält $u \in M_x \cap (\sum_{\nu \in J} Ru_\nu)$ und $u^\sigma \in [M_x \cap (\sum_{\nu \in J} Ru_\nu)]^\sigma$. Es gilt $N_y \cap (\sum_{\nu \in J} Qu_\nu^\sigma) \subseteqq [M_x \cap (\sum_{\nu \in J} Ru_\nu)]^\sigma$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Wir werden nachweisen, dass der Isomorphismus σ eine projektive Abbildung $\varkappa$ von Moduln M, N vermöge einer Vorschirft $\sum_{\nu \in J} Ru_\nu \to \sum_{\nu \in J} Qu_\nu^\sigma$, $u_\nu \in M_x$ induziert. Es gebe $S = \sum_{\nu \in J} Ru_\nu = \sum_{\mu \in H} Rv_\mu$, wo $u_\nu, v_\mu \in M_x$ für alle $\nu \in J$, $\mu \in H$. Es gilt $M_x \cap S = M_x \cap (\sum_{\nu \in J} Ru_\nu) = M_x \cap (\sum_{\mu \in H} Rv_\mu)$. Nach der Voraussetzung ist $[M_x \cap (\sum_{\nu \in J} Ru_\nu)]^\sigma = N_y \cap (\sum_{\nu \in J} Qu_\nu^\sigma) = [M_x \cap (\sum_{\mu \in H} Rv_\mu)]^\sigma = N_y \cap (\sum_{\mu \in H} Qv_\mu^\sigma)$. Nach Satz 4 erhalten wir $\sum_{\nu \in J} Qu_\nu^\sigma = \sum_{\mu \in H} Qv_\mu^\sigma$. Folglich ist $\varkappa : \sum_{\nu \in J} Ru_\nu \to \sum_{\nu \in J} Qu_\nu^\sigma$ eine Abbildung vom Verband $L(M)$ in den Verband $L(N)$. Die Bedingung (b) lässt sich für jeden beliebigen Untermodul $S \subseteqq M$ in der Form $(M_x \cap S)^\sigma = N_y \cap S^\varkappa$ schrieben. Wählen wir einen beliebigen Untermodul $V = \sum_{\nu \in J} Qv_\nu$, $v_\nu \in N_y$. Da σ ein Isomorphismus der Gruppen M_x, N_y ist, gibt es für alle $\nu \in J$ Elemente $u_\nu \in M_x$ so beschaffen, dass $u_\nu^\sigma = v_\nu$ ist. Dann gilt $(\sum_{\nu \in J} Ru_\nu)^\varkappa = \sum_{\nu \in J} Qu_\nu^\sigma = V$ und die Abbildung $\varkappa$ ist surjektiv. Setzen wir voraus, dass $S^\varkappa = U^\varkappa$ gilt. Hiernach $N_y \cap S^\varkappa = N_y \cap U^\varkappa = (M_x \cap S)^\sigma = (M_x \cap U)^\sigma$ und nach Satz 4 ist $S = U$. Die Abbildung $\varkappa$ ist bijektiv. Es gebe Untermoduln S, U aus M derart, dass $S \subseteqq U$ ist. Dann gilt $M_x \cap S \subseteqq M_x \cap U$ und $(M_x \cap S)^\sigma \subseteqq (M_x \cap U)^\sigma$, d. h. $N_y \cap S^\varkappa \subseteqq N_y \cap U^\varkappa$ und $S^\varkappa \subseteqq U^\varkappa$. $\varkappa$ ist ein Isomorphismus der Verbände $L(M)$, $L(N)$. Offensichtlich ist $\varkappa$ eine projektive Abbildung von Moduln M, N.

Definition 5. Eine halblineare Abbildung σ von Moduln M, N ist soein Isomorphismus deren additiven Gruppen, dass für alle $\alpha \in R$, $x \in M$ die Beziehung $(\alpha x)^\sigma = \alpha^{\sigma'} x^\sigma$ gilt, wo σ' ein Isomorphismus der Ringe R, Q ist.

Satz 6. *Möge ein Modul M ein A-freies Element x und ein Modul N ein A-freies Element y enthalten. Jede halblineare Abbildung σ von zu M, N zugeordneten Moduln (R_x, M), (Q_y, N) induziert eine projektive Abbildung von Moduln M, N.*

Beweis. Es genügt zu beweisen, dass jede halblineare Abbildung σ von Moduln (R_x, M), (Q_y, N) der Bedingung (b) aus Satz 5 genügt. Für jede $u \in M$, $v \in N$ gilt $R_x u = Ru$, $Q_y v = Qv$ und folglich $(R_x u)^\sigma = (Ru)^\sigma = Q_y u^\sigma = Qu$. Hieraus erhält man

$$[M_x \cap (\sum_{\nu \in J} Ru_\nu)]^\sigma = (\sum_{\nu \in J} Ru_\nu)^\sigma = (\sum_{\nu \in J} R_x u_\nu)^\sigma = \sum_{\nu \in J} (R_x u_\nu)^\sigma = \sum_{\nu \in J} Q_y u_\nu^\sigma = \sum_{\nu \in J} Qu_\nu^\sigma = N_y \cap (\sum_{\nu \in J} Qu_\nu^\sigma).$$

Folgerung. Enthält ein Modul (R, M) ein A-freies Element x, so ist er mit dem zugeordneten Modul (R_x, M) projektiv äquivalent: Wird im Satz 6 $Q = R_x$, $N = M$ gesetzt, so ist der Modul (R_x, M) sowohl zu (R, M) als auch zu (Q, N) zugeordnet, seine identische Abbildung ist eine halblineare und induziert daher eine projektive Abbildung von Moduln (R, M), (R_x, M).

Beispiel. Wir wollen zeigen, dass Satz 6 nicht für alle, ein relativ-freies Element enthaltende, Moduln gilt. Es gebe eine Vektorraum V über einem Körper F und nehmen wir der Einfachheit wegen an, $\dim V = 3$. Der Ring aller Endomorphismen vom Raum V wird mit R bezeichnet. Ist S ein Unterraum in V und $\varphi \in R$ ein Endomorphismus derart, dass $V\varphi = S$, so ist die Abbildung $S \to R\varphi$ ein Isomorphismus von Verbänden der Unterräume aus V und Linksidealen aus R. (Vgl. [1]) Es gilt $\psi \in R\varphi$ genau dann, wenn $V\psi \subseteqq V\varphi$ ist. Wählen wir nun einen Homomorphismus $\varphi \in R$ so, dass $V\varphi = Fa$, $a \neq o$ und betrachten wir auf dem Ring R die Struktur eines R-Linksmoduls. Dann lässt sich $R\varphi$ als dessen Untermodul auffassen. Bezeichnen wir mit ι die identische Abbildung von Raum V und setzen wir $R/R\varphi = R(\iota + R\varphi) = R\bar{\iota} = Rx = M$. Das Element x ist in M relativ-frei und es gilt $A(x) = R\varphi$. Betrachten wir ein Element $\xi \in R$ für welches $V\xi = Fb$, $V = V\xi \oplus \operatorname{Ker}(\xi)$, $Fa \subseteqq \operatorname{Ker}(\xi)$ gilt. Wird $u = \xi x$ gesetzt, so folgt $A(u) = R\gamma$, wo $V\gamma = \operatorname{Ker}(\xi)$. Wegen der Beziehung $V\varphi \subseteqq V\gamma$ gilt

$$A(x) \subseteqq A(u)\,. \tag{1}$$

Wählen wir einen Unterraum $Fc \subseteqq V$ derart, dass $V = Fa \oplus Fb \oplus Fc$. Dann kann jedes Element $y \in V$ in der Form $y = a' + b' + c'$, $a' \in Fa$, $b' \in Fb$, $c' \in Fc$ geschrieben werden.

Wählen wir ferner einen Unterraum Fz derart, dass $\operatorname{Ker}(\xi) = Fa \oplus Fz$ und β sei ein Isomorphismus von Unterräumen Fa, Fz. Durch die Vorschrift $y\alpha = a'\beta + b'$ wird der Endomorphismus $\alpha \in R$ bestimmt. Somit ergibt sich $V\alpha = Fz \oplus Fb$, $\operatorname{Ker}(\alpha) = Fc$, $A(\alpha x) = R\gamma'$, wo $V\gamma' = Fc$. Wegen $Fc \cap Fa = o$ gilt auch $R\varphi \cap R\gamma' = o$ und

$$A(x) \cap A(\alpha x) = o\,. \tag{2}$$

Ferner ist $A(\alpha u) = A(\alpha\xi x) = R\gamma''$, wo $V\gamma'' = Fa \oplus Fc$. Aus der Beziehung $V\varphi \subseteqq V\gamma''$ ergeben sich weiter $R\varphi \subseteqq R\gamma''$ und

$$A(x) \subseteqq A\,(\alpha u)\,. \tag{3}$$

Betrachten wir nun zwei Moduln (R, M), (Q, N), wo $Q = R_x$, $N = M_x$. Die Tatsache, dass der Modul (R_x, M_x) den beiden Moduln (R, M), (Q, N) zugeordnet ist ermöglicht uns $R_x = Q_y$, $M_x = N_y$ zu setzen. Die identische Abbildung σ von Modul (R_x, M_x) ist seine halblineare Abbildung. Wir wollen zeigen, dass die Abbildung σ keine projektive Abbildung von Moduln (R, M), (Q, N) induziert. Nach (1) gilt $u \in M_x$ und $(M_x \cap Ru)^\sigma = M_x \cap Ru$, $N_y \cap Qu^\sigma = M_x \cap R_x u = R_x u$. Nach (3) ist $\alpha u \in M_x$ und folglich $\alpha u \in M_x \cap Ru$. Nach (2) liegt $A(x)$ nicht in $A(\alpha x)$ und demnach auch $A(x)\,\alpha$ nicht in $A(x)$ und somit $\alpha \notin \bar{R}_x$. Daraus ergibt sich die Beziehung $\alpha u \notin R_x u$. Es gilt also $R_x u \neq M_x \cap Ru$ und daraus $(M_x \cap Ru)^\sigma \neq N_y \cap Qu^\sigma$. Nach Satz 5 induziert σ keine projektive Abbildung von Moduln (R, M), (Q, N).

II

Definition 6. Die Untermoduln M_ν, $\nu \in J$ von Modul M heissen unabhängig, wenn $M_{\nu'} \cap \left(\sum_{\nu \neq \nu'} M_\nu \right) = o$ für alle $\nu' \in J$ gilt.

Definition 7. Der Modul M heisst relativ-zulässig, wenn:

1. Für beliebige monogene Untermoduln A, B, C aus M ein vollständiger Modul $S \subseteqq M$ derart existiert, dass die Beziehung $(A + B + C) \cap S = o$ gilt.
2. Alle vollständige Untermoduln aus M sind isomorph.
3. Es gebe Elemente $u, v, w, t \in M$ so beschaffen, dass u relativ-frei ist und $M_u = M_v = M_w$, $t \in M_u$ gilt, wobei $Rv \cap Rw \neq o$, $Ru \cap Rt \neq o$. Dann besteht ein vollständiger Untermodul S derart, dass $S \cap Ru = S \cap Rv = S \cap Rw = S \cap Rt = o$.

Besteht in einem relativ-zulässigen Modul M ein A-freies bzw. freies Element, so heisst er A-zulässig bzw. zulässig.

Bemerkung 3. Enthält ein Modul M ein A-freies Element, so sind nach Satz 3c) alle vollständigen Moduln aus M isomorph. Die in der Definition 7 und in [3] über den zulässigen Modul angeführten Definitionen sind äquivalent.

Bemerkung 4. Ist M_x eine vollständige Gruppe von relativ-zulässigen Modul M, so besteht in jedem vollständigen Untermodul S aus M ein Element u derart, dass $M_x = M_u$. Dem einem relativ-zulässigen Modul (R, M) zugeordnete Modul (R_x, M_x) ist zulässig.

Satz 7. *Es gebe $x, y, z \in M$ derart, dass $y \in M_x$, $Rx \cap (Ry + Rz) = o$. Dann gilt $R(y - z) = (Ry + Rz) \cap [R(x - y) + R(x - z)]$.*

Beweis. Wir setzen $L = (Ry + Rz) \cap [R(x - y) + R(x - z)]$. Es gilt natürlich $R(y - z) \subseteqq L$. Wählen wir ein beliebiges Element $a \in L$. Dann existieren $\alpha, \beta, \xi, \eta \in R$ derart, dass $a = \alpha y + \beta z = \xi(x - y) + \eta(x - z)$ gilt. Hieraus erhalten wir $(\xi + \eta) x = (\alpha + \xi) y + (\beta + \eta) z$. Nach der Voraussetzung gilt $(\xi + \eta) x = o$, d. h. $\xi + \eta \in A(x)$ und auch $\xi + \eta \in A(y)$. Demnach gilt $a = -\eta x + \eta y + \eta x - \eta z = \eta(y - z)$ und $a \in R(y - z)$.

Ähnlich beweisen wir auch folgende Sätze:

Satz 8. *Es seien Rx, Ry, Rz unabhängige Untermoduln von M und $y \in M_x$. Dann gilt $R(x - y - z) = [R(x - y) + Rz] \cap [R(x - z) + Ry]$.*

Satz 9. *Es gebe Elemente $x, y, z \in M$ und $Rx \cap (Ry + Rz) = o$. Dann gilt $R(y + z) = (Ry + Rz) \cap [R(x - y - z) + Rx]$.*

Satz 10. *Es sei $\varkappa$ eine projektive Abbildung von Moduln M, N. Ferner seien Elemente $x \in M$, $y \in M_x$ gegeben, für die $Rx \cap Ry = o$ gilt und setzen wir hierzu $(Rx)^\varkappa = Qx'$. Dann besteht ein einziges Element $y' = h(x, x', y) \in N_{x'}$, für welches $(Ry)^\varkappa = Qy'$, $[R(x - y)]^\varkappa = Q(x' - y')$ gilt.*

Der Beweis wurde in [2] gegeben.

Bemerkung 5. In den Sätzen 11 bis 15 durchwegs wird eine projektive Abbildung $\varkappa$ von Moduln M, N gegeben und die Gültigkeit von $(Rx)^\varkappa = Qx'$ für gewisses $x \in M$ wird vorausgesetzt. Die Funktion h behält sich stets den im Satz 10 angegebenen Sinn.

Satz 11. *Es gebe Elemente $x, y \in M$ und $Rx \cap Ry = o$, $M_x = M_y$. Dann ist $y' = h(x, x', y)$ genau dann, wenn $x' = h(y, y', x)$ ist.* (Der Beweis wurde in [2] gegeben.)

Satz 12. *Es gebe Elemente $x, y, z \in M$ derart, dass die Untermoduln Rx, Ry, Rz unabhängig sind und $M_z \subseteqq M_y \subseteqq M_x$ ist. Aus den Gleichheiten $y' = h(x, x', y)$, $z' = h(x, x', z)$ erhalten wir $z' = h(y, y', z)$.*

Beweis. Ausgehend von den Annahmen des Satzes sind alle Ausdrücke definieren und für die Elemente x, y, z kann man vom Satz 7 Gebrauch machen. Die Moduln Qx', Qy', Qz' sind unabhängig und $y' \in N_{x'}$. Wiederum können wir für Elemente x', y', z' vom Satz 7 Gebrauch machen. Der Beweis verläuft dann ganz analog zum Beweis der Behauptung (4) in [1], Kap. III, § 1.

Satz 13. *Es gebe Elemente $x, y, z \in M$ und $Rx \cap (Ry + Rz) = o$, $y, z \in M_x$. Es bestehe ein Element $w \in M$ derart, dass $(Rx + Ry + Rz) \cap Rw = o$ und $M_x = M_w$ ist. Dann gilt $h(x, x', y + z) = h(x, x', y) + h(x, x', z)$.*

Beweis. Setzen wir $y' = h(x, x', y)$, $z' = h(x, x', z)$. Wegen $y + z \in M_x$ und $Rx \cap R(y + z) = o$ ist der Ausdruck $h(x, x', y + z)$ sinnvoll. Sind die Moduln Rx, Ry, Rz unabhängig, so sind solche auch die Moduln Qx', Qy', Qz' und $y' \in N_{x'}$. Unter Anwendung von Sätzen 8, 9 beweisen wir ähnlich wie in [3], dass $y' + z' = h(x, x', y + z)$ ist. Es mögen die Elemente $x, y, z \in M$ die Voraussetzungen des Satzes erfüllen. Jede von den folgenden Modulntripeln ist von unabhängigen Moduln erzeugt: Rx, $R(y + z)$, Rw und $Rx, Rz, R(w + y)$ und Rx, Ry, Rw. Wegen der Beziehungen $Rx \cap Rw = o$ und $M_x = M_w$ ist der Ausdruck $h(x, x', w)$ sinnvoll und nach dem obigen Teil gilt $h(x, x', w) + h(x, x', y + z) = h(x, x', y + z + w)$. Wegen $w + y \in M_x$ gelten analog $h(x, x', w + y) + h(x, x', z) = h(x, x', y + z + w)$ und $h(x, x', w + y) = h(x, x', w) + h(x, x', y)$. Nach der Vergleichung der Gleichungen erhalten wir $y' + z' = h(x, x', y + z)$.

Satz 14. *Es seien Rx, Ry, Rz unabhängige Untermoduln aus M, $M_z \subseteqq M_y \subseteqq M_x$ und nehmen wir an, es existiert ein Element $w \in M$ derart, dass $(Rx + Ry + Rz) \cap Rw = o$, $M_x = M_w$. Ist $y' = h(x, x', y)$, so ist $h(x, x', z) = h(y, y', z)$.*

Beweis. Die Ausdrücke $y' = h(x, x', y)$, $h(x, x', z)$, $h(y, y', z)$, $w' = h(x, x', w)$, $z' = h(w, w', z)$ sind sinnvoll. Die Moduln Rx, Ry, Rw sind unabhängig, es gilt $M_y \subseteqq M_x \subseteqq M_w$ und nach Satz 12 folgt $y' = h(w, w', y)$. Die Moduln Rz, Ry, Rw sind unabhängig, es gilt $M_z \subseteqq M_y \subseteqq M_w$ und nach Satz 12 folgt $z' = h(y, y', z)$. Unter Anwendung vom Satz 11 und unter weiterer Anwendung vom Satz 12 ergibt sich dann die resultierende Gleichheit.

Satz 15. *Es seien M eine relativ-zulässiger Modul, $x \in M$ ein relativ-freies Element und $y, z, t \in M_x$ Elemente derart gegeben, dass $M_x = M_y = M_z$ und $Rx \cap Ry = Rx \cap Rz = Ry \cap Rt = Rz \cap Rt = o$ ist. Setzt man $y' = h(x, x', y)$, $z' = h(x, x', z)$, so gilt $h(y, y', t) = h(z, z', t)$.*

Beweis. a) Nehmen wir an, dass $Rx \cap Rt = o$ gilt. Dann ist der Ausdruck $h(x, x', t)$ sinnvoll. Die Moduln Rx, Ry, Rt sind unabhängig und es gilt die Beziehung $M_t \subseteqq M_x \subseteqq M_y$. Nach der Definition 7 und Bemerkung 4 gibt es ein Element $w \in M$ derart, dass $M_w = M_x$ und $(Rx + Ry + Rt) \cap Rw = o$ ist. Somit sind die Voraussetzungen des Satzes 14 erfüllt und es gilt daher $h(x, x', t) = h(y, y', t)$. Auf analogem Wege beweisen wir die Gleichheit $h(x, x', t) = h(z, z', t)$.

b) Nehmen wir an, dass $Ry \cap Rz = o$ ist. Unter Anwendung vom Satz 14 ergibt sich $h(x, x', z) = h(y, y', z)$, unter Anwendung vom Satz 11 dann $y' = h(z, z', y)$ und unter weiterer Anwendung vom Satz 14 folgt die resultierende Gleichheit.

c) Betrachten wir noch die übriggebliebene Möglichkeit $Ry \cap Rz \neq o$, $Rx \cap Rt \neq o$. Nach der Definition 7 gibt es einen vollständigen Modul S, für den die Beziehungen $S \cap Rx = S \cap Ry = S \cap Rz = S \cap Rt = o$ gelten. Nach der Bemerkung 4 existiert ein Element $w \in S$ derart, dass $M_x = M_w$ ist. Für die Elemente w, y, z, t ist es möglich das Ergebnis von a) anzuwenden, wo man das Element x durch das Element w ersetzt und danach die resultierende Gleichheit erhält.

Theorem. *Jede projektive Abbildung vom relativ-zulässigen Modul (R, M) auf den Modul (Q, N) ist mittels einer halblinearen Abbildung von zu (R, M), (Q, N) zugeordneten Moduln induziert.*

Beweis. Es sei $\varkappa$ eine projektive Abbildung vom relativ-zulässigen Modul M auf den Modul N. Wählen wir ein relativ-freies Element $x \in M$ und ein Element $x' \in N$ derart, dass $(Rx)^{\varkappa} = Qx'$ gilt. Es gebe ein beliebiges Element $t \in M_x$ und betrachten wir ein Element $w \in M$ derart, dass $M_x = M_w$, $(Rx + Rt) \cap Rw = o$ ist. Setzen wir nach Satz 10 $w' = h(x, x', w)$ und $t^{\sigma} = h(w, w', t)$. Offenbar ist $t^{\sigma} \in N_{x'}$.

a) σ ist die Abbildung von der Gruppe M_x in die Gruppe $N_{x'}$. Wählen wir ein anderes Element $z \in M$ der Eingeschaften $M_z = M_x$, $(Rx + Rt) \cap Rz = o$ und setzen wir $z' = h(x, x', z)$. Die Elemente x, w, z, t genügen den Forderungen des Satzes 15 und es gilt mithin $h(z, z', t) = h(w, w', t) = t^{\sigma}$. Speziell für $t = x$ folgt aus der Beziehung $w' = h(x, x', w)$ die Gleichheit $x' = h(w, w', x) = x^{\sigma}$. Jeder monogene Modul S aus M lässt sich in der Form $S = Ry$ schreiben, wo $y \in M_x$ ist. Nach Satz 10 erhält man

$$(1) \qquad (Ry)^{\varkappa} = Qy^{\sigma}, \quad y^{\sigma} \in N_{x^{\sigma}}.$$

b) Die Gruppe $N_{x^{\sigma}}$ ist eine vollständige Gruppe vom Modul N. Wählen wir einen beliebigen monogenen Untermodul Qu des Moduls N. Es gibt einen Untermodul Ry aus M derart, dass $(Ry)^{\varkappa} = Ru$, $y \in M_x$. Nach (1) ist dann $Qu = Qy^{\sigma}$, $y^{\sigma} \in N_{x^{\sigma}}$ und nach der Definition 2 ist die Gruppe $N_{x^{\sigma}}$ vollständig.

c) Die Abbildung σ ist ein Homomorphismus der Gruppe M_x in $N_{x^{\sigma}}$. Es gebe beliebige Elemente $y, z \in M_x$ und wählen wir ein Element $w \in M$ derart, dass $(Rx + Ry + Rz) \cap Rw = o$, $M_x = M_w$ ist und setzen wir $w' = h(x, x', w)$. Es gibt ein Element $m \in M$, $M_m = M_w$, $(Rw + Ry + Rz) \cap Rm = o$. Nach dem Satz 13 gilt dann $h(w, w', y + z) = (y + z)^{\sigma} = h(w, w', y) + h(w, w', z) = y^{\sigma} + z^{\sigma}$.

d) Die Abbildung σ ist surjektiv.

Wählen wir ein beliebiges Element $b \in N_{x^{\sigma}}$. Es existiert ein monogener Untermodul T aus M derart, dass $T^{\varkappa} = Qb$ und nach der Definition 7 gibt es einen vollständigen Untermodul $S \subseteqq M$, für den

$$(2) \qquad (Rx + T) \cap S = o$$

gilt. Im Modul S existiert ein Element v, für das $S = Rv$, $M_v = M_x$ gilt. Nach Satz 11 ergibt sich $N_{v^{\sigma}} = N_{x^{\sigma}}$, woraus wir

$$(3) \qquad b \in N_{v^{\sigma}}$$

erhalten. Bezeichnen wir mit Ra einen Untermodul derart, dass $(Ra)^{\varkappa} = Q(v^{\sigma} + b)$ ist. Es sei $u \in Q(v^{\sigma} + b) \cap Qb = (Ra)^{\varkappa} \cap T^{\varkappa}$. Dann gibt es Elemente $\xi, \eta \in Q$, für welche $u = \xi v^{\sigma} + \xi b = \eta b$ gilt. Da nach (2) und (1) $(Rv)^{\varkappa} \cap T^{\varkappa} = Qv^{\sigma} \cap Qb = o$ ist, gilt $\xi v^{\sigma} = (\eta - \xi)\, b = o$. Hieraus ergibt sich $\xi \in A(v^{\sigma})$ und nach (3) dann $\xi \in A(b)$, d. h. $\xi b = \eta b = o$. Daher ist $u = o$ und wir erhalten

$$(4) \qquad (Ra)^{\varkappa} \cap T^{\varkappa} = o, \quad Ra \cap T = o.$$

Weiter gilt

$$(5) \qquad (Ra)^{\varkappa} = Q(v^{\sigma} + b) \subseteqq Qv^{\sigma} + Qb = (Rv)^{\varkappa} + T^{\varkappa} = (Rv + T)^{\varkappa}.$$

Offenbar gilt auch $(Ra + T)^{\varkappa} = Q(v^{\sigma} + b) + Qb \supseteqq Qv^{\sigma} = (Rv)^{\varkappa}$, d. h. $Rv \subseteqq$ $\subseteqq Ra + T$. Es existieren $\alpha \in R$, $t_1 \in T$ derart, dass

$$(6) \qquad v = \alpha a + t_1.$$

Ist $\xi \in A(v)$, so ist $\xi(\alpha a) + \xi t_1 = o$ und aus (4) folgt $\xi(\alpha a) = o$ und $\xi \in A(\alpha a)$. Es gilt somit $A(v) \subseteqq A(\alpha a)$ und daher

$$(7) \qquad \alpha a \in M_v = M_x.$$

Nach (5) ist $Ra \subseteqq Rv + T$ und folglich $a = \beta v + t_2$, $\beta \in R$, $t_2 \in T$. Nach Einsetzen aus (6) erhalten wir nach (4) $a - \beta\alpha a = \beta t_1 + t_2 = o$ also $a = \beta\alpha a$ und $Ra = R(\alpha a)$. Weiter gilt

$$\alpha a = \alpha\beta v + \alpha t_2 \,. \tag{8}$$

Einsetzen in (6) ergibt dann $v = \alpha\beta v + t_1 + \alpha t_2$ und nach (2) $(1 - \alpha\beta) v = t_1 + \alpha t_2 = o$. Daher ist $v = \alpha\beta v$ und nach Einsetzen in (8) erhält man $\alpha a = v + \alpha t_2$. Es gilt $v \in M_x$ und nach (7) auch $\alpha a \in M_x$, daher $\alpha t_2 \in M_x$. Mann erhält $(Ra)^\varkappa = (R(\alpha a))^\varkappa = [R(v + \alpha t_2)]^\varkappa = Q(v + \alpha t_2)^\sigma = Q(v^\sigma + (\alpha t_2)^\sigma) = Q(v^\sigma + b)$ und hieraus schliesslich $b - (\alpha t_2)^\sigma \in (Ra)^\varkappa$. Es gilt zugleich $R(\alpha t_2) \subseteqq T$, $[R(\alpha t_2)]^\varkappa = Q(\alpha t_2)^\sigma \subseteqq T^\varkappa$ und $(\alpha t_2)^\sigma \in T^\varkappa$. Demnach ist $b - (\alpha t_2)^\sigma \in T^\varkappa$. Nach (4) ist dann $b - (\alpha t_2)^\sigma \in (Ra)^\varkappa \cap T^\varkappa = o$, was das bedeutet, dass $b = (\alpha t_2)^\sigma$ gilt.

e) Die Abbildung σ ist ein Isomorphismus von Gruppen M_x, N_{x^σ}. Es sei $t^\sigma = o$. Nach (1) ist dann $(Rt)^\varkappa = Qt^\sigma = o$. Da $\varkappa$ eine projektive Abbildung darstellt, gilt $Rt = o$ und $t = o$.

f) Die Abbildung σ ist eine halblineare Abbildung von Moduln (R_x, M_x), $(Q_{x^\sigma}, N_{x^\sigma})$.

Der Modul (R_x, M_x) ist nach der Bemerkung 4 zulässig und jedes Element $w \in M_x$ derart, dass $M_w = M_x$ ist, ist in diesem Modul frei. Da N_{x^σ} eine vollständige Gruppe von Modul (Q, N) ist, ist auch jede Element $w' \in N_{x^\sigma}$ der Eingeschaft $N_{w'} = N_{x^\sigma}$, im Modul $(Q_{x^\sigma}, N_{x^\sigma})$ frei. Es gebe ein Element $t \in (R_x, M_x)$, $M_t = M_x$ und $\bar{\alpha} \in R_x$. Dann ist $R(\bar{\alpha}t) \subseteqq Rt$ und es gilt $[R(\bar{\alpha}t)]^\varkappa = Q(\bar{\alpha}t)^\sigma \subseteqq (Rt)^\varkappa = Qt^\sigma$. Aus der Gleichheit $M_t = M_x$ folgt $N_{t^\sigma} = N_{x^\sigma}$ und t^σ ist frei im Modul $(Q_{x^\sigma}, N_{x^\sigma})$. Das bedeutet, dass $N_{x^\sigma} \cap Qt^\sigma = Q_{x^\sigma}t^\sigma$ gilt. Wegen $(\bar{\alpha}t)^\sigma \in N_{x^\sigma} \cap Qt^\sigma$ muss ein Element $g(\bar{\alpha}, t) \in Q_{x^\sigma}$ derart existieren, dass $(\bar{\alpha}t)^\sigma = g(\bar{\alpha}, t)\, t^\sigma$ gilt. Da das Element t^σ in $(Q_{x^\sigma}, N_{x^\sigma})$ frei ist, ist das Element $g(\bar{\alpha}, t)$ eindeutig bestimmt. In Analogie zu [3] beweisen wir, dass das Element $g(\bar{\alpha}, t)$ nur von der Wahl des Elementes $\bar{\alpha}$ abhängt, d. h. dass für beliebige freie Elemente $u, v \in M_x$ die Beziehung $g(\bar{\alpha}, u) = g(\bar{\alpha}, v)$ gilt. Man kann also $\bar{\alpha}^{\sigma'} = g(\bar{\alpha}, t)$ setzen. Analog zu [3] beweisen wir weiter, dass σ' ein Isomorphismus von Ringen R_x, Q_{x^σ} ist und für beliebige Elemente $\bar{\alpha} \in R_x$, $t \in M_x$ die Behauptung $(\bar{\alpha}t)^\sigma = \bar{\alpha}^{\sigma'}t^\sigma$ gilt.

g) Die halblineare Abbildung σ induziert die projektive Abbildung $\varkappa$.

Es sei $S = \sum_{\nu \in J} Ru_\nu$, $u_\nu \in M_x$ ein Untermodul aus M. Da der Verband $L(M)$ vollständig ist, gilt $S^\varkappa = (\sum_{\nu \in J} Ru_\nu)^\varkappa = \sum_{\nu \in J} (Ru_\nu)^\varkappa$. Nach (1) ist dann $S^\varkappa = \sum_{\nu \in J} Qu_\nu^\sigma$ und nach der Definition 4 induziert σ die projektive Abbildung $\varkappa$.

Folgerung. Alle vollständigen Gruppen vom relativ-zulässigen Modul sind isomorph und alle zu dessen relativ-freien Elementen x zugehörigen Ringe R_x sind isomorph: Wählen wir zwei zugeordnete Moduln (R_x, M_x), (R_y, M_y) vom relativ-zulässigen Modul (R, M). Setzen wir $Q = R$, $N = M$. Dann kann (R_x, M_x) als zu (R, M) und

(R_y, M_y) zu (Q, N) zugeordnet aufgefasst werden. Eine identische projektive Abbildung vom Modul (R, M) ist dann nach dem Theorem durch eine halblineare Abbildung von Moduln (R_x, M_x) und (R_y, M_y) induziert, woraus sich unsere Behauptung sofort ergibt.

Bemerkung 6. Es lässt sich zeigen, dass ein Modul, der mit einem relativ-zulässigen Modul projektiv äquivalent ist, auch relativ-zulässig ist. Natürlich ein Modul, der mit einem zulässigen Modul projektiv äquivalent ist, braucht nicht mehr zulässig zu sein. (z. B. die Folgerung nach dem Satz 6.) Diese Situation tritt jedoch ein, wenn der Modul N ein freies Element anthält. In der Arbeit [3] von Skornjakov wird nur dieser Spezialfall betrachtet.

Es gebe einen relativ-zulässigen Modul (R, M) und einen zu ihm zugeordneten Modul (R_x, M_x). Bezeichnen wir mit $P(M)$ die Gruppe autoprojektiver Abbildungen vom Modul (R, M), mit $P(M_x)$ die Gruppe autoprojektiver Abbildungen vom Modul (R_x, M_x) und mit $PL(M_x)$ die Gruppe halblinearer Abbildungen vom Modul (R_x, M_x). Jede halblineare Abbildung σ vom Modul (R_x, M_x) induziert nach Satz 6 eine projektive Abbildung $\varkappa'_\sigma$ vom Modul (R_x, M_x). Die Abbildung $\sigma \to \varkappa'_\sigma$ ist nach Theorem ein Homomorphismus von Gruppe $PL(M_x)$ auf die Gruppe $P(M_x)$. Der Kern dieses Homomorphismus wird mit $K(M_x)$ bezeichnet. Die halblinearen Abbildungen σ aus $PL(M_x)$, die die projektive Abbildung $\varkappa_\sigma$ von Modul (R, M) induzieren, erzeugen die Untergruppe PL von Gruppe $PL(M_x)$. Die Abbildung $\sigma \to \varkappa_\sigma$ stellt einen Homomorphismus von der Gruppe PL auf die Gruppe $P(M)$ dar. Der Kern dieses Homomorphismus wird mit $K(M)$ bezeichnet.

Satz 16. *Es sei (R, M) ein relativ-zulässiger Modul und (R_x, M_x) der zu ihm zugeordneter Modul. Folgende Behauptungen sind äquivalent:*

(a) *Die Abbildung σ ist durch folgende Vorschrift bestimmt: $u \to \bar{\xi}u$ für ein beliebiges Element $u \in M_x$, wo $\bar{\xi} \in R_x$ ein festes Element ist, zu dem ein Element $(\bar{\xi})^{-1}$ derart existiert, dass $\bar{\xi}(\bar{\xi})^{-1} = (\bar{\xi})^{-1}\,\bar{\xi} = \bar{1}$.*

(b) $\sigma \in K(M)$.

(c) $\sigma \in K(M_x)$.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (c). Die Abbildung σ ist ein Automorphismus von der Gruppe M_x. Die Abbildung σ' vom Ring R_x, welche durch die Vorschrift: $\bar{\alpha}^{\sigma'} = \bar{\xi}\bar{\alpha}(\bar{\xi})^{-1}$, $\bar{\alpha} \in R_x$ bestimmt ist, stellt einen Automorphismus vom Ring R_x dar. Für beliebige $\bar{\alpha} \in R_x$, $u \in M_x$ gilt $(\bar{\alpha}u)^\sigma = \bar{\xi}\bar{\alpha}u = \bar{\xi}\bar{\alpha}(\bar{\xi})^{-1}\,\bar{\xi}u = \bar{\alpha}^{\sigma'}u^\sigma$. Die Abbildung σ ist eine halblineare Abbildung von Modul (R_x, M_x). Aus den Beziehungen

$$(1) \qquad u^\sigma = \bar{\xi}u\,, \quad u = (\bar{\xi})^{-1}\,u^\sigma$$

ergibt sich dann $R_x u = R_x u^\sigma$. Es sei $\varkappa'_\sigma$ eine projektive Abbildung vom Modul (R_x, M_x), die durch σ induziert wird. Dann ist $(R_x u)^{\varkappa'_\sigma} = R_x u$ und für einen beliebigen Untermodul S aus (R_x, M_x) gilt $S^{\varkappa'_\sigma} = (\sum_{\nu \in J} R_x u_\nu)^{\varkappa'_\sigma} = \sum_{\nu \in J} (R_x u_\nu)^{\varkappa'_\sigma} = \sum_{\nu \in J} R_x u_\nu = S$.
Hieraus folgt $\sigma \in K(M_x)$.

(c) $\Rightarrow$ (a). Es seien $\sigma \in K(M_x)$ und $\varkappa'_\sigma$ eine durch die Abbildung σ induzierte projektive Abbildung. Dann gilt $(R_x u)^{\varkappa'_\sigma} = R_x u^\sigma = R_x u$ für ein beliebiges $u \in M_x$. Es gibt also ein Element $\xi_u \in R_x$ derart, dass $u^\sigma = \xi_u u$ ist. Nehmen wir zunächst an, dass $R_x u \cap R_x x = o$ gilt. Das Element $x + u$ ist im Modul (R_x, M_x) frei. Da σ ein Automorphismus von Gruppe M_x ist, erhalten wir $(u + x)^\sigma = \xi_{u+x}(u + x) = \xi_{u+x} u + \xi_{u+x} x = u^\sigma + x^\sigma = \xi_u u + \xi_x x$ und hieraus dann $(\xi_{u+x} - \xi_x) x = (\xi_u - \xi_{u+x}) u = o$. Da x ein freies Element ist, gilt $\xi_{u+x} = \xi_x$ und daraus $\xi_u u = \xi_x u = u^\sigma$. Gilt $R_x x \cap R_x u \neq o$, so können wir ein freies Element w im Modul (R_x, M_x) derart wählen, dass $(R_x u + R_x x) \cap R_x w = o$ ist. Ganz ähnlich wie im vorigen Fall gilt $\xi_w w = \xi_x w$ und demnach auch $\xi_w = \xi_x$. Gleichzeitig gelten auch die Beziehungen $u^\sigma = \xi_u u = \xi_w u$, d. h. $u^\sigma = \xi_x u$. Da σ ein Automorphismus der Gruppe M_x ist, existiert ein inverser Automorphismus σ^{-1} und natürlich $\sigma^{-1} \in K(M_x)$. In gleicher Weise wie im Vorangehenden wird beweisen, dass ein Element $\xi'_x \in R_x$ derart existiert, dass $u^{\sigma^{-1}} = \xi'_x u$ für jedes $u \in M_x$. Man erhält dann $x^{\sigma\sigma^{-1}} = \xi'_x \xi_x x = x$ also $\xi'_x \xi_x = \bar{1}$. Ähnlich ist $x^{\sigma^{-1}\sigma} = \xi_x \xi'_x x = x$, d. h. $\xi_x \xi'_x = \bar{1}$.

(a) $\Rightarrow$ (b). Nach (a) $\Rightarrow$ (c) ist σ eine halblineare Abbildung vom Modul (R_x, M_x), die dessen identische projektive Abbildung induziert. Nach (1) gilt $Ru = Ru^\sigma$ für beliebiges $u \in M_x$. Ist U ein Untermodul aus M, so ist $M_x \cap U$ ein Untermodul von (R_x, M_x). Für beliebige $u_\nu \in M_x$ gilt $[M_x \cap (\sum_{\nu \in J} Ru_\nu)]^\sigma = S^{\varkappa'_\sigma} = S = M_x \cap (\sum_{\nu \in J} Ru_\nu) = M_x \cap (\sum_{\nu \in J} Ru_\nu^\sigma)$. Nach Satz 5 induziert σ eine projektive Abbildung $\varkappa_\sigma$ vom Modul M. Für jeden Untermodul U aus M gilt dann $U^{\varkappa_\sigma} = (\sum_{\nu \in J} Ru_\nu)^{\varkappa_\sigma} = \sum_{\nu \in J} (Ru_\nu)^{\varkappa_\sigma} = \sum_{\nu \in J} Ru_\nu^\sigma = \sum_{\nu \in J} Ru = U$ und folglich ist $\sigma \in K(M)$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Es sei $\sigma \in K(M)$. Dann ist $(Ru)^{\varkappa_\sigma} = Ru^\sigma = Ru$ für ein beliebiges Element $u \in M_x$. Es gibt ein Element $\alpha \in R$ derart, dass $u^\sigma = \alpha u$ ist. Jedes Element $w \in M$ mit der Eingeschaft $M_w = M_x$, ist in (R_x, M_x) frei und es gilt $R_x w^\sigma = M_x \cap Rw^\sigma = M_x \cap Rw = R_x w$. Dann gibt es ein Element $\xi_w \in R_x$ derart, dass $w^\sigma = \xi_u w$. Wir wählen ein beliebiges Element u derart, dass $R_x u \cap R_x x = o$. Das Element $u + x$ ist in (R_x, M_x) frei und wir erhalten $(u + x)^\sigma = \xi_{u+x} u + \xi_{u+x} x = \alpha u + \xi_x x$. Hieraus ergibt sich $u^\sigma = \alpha u = \xi_x u$. Das restliche wird in gleicher Weise wie in (c) $\Rightarrow$ (a) durchgeführt.

Folgerung. Nach dem Satz 16 ist $K(M_x) = K(M) = K$. Die Gruppe K ist ein Normalteiler in $PL(M_x)$ und es gilt $P(M_x) \cong PL(M_x)/K$, $P(M) \cong PL/K$.

Literatur

[1] *Baer R.:* Linear algebra and projective geometry. New York, 1952.

[2] *Machala F.:* Bemerkungen zum Satz von L. A. Skornjakov über die projektive Abbildung von Moduln. Mat. čas. SAV (im Druck).

[3] *Skornjakov L. A.:* Projektivnoje otobraženije modulej. Izvjestija AN, *24,* 1960, No 4, 511—520.

Anschrift des Verfassers: 771 46 Olomouc, Leninova 26, ČSSR (Přírodovědecká fakulta UP).