Mária Barnovská

О спектре несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка с комплекснозначным переменным коэффициентом при старшей производной на полуоси

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 24 (1974), No. 3, 349–358

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101248

Czechoslovak Mathematical Journal, 24 (99) 1974, Praha

О СПЕКТРЕ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫМ ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ НА ПОЛУОСИ

MÁRIA BARNOVSKÁ (Мария Барновска), Bratislava

(Поступило в редакцию 25. II. 1970, переработанное 15. XII. 1973)

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим дифференциальное выражение второго порядка

$$l(x) = (p(t)\,x')'\,, \quad 0 \leqq t < \infty\,, \tag{1}$$

где $p(t) \neq 0$ – дважды непрерывно дифференцируемая комплекснозначная функция в интервале $[0, \infty)$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$p'(t)\,p^{-1}(t) \in L(0, \infty)\,, \quad p''(t) \in L(0, \infty)\,. \tag{2}$$

Пусть $\lim_{t \to \infty} p(t)$ есть действительное положительное число.

Подобным способом, как и в работе [1], по дифференциальному выражению (1) построим дифференциальный оператор в пространстве $L^2(0, \infty)$. Пусть D обозначает множество всех функций $x(t)$ из $L^2(0, \infty)$ таких, что

1) функция $p\,x'(t)$ существует и абсолютно непрерывна в каждом конечном интервале $[0, b]$, $b > 0$;

2) $l(x) \in L^2(0, \infty)$.

Пусть D_ϑ – совокупность всех функций $x(t) \in D$, удовлетворяющих условию:

$$p(0)\,x'(0) - \vartheta\,x(0) = 0\,, \tag{3}$$

где ϑ – фиксированное комплексное число.

Определим оператор L_ϑ следующим образом: областью его определения есть D_ϑ и при $x \in D_\vartheta$

$$L_\vartheta x = l(x)\,.$$

Оператор L_ϑ называется дифференциальным оператором, порожденным дифференциальным выражением $l(x)$ и краевым условием (3).

Случай дифференциального оператора, определенного дифференциальным выражением $-x'' + q(t)\,x$ и краевым условием $x'(0) - \vartheta\, x(0) = 0$, где $q(t)$ и ϑ комплексные, исследовался во многих работах (см. добавление I в [2]), одной из них является и упомянутая работа М. А. Наймарка [1].

Целью настоящей работы является исследование подобных вопросов, как в [1], для выше определенного оператора.

Поскольку абстрактная теореия несамосопряженных операторов разработана недостаточно, мы должны будем исследовать этот оператор непосредственно.

1. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $l(x) = \lambda x$

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$(p(t)\,x')' = \lambda x\,, \tag{1.1}$$

где $\lambda = s^2$ — комплексный параметр.

Теорема 1.1. *Пусть функция $p(t)$ удовлетворяет условиям* (2), $\arg\sqrt{(1/p(t))}$ *есть непрерывная функция.* Пусть $\varepsilon > 0$ и

$$-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg s < \frac{\pi}{2} - \varepsilon\,. \tag{1.2}$$

Тогда для всякого $r > 0$ существует $a(r) > 0$ такое, что для всех s из области

$$-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg s < \frac{\pi}{2} - \varepsilon\,, \quad |s| \geqq r \quad \text{и} \quad t \geqq a(r)$$

уравнение (1.1) *имеет решения $x_1(t, s)$ и $x_2(t, s)$, для которых справедливы оценки:*

$$\begin{aligned} x_1(t, s) &= p^{-1/4}(t) \exp(s\,\varphi(t))\,[1 + \delta_1(t, s)]\,, \\ x_1'(t, s) &= s\,p^{-3/4}(t) \exp(s\,\varphi(t))\,[1 + \delta_2(t, s)]\,, \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} x_2(t, s) &= p^{-1/4}(t) \exp(-s\,\varphi(t))\,[1 + \delta_3(t, s)]\,, \\ x_2'(t, s) &= -s\,p^{-3/4}(t) \exp(-s\,\varphi(t))\,[1 + \delta_4(t, s)]\,, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $\varphi(t) = \int_0^t \sqrt{(1/p(t_1))}\,\mathrm{d}t_1$, функция $p^{-1/2}(t)$ — непрерывная и $\lim\limits_{t\to\infty} p^{-1/2}(t)$ есть положительное действительное число. Функции $|\delta_i(t, s)| < \varphi_i(t)/|s|$, $\varphi_i(t) \to 0$ при $t \to \infty$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Эти формулы пригодны как при $t > 0$ фиксированном, $|s| \to \infty$ равномерно по t, так и при s фиксированном из области (1.2), *$t \to \infty$ равномерно по $|s| \geqq r > 0$.*

Доказательство. Из предположений (2) о функции $p(t)$ и из того, что s есть из области (1.2), следует:

$$\operatorname{Re}\left(s\sqrt{(1/p(t))}\right) > 0 \quad \text{для достаточно больших } t\,. \tag{1.5}$$

С помощью подстановки

$$x(t) = p^{-1/4}(t)\,u(t) \tag{1.6}$$

преобразуем уравнение (1.1) к виду

$$\begin{gathered} u''(t) + \tfrac{1}{2}\,p'(t)\,p^{-1}(t)\,u'(t) + \\ + \left[-\tfrac{1}{4}\,p''(t)\,p^{-1}(t) + \tfrac{1}{16}\,p'^2(t)\,p^{-2}(t)\right]u(t) = \lambda\,p^{-1}(t)\,u(t)\,. \end{gathered}$$

Таким образом, вместо асимптотики линейно независимых решений уравнения (1.1) будем искать асимптотику линейно независимых решений полученного уравнения. Для этого перепишем его еще так:

$$\begin{gathered} u''(t) + \tfrac{1}{2}\,p'(t)\,p^{-1}(t)\,u'(t) - \lambda\,p^{-1}(t)\,u(t) = \\ = \tfrac{1}{4}\left(p''(t)\,p^{-1}(t) - \tfrac{1}{4}\,p'^2(t)\,p^{-2}(t)\right)u(t)\,. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Однородное уравнение

$$v''(t) + \tfrac{1}{2}\,p'(t)\,p^{-1}(t)\,v'(t) - \lambda\,p^{-1}(t)\,v(t) = 0$$

имеет два линейно независимых решения (см. [3] стр. 430, уравнение 2.79) вида:

$$v_1(t, s) = \exp\left(s\,\varphi(t)\right), \quad v_2(t, s) = \exp\left(-s\,\varphi(t)\right). \tag{1.8}$$

где $\varphi(t)$ – функция, определенная в теореме. Поэтому, рассматривая (1.7) как неоднородное уравнение с правой частью

$$\tfrac{1}{4}\left(p''(t)\,p^{-1}(t) - \tfrac{1}{4}\,p'^2(t)\,p^{-2}(t)\right)u(t)$$

и применяя метод вариации произвольных постоянных, мы найдем, что

$$\begin{aligned} u(t, s) &= C_1 \exp\left(s\,\varphi(t)\right) + C_2 \exp\left(-s\,\varphi(t)\right) + \\ &+ \frac{1}{2s}\exp\left(s\,\varphi(t)\right)\int_{t_1}^{t}\exp\left(-s\,\varphi(\tau)\right)P(\tau)\,u(\tau, s)\,\mathrm{d}\tau - \\ &- \frac{1}{2s}\exp\left(-s\,\varphi(t)\right)\int_{t_2}^{t}\exp\left(s\,\varphi(\tau)\right)P(\tau)\,u(\tau, s)\,\mathrm{d}\tau\,, \end{aligned} \tag{1.9}$$

где функция

$$P(\tau) = \tfrac{1}{4}\left(p''(\tau)\,p^{-1/2}(\tau) - \tfrac{1}{4}\,p'^2(\tau)\,p^{-3/2}(\tau)\right) \tag{1.10}$$

интегрируема в интервале $(0, \infty)$ в силу предположений (2) о функции $p(t)$. При том или ином выборе постоянных C_1, C_2 и t_1, t_2 мы получим интегральные уравнения для различных частных решений уравнения (1.7).

Положим в (1.9) $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $t_1 = \infty$, $t_2 = a$; тогда уравнение (1.9) перепишется так:

$$(1.11)\quad u(t, s) = \exp(s\,\varphi(t)) - \frac{1}{2s}\int_a^t \exp[-s(\varphi(t) - \varphi(\tau))]\, P(\tau)\, u(\tau, s)\, d\tau + \\ + \frac{1}{2s}\int_\infty^t \exp[-s(\varphi(\tau) - \varphi(t))]\, P(\tau)\, u(\tau, s)\, d\tau .$$

Подобным способом, как и в работе [1], доказывается, что при $a(r)$ достаточно большом и $t \geqq a(r)$ уравнение (1.11) имеет решение вида

$$(1.12)\qquad u(t, s) = \exp(s\,\varphi(t))\, \eta(t, s),$$

где функция $\eta(t, s)$ ограничена в каждой области $a(r) \leqq t < \infty$, $-\frac{1}{2}\pi + \varepsilon < \arg s < \frac{1}{2}\pi - \varepsilon (\varepsilon > 0)$, $|s| \geqq r > 0$ и удовлетворяет интегральному уравнению

$$(1.13)\qquad \eta(t, s) = 1 - \frac{1}{2s}\int_{a(r)}^t \exp[-2\,s(\varphi(t) - \varphi(\tau))]\, P(\tau)\, \eta(\tau, s)\, d\tau - \\ - \frac{1}{2s}\int_t^\infty P(\tau)\, \eta(\tau, s)\, d\tau .$$

Обозначим это решение через $u_1(t, s)$. Функция $u_1(t, s)$ непрерывна по совокупности переменных t, s при $t \geqq a(r)$, $-\frac{1}{2}\pi + \varepsilon < \arg s < \frac{1}{2}\pi - \varepsilon$, $|s| \geqq r$; при каждом фиксированном t из интервала $(0, \infty)$ $u_1(t, s)$ есть голоморфная функция s в области $-\frac{1}{2}\pi + \varepsilon < \arg s < \frac{1}{2}\pi - \varepsilon$, $|s| \geqq r$.

Построим другое частное решение уравнения (1.7), для чего положим в (1.9) $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Тогда получим

$$(1.14)\quad u(t, s) = \exp(-s\,\varphi(t)) + \frac{1}{2s}\exp(s\,\varphi(t))\int_{t_1}^t \exp(-s\,\varphi(\tau))\, P(\tau)\, u(\tau, s)\, d\tau - \\ - \frac{1}{2s}\exp(-s\,\varphi(t))\int_{t_2}^t \exp(s\,\varphi(\tau))\, P(\tau)\, u(\tau, s)\, d\tau .$$

Положив в интегральном уравнении (1.14) сначала

$$(1.15)\qquad u(t, s) = \exp(-s\,\varphi(t))\, \varrho(t, s),$$

а потом $t_1 = \infty$, $t_2 = \infty$, получим

$$(1.16)\quad \varrho(t, s) = 1 + \frac{1}{2s}\int_t^\infty \{1 - \exp[-2\,s(\varphi(\tau) - \varphi(t))]\}\, P(\tau)\, \varrho(\tau, s)\, d\tau .$$

Так же, как и в работе [1], докажем, что при достаточно большом $a(r)$ и $t \geqq a(r)$ уравнение (1.14) имеет решение вида (1.15), которое обозначим через $u_2(t, s)$. Функция $\varrho(t, s)$ ограничена в области $a(r) \leqq t < \tau < \infty$, $-\frac{1}{2}\pi + \varepsilon < \arg s < \frac{1}{2}\pi - \varepsilon$, $|s| \geqq r > 0$; при каждом фиксированном $t > 0$, $u_2(t, s)$ есть голоморфная функция s в области $-\frac{1}{2}\pi + \varepsilon < \arg s < \frac{1}{2}\pi - \varepsilon$.

Беря во внимание интегральные уравнения (1.13) и (1.16) и подстановку (1.6), легко показать, что имеют место сформулированные в теореме 1.1 оценки для решений $x_1(t, s)$ и $x_2(t, s)$ уравнения (1.1).

Результаты теоремы 1.1 подобны результату леммы 1.6 из [4], стр. 415, полученном в случае двухчленного уравнения $x'' - \lambda^2\, q(t)\, x = 0$, где $q(t)$ — комплекснозначная функция, а $\lambda > 0$.

Замечание 1. Далее будем предполагать, что параметр s есть из области

$$-\tfrac{1}{2}\pi + \varepsilon_1 < \arg s < \tfrac{1}{2}\pi - \varepsilon_2\,, \quad |s| \geqq r > 0\,, \tag{1.2'}$$

где

$$-\varepsilon_1 = \inf_{0 \leqq t < \infty} \left(\arg \sqrt{\frac{1}{p(t)}}\right), \quad \varepsilon_2 = \sup_{0 \leqq t < \infty} \left(\arg \sqrt{\frac{1}{p(t)}}\right), \quad \varepsilon_1 > 0\,, \quad \varepsilon_2 > 0\,.$$

Из предположений (2) о функции $p(t)$ и из этих предположений следует, что

$$\mathrm{Re}\left(s \sqrt{\frac{1}{p(t)}}\right) > 0$$

не только для достаточно больших t, но для всех $t \geqq 0$. Следовательно, теорема 1.1 имеет место и в случае области (1.2') для s.

Если теперь r такое, что

$$\frac{1}{r}\int_0^\infty P(\tau)\, \mathrm{d}\tau < 1$$

и s есть из области (1.2'), то имеет место и здесь замечание 2.2 из [1], т. е. во всех интегральных уравнениях, которые определяют нам решения, можно положить $a(r) = 0$.

Замечание 2. Теорема 1.1 определяет нам решения x_1 и x_2 при $t \geqq a$, где a достаточно большое. Но в дальнейшем мы будем рассматривать эти решения на полуоси $t \geqq 0$ при s из области (1.2'). Продолжая функции x_1 и x_2 в интервал $0 \leqq t \leqq a$ как решения уравнения $l(x) = \lambda x$, мы доопределим функции $\delta_i(t, s)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) и на конечном интервале $[0, a]$. Из известных свойств решений дифференциальных уравнений вытекает, что решения x_1 и x_2 будут голоморфными функциями переменного s в той же области также и при $0 \leqq t \leqq a$, непрерывными функциями по совокупности переменных t, s; $0 \leqq t \leqq a$, $-\frac{1}{2}\pi + \varepsilon_1 < \arg s < \frac{1}{2}\pi - \varepsilon_2$, $|s| \geqq r$.

2. ВРОНСКИАН ФУНКЦИЙ $x_1(t, s)$, $x_2(t, s)$

Теорема 2.1. *Для вронскиана функций $x_1(t, s)$, $x_2(t, s)$ имеет место формула*

$$w(x_1, x_2) = -\frac{2s}{p(t)}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Доказательство теоремы вытекает из асимптотичеких формул (1.3) и (1.4), взятых при $t \to \infty$ и из того факта, что $p(t)\, w(x_1, x_2)$ не зависит от t.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА И РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОПЕРАТОРА L_ϑ

На протяжении всего этого параграфа мы будем использовать результаты предыдущих параграфов для случая, когда s изменяется в области (1.2′), введенной в замечании 1.

1. Собственные значения оператора L_ϑ.

Теорема 3.1. *Собственные значения оператора L_ϑ определяются по формуле $\lambda = s^2$, причем s есть из области* (1.2′), *и образуют конечное или счетное множество.*

Доказательство. Рассмотрим решения $x_1(t, s)$ и $x_2(t, s)$ уравнения

$$l(x) = \lambda x\,, \quad \lambda = s^2\,, \quad -\tfrac{1}{2}\pi + \varepsilon_1 < \arg s < \tfrac{1}{2}\pi - \varepsilon_2(\varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon_2 > 0)\,, \tag{3.1}$$
$$|s| \geqq r > 0\,, \quad \text{где} \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \quad \text{определены в замечании 1}\,.$$

Из асимптотических формул (1.3) и (1.4), взятых при $t \to \infty$, можно утверждать, что $x_1 \,\bar{\in}\, L^2(0, \infty)$, $x_2 \in L^2(0, \infty)$. Решения x_1, x_2 линейно независимы, поэтому всякое решение уравнения (3.1) при s из области $-\frac{1}{2}\pi + \varepsilon_1 < \arg s < \frac{1}{2}\pi - \varepsilon_2$, $|s| \geqq r > 0$ запишется как линейная комбинация $x = c_1 x_1 + c_2 x_2$. Она может быть собственной функцией оператора L_ϑ лишь тогда, когда $x \in L^2(0, \infty)$, т. е. $c_1 = 0$. Можно считать $c_2 = 1$, т. е. $x = x_2$. Для того чтобы x_2 была собственной функцией оператора L_ϑ необходимо и достаточно, чтобы $x_2 \in D_\vartheta$, т. е.

$$p(0)\, x_2'(0, s) - \vartheta\, x_2(0, s) = 0\,. \tag{3.2}$$

В правой части уравнения (3.2) стоит аналитическая функция, регулярная в комплексной области $-\frac{1}{2}\pi + \varepsilon_1 < \arg s < \frac{1}{2}\pi - \varepsilon_2$, $|s| \geqq r > 0$, поэтому решения s этого уравнения в этой области образуют конечное или счетное множество. Значит, s, которое упоминается в теореме, должно быть решением уравнения (3.2).

Чтобы доказать, что множество собственных значений оператора L_ϑ ограничено, подставим асимптотические формулы (1.3) и (1.4) при $|s| \to \infty$ в (3.2); при r достаточно большом мы можем положить $a = 0$ (см. замечание 1). Тогда получим

$$-sp^{1/4}(0)\left(1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right) \neq 0$$

при достаточно большом $|s|$. Следовательно, $\lambda = s^2$ при достаточно большом s не может быть собственным значением оператора L_ϑ. Это означает, что множество собственных значений оператора L_ϑ ограниченное.

2. Резольвента оператора L_ϑ.

Теорема 3.2. *Все числа* $\lambda = s^2$, $-\frac{1}{2}\pi + \varepsilon_1 < \arg s < \frac{1}{2}\pi - \varepsilon_2$ $(\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0)$, $|s| \geqq r > 0$, *при которых* $p(0)\, x_2'(0, s) - \vartheta\, x_2(0, s) \neq 0$, *принадлежат резольвентному множеству оператора* L_ϑ. *Резольвента* $R_\lambda = (L_\vartheta - \lambda 1)^{-1}$ *является ограниченным интегральным оператором*

$$R_\lambda f(t) = \int_0^\infty R(t, \tau, \lambda) f(\tau)\, d\tau \tag{3.3}$$

с ядром

$$R(t, \tau, s^2) = \begin{cases} \dfrac{\psi(s)}{2s}\, x_2(t, s)\, x_2(\tau, s) - \dfrac{1}{2s}\, x_2(t, s)\, x_1(\tau, s) & \text{при} \quad 0 < \tau < t\,, \\ \dfrac{\psi(s)}{2s}\, x_2(t, s)\, x_2(\tau, s) - \dfrac{1}{2s}\, x_1(t, s)\, x_2(\tau, s) & \text{при} \quad t < \tau < \infty\,, \end{cases} \tag{3.4}$$

где

$$\psi(s) = \frac{p(0)\, x_1'(0, s) - \vartheta\, x_1(0, s)}{p(0)\, x_2'(0, s) - \vartheta\, x_2(0, s)}\,. \tag{3.5}$$

Доказательство. Пусть $\lambda = s^2$, $-\frac{1}{2}\pi + \varepsilon_1 < \arg s < \frac{1}{2}\pi - \varepsilon_2$ не является собственным значением оператора L_ϑ, так что резольвента R_λ существует (определение резольвенты смотрите, например, в [2], стр. 450); докажем, что резольвента есть интегральный оператор вида (3.3).

Пусть $f \in L^2(0, \infty)$ принадлежит области определения R_λ. Положим

$$R_\lambda f = x\,.$$

Следовательно,

$$L_\vartheta x - \lambda x = f\,. \tag{3.6}$$

Равенство (3.6) означает, что x есть решение уравнения

$$l(x) - \lambda x = f\,, \tag{3.7}$$

принадлежащее $L^2(0, \infty)$ и удовлетворяющее условию (3).

Поскольку $x_1(t, s)$, $x_2(t, s)$ являются линейно независимыми решениями соответствующего однородного уравнения

$$(3.8) \qquad l(x) - \lambda x = 0\,,$$

то, применяя метод вариации произвольных постоянных и используя формулу (2.1) для вронскиана $w(x_1, x_2)$, мы получим:

$$(3.9) \qquad x(t, s) = c_1\, x_1(t, s) + c_2\, x_2(t, s) + \frac{1}{2s}\, x_1(t, s) \int_0^t x_2(\tau, s)\, f(\tau)\, \mathrm{d}\tau - \\ - \frac{1}{2s}\, x_2(t, s) \int_0^t x_1(\tau, s)\, f(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Определив коэффициенты c_1 и c_2 в (3.9) из требования, чтобы $x(t, s)$ принадлежало $L^2(0, \infty)$ и удовлетворяло условию (3), после элементарных преобразований мы получим интегральный оператор (3.3) с ядром (3.4), которое можно записать в таком виде:

$$(3.10) \qquad R(t, \tau, s^2) = R_1(t, \tau, s^2) + R_2(t, \tau, s^2)\,,$$

положив

$$(3.11) \qquad R_1(t, \tau, s^2) = \frac{\psi(s)}{2s}\, x_2(t, s)\, x_2(\tau, s)\,,$$

$$(3.12) \qquad R_2(t, \tau, s^2) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2s}\, x_2(t, s)\, x_1(\tau, s) & \text{при} \quad 0 < \tau < t\,, \\ -\dfrac{1}{2s}\, x_1(t, s)\, x_2(\tau, s) & \text{при} \quad t < \tau < \infty\,. \end{cases}$$

Функция $\psi(s)$ в (3.11) выражается соотношением (3.5), которое имеет смысл, потому что $p(0)\, x_2'(0, s) - \vartheta\, x_2(0, s) \neq 0$ ввиду того, что s не является собственным значением оператора L_ϑ.

Теперь докажем, что резольвента R_λ есть ограниченный интегральный оператор, определенный во всем пространстве $L^2(0, \infty)$. Из (3.10) видно, что достаточно доказать наше утверждение для каждого из ядер R_1, R_2. Поскольку $x_2(t, s) \in L^2(0, \infty)$, то ядро R_1 есть ядро Гильберта-Шмидта, которое определяет не только ограниченный, но даже вполне непрерывный оператор. Значит, нам остается доказать, что наше утверждение справедливо для ядра R_2, т. е., что для любой функции $f(t) \in L^2(0, \infty)$ имеет место неравенство

$$\int_0^\infty \left| \int_0^\infty R_2(t, \tau, \lambda)\, f(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right|^2 \mathrm{d}t \leqq C^2 \int_0^\infty |f(t)|^2\, \mathrm{d}t\,,$$

где C — некоторая постоянная. В силу (3.12) это неравенство означает, что

$$(3.13)\quad \int_0^\infty \left| -\frac{1}{2s} x_2(t, s) \int_0^t x_1(\tau, s) f(\tau)\, \mathrm{d}\tau - \frac{1}{2s} x_1(t, s) \int_t^\infty x_2(\tau, s) f(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right|^2 \mathrm{d}t \leqq$$

$$\leqq C^2 \int_0^\infty |f(t)|^2\, \mathrm{d}t\,.$$

Из формул (1.3), (1.4) и из $\lim_{t\to\infty} p(t) > 0$ вытекает:

$$(3.14)\quad \left| -\frac{1}{2s} x_2(t, s)\, x_1(\tau, s) \right| \leqq \frac{C(r)}{2|s|} \exp\left[-\alpha(t - \tau)\right] \quad \text{при} \quad 0 < \tau < t\,,$$

$$\left| -\frac{1}{2s} x_1(t, s)\, x_2(\tau, s) \right| \leqq \frac{C(r)}{2|s|} \exp\left[-\alpha(\tau - t)\right] \quad \text{при} \quad t < \tau < \infty\,,$$

где $\alpha = mk \operatorname{Re} s > 0$, так как $\operatorname{Re} s > 0$, постоянная $k > 0$ ограничивает $\cos\left[\arg s + \arg\left(p^{-1/2}(t)\right)\right]$ снизу, а постоянная $m > 0$ ограничивает функцию $p^{-1/2}(t)$ снизу для достаточно больших t. Из этих оценок следует, что левая часть (3.13) не превосходит

$$\frac{C^2(r)}{4|s|^2} \int_0^\infty \left[e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha\tau} |f(\tau)|\, \mathrm{d}\tau + e^{\alpha t} \int_t^\infty e^{-\alpha\tau} |f(\tau)|\, \mathrm{d}\tau \right]^2 \mathrm{d}t\,.$$

Но на основании леммы 1 из [2], стр. 452, это выражение не превосходит

$$\frac{C^2(r)}{2\alpha^2|s|^2} \int_0^\infty |f(t)|^2\, \mathrm{d}t\,.$$

Тем самым мы доказали, что, действительно, ядро $R_2(t, \tau, \lambda)$ порождает интегральный оператор, ограниченный при s из области $-\frac{1}{2}\pi + \varepsilon_1 < \arg s < \frac{1}{2}\pi - \varepsilon_2$, $|s| \geqq r > 0$, не являющимися осбственными значениями оператора L_ϑ, и определенный во всем пространстве $L^2(0, \infty)$.

Следовательно, для любой функции $f(t) \in L^2(0, \infty)$ формула (3.3) определяет функции $x(t, \lambda) \in L^2(0, \infty)$. Легко непосредственно показать, что так определенная функция $x(t, \lambda)$ удовлетворяет уравнению (3.7) и условию (3). Это означает, что $x \in D_\vartheta$ и что $L_\vartheta x - \lambda x = f$. Значит, область изменения оператора $L_\vartheta - \lambda 1$ является областью определения резольвенты R_λ и есть все пространство $L^2(0, \infty)$. Эта резольвента совпадает с исследованным интегральным оператором с ядром $R(t, \tau, \lambda)$, и, таким образом, теорема доказана.

В заключение работы считаю своим приятным долгом выразить свою глубокую признательность проф. Я. Курцвайлю за сделанные ценные замечания к работе.

Литература

[1] *М. А. Наймарк:* Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка на полуоси, Труды Москов. математ. общества, т. *3*, 1954, стр. 181—270.
[2] *М. А. Наймарк:* Линейные дифференциальные операторы, изд. второе, Москва 1969.
[3] Э. *Камке:* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, изд. физ.-мат. литер., Москва 1961.
[4] *В. Вазов:* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, изд. „Мир", Москва 1968.

Адрес автора: 816 31 Bratislava, Mlynská dolina, ČSSR (Prírodovedecká fakulta UK).