G. M. Nepomnyashchij; Jurij Michailov Smirnov

О ретракции отображений

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 29 (1979), No. 3, 366–377

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101620

Czechoslovak Mathematical Journal, 29 (104) 1979, Praha

О РЕТРАКЦИИ ОТОБРАЖЕНИЙ

Г. М. Непомнящий, Ю. М. Смирнов, Москва

(Поступило в редакцию 15/IX 1976 г.)

Известно, что для каждой категории $\mathfrak{T}$ класс $M(\mathfrak{T})$ всех морфизмов этой категории простым и естественным образом превращается в категорию [1]. В частности, этим способом превращается в категорию класс $C(T)$ непрерывных отображений топологических пространств.

С другой стороны, известно, что теория ретрактов наиболее естественным и содержательным образом развивается в классе $\mathfrak{M}$ всех метризуемых пространств [2]. Целью этой работы является определить и охарактеризовать те непрерывные отображения метризуемых пространств, которые являются, в соответствующем смысле, абсолютными ретрактами и абсолютными окрестностными ретрактами категории $C(\mathfrak{M})$ всех таких отображений (метризуемых пространств в метризуемые)*). Все однозначные отображения предполагаются непрерывными, буквами f, f' и т. д. обозначаются отображения (однозначные) X в Y, X' в Y' и т. д.

Скажем, что отображение $f : X \to Y$ класса $C(T)$ *вложено* (*замкнуто вложено*) в отображение $f' : X' \to Y'$ того же класса, если существуют такие вложения (соотв., замкнутые вложения) $X \hookrightarrow X'$ и $Y \hookrightarrow Y'$, что $f'|_X = f$, точнее говоря, что

диаграмма
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d, hook] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd}$$
— коммутативна.

Под вложением мы понимаем топологическое вложение, а под замкнутым вложением — такое вложение $X \hookrightarrow X'$, что X замкнуто в X'. Будем писать $f \subset f'$, если f вложено в f'.

Окрестностью отображения f, вложенного в f', назовем отображение $f'' : U \to V$, где U — окрестность X в X', V — окрестность Y в Y', являющееся сужением f' на U. Заметим, что $f \subset f''$.

*) После представления статьи авторы узнали, что аналогичные результаты независимо получены Унгаром [8].

Назовем пару ретракций $r_X : X' \to X$ и $r_Y : Y' \to Y$ *ретракцией отображения* $f' : X' \to Y'$ на отображение $f : X \to Y$, вложенное в f', если диаграмма

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, bend right, "r_X"'] \arrow[d, phantom, "\cup"] & Y' \arrow[d, bend left, "r_Y"] \arrow[d, phantom, "\cup"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

— коммутативна.

Естественно ретракцию отображения f' на отображение f обозначать через $\varrho : f' \to f$. Нетрудно проверить, что в классе всех Хаусдорфовых пространств для всякой ретракции $\varrho : f' \to f$ пространства X и Y обязаны быть замкнутыми множествами в X' и, соотв., в Y', так что вложение $f \subset f'$ замкнуто.

Основное определение 1. Назовем отображение $f : X \to Y$ метризуемых пространств *абсолютным ретрактом категории* $C(\mathfrak{M})$, соотв., *абсолютным окрестностным ретрактом категории* $C(\mathfrak{M})$, если для всякого замкнутого вложения $f \subset f'$ существует ретракция $\varrho : f' \to f$ соответственно, ретракция $\varrho : f'' \to f$ некоторой окрестности f'' отображения f в f' на f.

Легко показать, что тождественное отображение $\mathrm{id}_X : X \to X$ пространства X класса $\mathfrak{M}$ является абсолютным ретрактом категории $C(\mathfrak{M})$, соотв., абсолютным окрестностным ретрактом категории $C(\mathfrak{M})$, тогда и только тогда, когда X является абсолютным ретрактом, соотв., абсолютным окрестностным ретрактом категории $\mathfrak{M}$ в обычном смысле.

Поэтому будем писать $f \in AR(\mathfrak{M})$, соотв., $f \in ANR(\mathfrak{M})$, если f является абсолютным ретрактом категории $C(\mathfrak{M})$, соотв., абсолютным окрестностным ретрактом категории $C(\mathfrak{M})$, и $X \in AR(\mathfrak{M})$, соотв., $X \in ANR(\mathfrak{M})$, если таковым, в обычном смысле, является метризуемое пространство X.

Разумеется, предыдущее утверждение и основное определение имеют смысл и для любой полной подкатегории $C(\mathfrak{N})$ категории $C(T)$.

Чтобы сформулировать основной результат необходимо еще одно

Определение 2. Семейство $\varphi = \{\Phi\}$ подмножеств пространства X называется *равностепенно локально стягиваемым* [3], если для каждой точки $x \in \Phi \in \varphi$ и каждой ее окрестности U(в X) найдется такая окрестность V той же точки (в X), что если $\Phi' \cap V \neq \emptyset$ для некоторого множества $\Phi' \in \varphi$, то $\Phi' \cap V$ стягиваемо в точку по $\Phi' \cap U$. Многозначное отображение $\mathscr{F} : Y \to X$ назовем *равностепенно локально стягиваемым* и будем писать $\mathscr{F} \in ELC$, если семейство $\{\mathscr{F}(y), y \in Y\}$ равностепенно локально стягиваемо.

Основная теорема 1. *Пусть X и Y — конечномерные метризуемые пространства, X — топологически полное пространство. Тогда отображение $f : X \to Y$ принадлежит классу $AR(\mathfrak{M})$ (соотв., $f \in ANR(\mathfrak{M})$) в том и только в том случае,* *когда f одновременно обладает следующими четырьмя свойствами* a), b), c), d) (*соотв., тремя свойствами* $\tilde{a}_N$), b) *и* c):

a) $Y \in AR(\mathfrak{M})$, $\tilde{a}_N$) $Y \in ANR(\mathfrak{M})$;

b) *отображение f открыто*;

c) *многозначное отображение $f^{-1}: Y \to X$ равностепенно локально стягиваемо*;

d) $f^{-1}(y) \in AR(\mathfrak{M})$ *для каждой точки $y \in Y$.*

Сразу же заметим, что из условия d) следует, что f – отображение „на", для $ANR(\mathfrak{M})$ – отображений это, вообще говоря, не так.

Далее будет доказано, что ни одно из названных условий не есть следствие других, т. е. не может быть откинуто без нарушения верности теоремы.

Перед доказательством введем еще несколько естественных определений и докажем несколько вспомогательных утверждений.

Напомним, что *морфизмом* $\mu: f \to f'$ из отображения $f: X \to Y$ в отображение $f': X' \to Y'$ называется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[r, "\beta"'] & Y' \end{tikzcd},$$

в которой отображения α и β непрерывны. Морфизмом является и определённая выше ретракция отображений.

Пусть отображение f вложено в f'. Скажем, что морфизм $\mu': f' \to \tilde{f}$ есть *продолжение морфизма* $\mu: f \to \tilde{f}$, если диаграмма

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, phantom, "\supseteq"] \arrow[rr, bend left, "\alpha'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & \tilde{X} \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ Y' \arrow[r, phantom, "\supseteq"] \arrow[rr, bend right, "\beta'"'] & Y \arrow[r, "\beta"] & \tilde{Y} \end{tikzcd}$$

коммутативна. Разумеется, здесь в силу всех предыдущих определений достаточно потребовать, чтобы $\alpha'|_X = \alpha$ и $\beta'|_Y = \beta$.

Определение 3. Назовем отображение $\tilde{f}: \tilde{X} \to \tilde{Y}$ категории $C(T)$ *абсолютным экстензором* категории $C(\mathfrak{M})$, если для любого замкнутого вложения $f \subset f'$, где $f, f' \in C(\mathfrak{M})$, всякий морфизм $\mu: f \to \tilde{f}$ имеет продолжение $\mu': f' \to \tilde{f}$. В этом случае будем писать $\tilde{f} \in AE(\mathfrak{M})$. Определение *абсолютного окрестностного экстензора* получится, еэли требовать существование продолжения морфизма μ на некоторую окрестность f'' отображения f в f'. В этом случае будем писать $\tilde{f} \in ANE(\mathfrak{M})$.

В качестве примеров докажем следующие утверждения:

Лемма 1. *Если $f \in AR(\mathfrak{M})$, то f является r-отображением.*

Лемма 2. *Если X и $Y \in ANE(\mathfrak{M})$, то проекция $\pi_Y : X \times Y \to Y$ будет абсолютным окрестностным экстензором категории $C(\mathfrak{M})$. Аналогично, если X и $Y \in AE(\mathfrak{M})$, то проекция $\pi_Y : X \times Y \to Y$ будет абсолютным экстензором категории $C(\mathfrak{M})$.*

Лемма 3. *Всякое отображение f категории $C(\mathfrak{M})$ можно замкнуто вложить в проекцию π_M: $L \times M \to M$, где L и $M \in AE(\mathfrak{M})$.*

Следствие. *Всякое отображение категории $C(\mathfrak{M})$ можно замкнуто вложить в отображение той же категории, являющееся абсолютным экстензором* (аналог теоремы Куратовского-Войдыславского [2]).

Доказательство леммы 1. Пусть $f : X \to Y$, $f \in AR(\mathfrak{M})$. Рассмотрим произведение $X \times Y$, а в нем график Γ отображения f, т. е. множество точек $\Gamma = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x),\ x \in X\}$. Пусть $i : X \to \Gamma$ задается формулой $i(x) = (x, f(x))$, $x \in X$. Очевидно, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \Gamma \arrow[d, "\pi_Y|_\Gamma"] & \subseteq & X \times Y \arrow[d, "\pi_Y"] \\ Y \arrow[r, "id_Y"'] & Y & = & Y \end{tikzcd}$$

представляет собой замкнутое вложение f в естественное проектирование $\pi_Y : X \times Y \to Y$. Так как $f \in AR(\mathfrak{M})$, то найдется ретракция $\varrho : \pi_Y \to \pi_Y|_\Gamma$, что в данном случае означает существование такой ретракции $r : X \times Y \to \Gamma$, что $\pi_Y|_\Gamma \circ r = \pi_Y$. Пусть $x_0 \in X$ произвольная точка и $\omega : Y \to X \times Y$ задается формулой $\omega(y) = (x_0, y)$. Рассмотрим отображение $g : Y \to X$, где $g(y) = i^{-1} \circ r \circ \omega(y)$. Имеем: $f \circ g(y) = f \circ i^{-1} \circ r \circ \omega(y) = \pi_Y|_\Gamma \circ r \circ \omega(y) = \pi_Y \circ \omega(y) = y$, что и доказывает лемму 1 (g есть искомое правое обратное для f).

Доказательство леммы 2. Приведем доказательство для случая $ANE(\mathfrak{M})$ — отображений. В случае абсолютных экстензоров доказательство аналогично.

Итак, пусть $\tilde{X}$, $\tilde{Y} \in ANE(\mathfrak{M})$ ($\equiv ANR(\mathfrak{M})$) и f замкнуто вложено в f'. Предположим, что дан морфизм $\mu : f \to \pi$, т. е. коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d, "f'"'] & \supset & X \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "f"] & \tilde{X} \times \tilde{Y} \arrow[d, "\pi"] \\ Y' & \supset & Y \arrow[r, "\beta"'] & \tilde{Y} \end{tikzcd}$$

. Так как $\tilde{X}$ и $\tilde{Y} \in ANE(\mathfrak{M})$, то найдутся окрестность U множества X в X' и окрестность V множества Y в Y', а также продолжение α' отображения $\alpha = \omega \circ \gamma : X \to X'$, где $\omega : \tilde{X} \times \tilde{Y} \to \tilde{X}$ проекция, на U и продолжение β' отображения β на V. Положим $W = f^{-1} V \cap U \supseteq X$, отображение $\gamma' : W \to \tilde{X} \times \tilde{Y}$ зададим формулой $\gamma'(x) = (\alpha'(x), \beta' f'(x))$, $x \in W$. Отображение $f'|_W$:

$: W \to V$ есть окрестность отображения f в f', а морфизм $\mu' : f'|_W \to f$, выражаемый диаграммой

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[d, "f'|_W"'] & \tilde{X} \times \tilde{Y} \arrow[d, "\pi"] \\ V \arrow[r, "\beta'"] & \tilde{Y} \end{tikzcd}$$

является продолжением μ. Лемма доказана.

Доказательство леммы 3. Известно [2], что найдутся два таких пространства L и M; являющихся абсолютными экстензорами категории $\mathfrak{M}$, что X замкнуто вкладывается в L, а Y — в M. Так как $M \in AE(\mathfrak{M})$, то f можно продолжить в отображение $g : L \to M$, так что диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & L \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, hook] & M \end{tikzcd}$$

— коммутативна.

Рассмотрим отображение i пространства L на график $i(L) \subseteq L \times M$ отображения g, задаваемое формулой $i(e) = (e, g(e)) \in L \times M$. Диаграмма

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "g"'] & L \times M \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, hook, "id_M"'] & M \end{tikzcd},$$

где π — проектирование, представляет собой замкнутое вложение $g \subset \pi$. Значит диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & L \times M \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[r, hook] & M \end{tikzcd}$$

, являющаяся композицией двух предыдущих, представляет собой искомое замкнутое вложение. Лемма 3 доказана. Слеедстви получим, применив лемму 2 к лемме 3. Заметим, что в леммах 1, 2 вместо $\mathfrak{M}$ можно брать любой другой класс (хаусдорфовых) пространств, а в следствии — любой такой класс $\mathfrak{N}$, что всякое пространство этого класса замкнуто вкладывается в пространство того же класса, являющееся абсолютным его экстензором (например, для категории $C(\mathfrak{B})$, где $\mathfrak{B}$ — все бикомпакты).

Теорема 2. *Отображение f метризуемых пространств является абсолютным (окрестностным) ретрактом категории $C(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда f является абсолютным (окрестностным) экстензором этой категории.*

Доказательству предпошлем 2 леммы.

Лемма 4. *Всякий ретракт абсолютного (окрестностного) экстензора категории $C(\mathfrak{M})$ является абсолютным (окрестностным) экстензором этой категории.*

Доказательство проведем для окрестностного случая. Действительно, пусть мы имеем $f' \supset f \xrightarrow[\mu]{} \tilde{f} \underset{\xleftarrow[\varrho]{}}{\subseteq} f''$, где $f' \supset f$ некоторое замкнутое вложение, $\tilde{f}$ есть ретракт f'' с ретракцией $\varrho : f'' \to \tilde{f}$, и $\mu : f \to \tilde{f}$ – произвольный морфизм. Взяв продолжение $\mu'' : f''' \to f''$ этого морфизма на окрестность f''' отображения f в f' (ведь $f'' \in ANE(\mathfrak{M})$), мы получим искомое продолжение μ' по формуле $\mu' = \varrho \circ \mu''$.

Для доказательства той части теоремы 2, которая касается $AR(\mathfrak{M})$ – отображений, этой леммы достаточно, но для окрестностного случая нам понадобится еще одно утверждение, являющееся аналогом 1-ой теоремы Ханнера [2].

Лемма 5. *Пусть $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ и $\tilde{f} \in ANE(\mathfrak{M})$. Пусть, далее, $\tilde{f}|_U : U \to V$ есть сужение этого отображения на открытое множество $U \subseteq \tilde{X}$ со значениями в некотором открытом множестве $V \subseteq \tilde{Y}$, содержащем $\tilde{f}(U)$.*

Тогда $\tilde{f}|_U$ также есть абсолютный окрестностный экстензор категории $C(\mathfrak{M})$.

Пусть имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[d, "f'"'] & \supseteq & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & U \arrow[d, "\tilde{f}|_U"] & \subseteq & \tilde{X} \arrow[d, "\tilde{f}"] \\
Y' & \supseteq & Y \arrow[r, "\beta"'] & V & \subseteq & \tilde{Y}
\end{tikzcd}$$

где $f \subset f'$ – некоторое замкнутое вложение.

Продолжив сначала морфизм $\mu = (\alpha, \beta)$ в морфизм $\tilde{\mu} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) : f'' \to \tilde{f}$, где f'' – окрестность f в f', а затем сузив $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\alpha}$ на $\tilde{\beta}^{-1}V \supseteq Y$ и $\tilde{\alpha}^{-1}U \supseteq X$ соответственно, мы получим морфизм $\mu' : f''' \to \tilde{f}|_U$ некоторой „меньшей" окрестности f''' отображения f, продолжающий морфизм μ.

Доказательство теоремы 2. Мы его проведем для окрестностного случая, доказательство же в случае $AR(\mathfrak{M})$ – отображений проще и опирается, как было уже сказано, только на лемму 4.

Пусть $f \in ANR(\mathfrak{M})$. Вложим f замкнуто в абсолютный экстензор P категории $C(\mathfrak{M})$, что возможно в силу следствия леммы 2 и 3 (хотя нам достаточно было бы вложение в абсолютный окрестностный экстензор). Так как $f \in ANR(\mathfrak{M})$, то f окажется ретрактом некоторой своей окрестности в P. Из леммы 4 и 5 следует, что $f \in ANE(\mathfrak{M})$.

Обратное вложение $ANE(\mathfrak{M}) \subseteq ANR(\mathfrak{M})$, так же как и в случае категории топологических пространств, доказывается элементарно. Теорема 2 доказана.

Заметим, что леммы 4, 5 и „достаточность" теоремы 2 верны в весьма общем случае: класс $\mathfrak{M}$ можно заменить на любой другой класс топологических пространств. „Необходимость" теоремы 2 справедлива для таких классов $\mathfrak{N}$, что всякий объект из $\mathfrak{N}$ можно замкнуто вложить в другой объект класса $\mathfrak{N}$, являющийся его абсолютным экстензором.

Теорема 3. *Пусть* $f : X \to Y$ *– продолжение отображения* $f_A : A \to Y$, *где* $A \subseteq X$ *и* A *топологически полно и замкнуто в конечномерном пространстве* X. *Если* f *удовлетворяет требованиям* b), c), d), *соотв.* b) *и* c) *теоремы* 1, *то* f_A *удовлетворяет тем же требованиям в том и только в том случае, когда* f_A *есть ретракт* f, *соотв., ретракт некоторой своей окрестности в* f.

Другими словами, существует ретракция $r : X \to A$, соотв., $r : U \to A$, где U – окрестность A в X, обладающая свойством $f_A \circ r = f$.

Доказательство теоремы 3. Проведем его для 1-го случая, делая необходимые замечания для 2-го случая (окрестностного). Пусть в предположениях теоремы ретракция $r : X \to A$ удовлетворяет условию $f \circ r = f$. Тогда $f_A \circ r = f$ и, как легко видеть, $r(f^{-1}(y)) = f_A^{-1}(y)$ для любого $y \in Y$. Значит, $f_A^{-1}(y) \in$ $\in AR(\mathfrak{M})$, т. к. r является ретракцией на каждом слое, а свойство быть $AR(\mathfrak{M})$ – пространством сохраняется при ретракциях, кроме того, нетрудно заключить, что $f_A(a) = f(r^{-1}(a))$ для любого $a \in A$. Значит, вместе с f открыто и f_A. В окрестностном случае f_A не является ретрактом f, но является ретрактом своей окрестности в f, которая очевидно, также есть открытое отображение. Следовательно, и в этом случае f_A открыто. Покажем теперь, что $f_A^{-1} \in ELC$.

Пусть U – произвольная окрестность (в A) точки $a \in A$, а $\tilde{U} = r^{-1}(U)$. Так как $f^{-1} \in ELC$, то существует такая окрестность $\tilde{V}$ точки а в X, что для всякой точки $y \in Y$ (при непустом пересечении $f^{-1}(y) \cap \tilde{V}$) существует такая гомотопия $\tilde{H}_y : (\tilde{V} \cap f^{-1}(y)) \times I \to \tilde{U} \cap f^{-1}(y)$, что $\tilde{H}_y(v, 0) = v_y$ и $\tilde{H}(v, 1) = v$ при любом $v \in \tilde{V} \cap f^{-1}(y)$.

Искомой окрестностью (в A) точки a будет пересечение $V = \tilde{V} \cap A$, а искомой гомотопией – композиция $H_y = r \circ \tilde{H}_y$ (если пересечение $V \cap f_A^{-1}(y) \neq \emptyset$). Проверим это. Пусть $v \in V \cap f_A^{-1}(y) \subseteq \tilde{V} \cap f^{-1}(y)$. Тогда $H_y(v, t) = r(\tilde{H}_y(v, t)) \in$ $\in r(\tilde{U} \cap f^{-1}(y)) \subseteq U \cap r(f^{-1}(y)) = U \cap f_A^{-1}(y)$. Итак, $H_y((V \cap f_A^{-1}(y)) \times I \subseteq$ $\subseteq U \cap f_A^{-1}(y)$. Оставшееся просто. Для любого v из $V \cap f_A^{-1}(y)$ имеем:

$$H_y(v, 0) = r(\tilde{H}_y(v, 0)) = r(v_y)\,,$$
$$H_y(v, 1) = r(\tilde{H}_y(v, 1)) = v\,.$$

В окрестностном случае следует заметить, что окрестность f'' для f_A в f' сама удовлетворяет свойству $(f'')^{-1} \in ELC$, а т. к. f_A есть её ретракт, то, как показывают рассуждения выше, $f_A^{-1} \in ELC$.

Обратно. Пусть в предположениях теоремы отображение f_A удовлетворяет свойствам b), c), d). Мы имеем многозначное отображение $f_A^{-1} \circ f : X \to A$ и на множестве A его селекцию [4] $\mathrm{id}_A : A \to A$. Если мы продолжим селекцию id_A

в селекцию $r : X \to A$ на X, а во 2-ом случае на окрестность U множества A, то получим искомую ретракцию, так как если $r(x) \in f_A^{-1}(f(x))$, то $f \circ r = f_A \circ r = f$.

Для этого воспользуемся теоремой 1.2 Майкла [4] о продолжении селекции. По предположению A — полно, X — конечномерно, f_A — открыто, и, как легко проверить, тогда $f_A^{-1} \circ f$ — полунепрерывно снизу [5]. Так как $f_A^{-1} \in ELC$, то и $f_A^{-1} \circ f \in ELC$. Наконец, $f_A^{-1}(f(x)) \in AR(\mathfrak{M})$ для каждого $x \in X$ (в окрестностном случае этого не надо). Пусть $\dim X = n + 1$ $(n \geqq -1)$, тогда $\{f_A^{-1} \circ f(x), x \in X\} \in ELC^n$ [4] и $f_A^{-1}(f(x)) \in C^n$ для каждого $x \in X$ (в окрестностном случае только первое). Наконец, X метризуемо и, следовательно, паракомпактно. Итак, все условия теоремы Майкла выполнены. Значит, селекцию id_A можно продолжить в селекцию $r : X \to A$, а она, как было сказано, и будет искомой ретракцией (в окрестностном случае, эта селекция задана на некоторой окрестности U множества A).

Заметим, что для „достаточности" условия конечномерности и полноты излишни. Не нужна и метризуемость. Свойства b), c) и d), а в окрестностном случае — b) и c) получаются по отдельности из тех же войств отображения f. Ясно, что класс $\mathfrak{M}$ здесь можно заменить на любой классс $\mathfrak{N}$ топологических пространств. Для „необходимости", т. е. для построения ретракции нужны все три условия b), c) и d) (b) и c) в окрестностном случае) и, кроме того, ограничения типа полноты и конечномерности.

Доказательство теоремы 1. Доказательство будем вести для $AR(\mathfrak{M})$ — отображений, делая необходимые замечания относительно $ANR(\mathfrak{M})$ — отображений.

Пусть $f : X \to Y \in AR(\mathfrak{M})$. Докажем наличие условия a). Для этого, как и в доказательстве леммы 3, вложим замкнуто пространства X и Y в абсолютные ретракты L и M соответственно и продолжим отображение g в отображение $g : L \to M$. Получим замкнутое вложение $f \subset g$. В силу основного определения найдется ретракция $\varrho : g \to f$ или, в окрестностном случае, ретракция $\varrho : f' \to f$ некоторой окрестности f' в g.

Из определения ретракции ϱ следует, что X и Y есть ретракты абсолютных ректрактов, то есть X и $Y \in AR(\mathfrak{M})$, в окрестностном же случае X и Y окажутся ретрактами открытых множеств $ANR(\mathfrak{M})$-пространств, что в силу 1-ой теоремы Ханнера [2] влечет: X и $Y \in ANR(\mathfrak{M})$.

Докажем выполнение условий b), c) и d) (а в окрестностном случае — b) и c)) с помощью теоремы 3. Для этого замкнуто вложим данное отображение f в проекцию $\pi : X \times Y \to Y$ с помощью замкнутого вложения $i : X \to X \times Y$, определенного формулой $i(x) = (x, f(x)) \in X \times Y$ для всех $x \in X$, и тождества id_Y. Необходимая коммутативность $\pi \circ i = \mathrm{id}_Y \circ f$ очевидна. Вспомним теперь, что проекция π открыта. Так как $X \in AR(\mathfrak{M})$, то $\pi^{-1}(y) \in AR(\mathfrak{M})$ (в окрестностном случае $\pi^{-1}(y) \in ANR(\mathfrak{M})$, но нам это не нужно). Докажем теперь, что $\pi^{-1} \in ELC$. В самом деле, так как $X \in AR(\mathfrak{M})$ (в окрестностном случае $X \in ANR(\mathfrak{M})$), то $X \in LC$, то есть для каждой точки x_0 и каждой её окрестности U в X существует такая окрестность V той же точки x_0 в X и такая гомотопия $H: V \times I \to U$, что $H(v, 0) = v_0$ и $H(v, 1) = v$ для любых $v \in V$. Теперь для произвольной окрестности $\tilde{U}$ произвольной точки (x_0, y_0) в $X \times Y$ найдутся такие окрестности U и W, x_0 в X и соотв., y_0 в Y, что $U \times W \subseteq \tilde{U}$. Пусть V соответствует U и тому, что $X \in LC$, тогда искомой окрестностью $\tilde{V}$ будет окрестность $V \times W$, а гомотопия $\tilde{H}_w : (\tilde{V} \cap \pi^{-1}(w)) \times I \to \tilde{U} \cap \pi^{-1}(w)$ для любых $w \in W$ (для других $w \in Y$ пересечение $\tilde{V} \cap \pi^{-1}(w) = \emptyset$) определяется следующими формулами:

$$\tilde{H}_w((v, w), t) = (H(v, t), w) \quad \text{при всяких} \quad v \in V, \quad w \in W \quad \text{и всех} \quad t \in [0, 1] = I.$$

В самом деле, $\tilde{H}_W((\tilde{V} \cap \pi^{-1}(w)) \times I) \subseteq (H(V \times I) \times W) \cap \pi^{-1}(w) \subseteq (U \times W) \cap \cap \pi^{-1}(w) \subseteq \tilde{U} \cap \pi^{-1}(w)$.

Кроме того, имеем (при каждом $w \in W$):

$\tilde{H}_w((v, w), 0) = (H(v, 0), w) = (v_0, w)$ и $\tilde{H}_w((v, w), 1) = (H(v, 1), w) = (v, w)$ для любого $v \in V$.

Итак, отображение π удовлетворяет трем условиям b), c) и d) (в окрестностном случае – b) и c)) теоремы 3. Ясно, что π является продолжением ограничения $\pi|_A$ проекции π на замкнутом множестве $A = i(X)$. Так как $f \in AR(\mathfrak{M})$ (или $f \in ANR(\mathfrak{M})$), то существует ретракция $\varrho : \pi \to \pi|_A$ (или, соотв., ретракция $\varrho : \pi' \to \pi|_A$ некоторой окрестности π' отображения $\pi|_A$ в π).

В нашем случае, когда область значений $\pi|_A$ и π совпадают, это означает существование такой ретракции $r : X \times Y \to A$ в обычном смысле (ретракции $r : U \to A$ некоторой окрестности U пространства A в $X \times Y$), что $\pi|_A \circ r = \pi$ (или $\pi|_A \circ r = \pi'$), а значит, $\pi \circ r = \pi$. Но тогда, согласно теореме 3, и отображение $\pi|_A$ будет обладать свойствами b), c) и d) (соотв., b) и c) для окрестностного случая). Отсюда следует, что этими же свойствами обладает и f, изоморфное $\pi|_A$ в категории $C(\mathfrak{M})$.

Обратно. Пусть отображение f обладает свойством a), b), c) и d), соотв., свойствами ã), b) и c). Покажем, что $f \in AR(\mathfrak{M})$, соотв., $f \in ANR(\mathfrak{M})$. Для этого, в силу теоремы 2 и леммы 4, достаточно показать, что f есть ретракт некоторого абсолютного экстензора, соотв., абсолютного окрестностного экстензора категории $C(\mathfrak{M})$. Для этого снова вложим f в проекцию тем же стандартным способом (с помощью отображения $i : X \to X \times Y$ на график отображения f и тождества id_Y) и покажем, что, во-первых, проектирование $\pi : X \times Y \to Y$ принадлежит классу $AE(\mathfrak{M})$ (соотв., $\pi \in ANE(\mathfrak{M})$), а во-вторых, при этом вложении f, точнее, его образ при этом вложении есть ретракт (окрестностный) проектирования π.

Для первого, в силу леммы 2, достаточно показать, что $X \in AE(\mathfrak{M})$ (соотв., $X \in ANE(\mathfrak{M})$). Проведем доказательство для окрестностного случая, для глобального случая рассуждения аналогичны.

Пусть $\alpha : Z_0 \to X$ – непрерывное отображение замкнутого подмножества Z_0 метризуемого конечномерного пространства Z. Тогда отображение $f \circ \alpha : Z_0 \to$

$\to Y$ имеет продолжение $\beta : U \to Y$ (ведь $Y \in ANE(\mathfrak{M})$), где U некоторая окрестность Z_0 в Z. Рассмотрим многозначное отображение $\varphi : U \to X$, задаваемое формулой $\varphi(u) = f^{-1}\beta(u)$. Так как $\dim Z < \infty$, то и $\dim U < \infty$. Рассуждая аналогично доказательству теоремы 3, мы видим, что селекцию $\alpha : Z_0 \to X$ для многозначного отображения $\varphi|_{Z_0}$ можно продолжить на окрестность V множества Z_0 в U до непрерывной селекции $\bar{\alpha} : V \to X$. Множество V, будучи открытым в U, открыто и в Z, и $\bar{\alpha}$ есть искомое продолжение. Остается теперь сослаться на теорему Куратовского-Дугунджи [2], из которой следует, ввиду конечномерности X, что $X \in ANE(\mathfrak{M})$.

Для того, чтобы показать, что образ f при вложении его в проектирование есть ретракт этого проектирования, достаточно опять сослаться на теорему 3.

Основная теорема 1 полностью доказана.

Заметим, что „необходимость" теоремы 1 выполняется и без требования полноты и конечномерности. Они нужны лишь при доказательстве „достаточности" и, как показывает лемма 6 ниже, существенны.

Если в теореме 1 заменить условия a) и ã) на условия a′) $X \in AR(\mathfrak{M})$ и ã′) $X \in ANR(\mathfrak{M})$ заключение теоремы останется верным, а условия её — независимыми. По ходу доказательства теоремы 1 было доказано и следующее утверждение, дающее еще одну характеристику $AR(\mathfrak{M})$ и $ANR(\mathfrak{M})$ – отображений:

Теорема 4. *$f \in AR(\mathfrak{M})$ (соотв., $f \in ANR(\mathfrak{M})$), тогда и только тогда, когда $Y \in AR(\mathfrak{M})$ (соотв., $Y \in ANR(\mathfrak{M})$) и для любых отображений $\alpha : Z_0 \to X$ и $\beta : Z \to Y$, где Z_0 – замкнутое подмножество метризуемого пространства Z и $f \circ \alpha = \beta|_{Z_0}$, найдется такое $\bar{\alpha} : Z \to X$ (соотв., такая окрестность U множества Z_0 в Z и отображение $\bar{\alpha}$), что $f \circ \bar{\alpha} = \beta$ и $\bar{\alpha}|_{Z_0} = \alpha$. Заметим, что и здесь проходит замена условия $Y \in AR(\mathfrak{M})$ ($Y \in ANR(\mathfrak{M})$) на $X \in AR(\mathfrak{M})$ ($X \in ANR(\mathfrak{M})$).*

Лемма 6. *Существует такое (бикомпактное) отображение $f : X \to Q$, где Q – гильбертов куб, что:*

a) *X – полное метризуемое (сепарабельное) пространство;*

b) *f – открытое отображение;*

c) $f^{-1} \in ELC$;

d) *$f^{-1}(y) \in AR$, для любой точки $y \in Q$, но $f \notin AR(\mathfrak{M})$.*

Доказательство леммы 6. Пусть $\mathscr{F} : Q_1 \to Q_2$ многозначное отображение гильбертовых кубов, построенное в работе [6].

Известны следующие свойства этого многозначного отображения:

(α) $\mathscr{F}(x) \in AR$, $x \in Q_1$;
(β) $\{\mathscr{F}(x), x \in Q_1\} \in ELC$;
(γ) $\mathscr{F}$ полунепрерывно снизу:
(δ) $\mathscr{F}$ не допускает непрерывной селекции.

Пусть $X \subset Q_1 \times Q_2$ есть график этого отображения, т. е. множество $X = \{(x, y) \in Q_1 \times Q_2 \mid y \in \mathscr{F}(x), x \in Q_1\}$, нетрудно показать, что X топологически полно.

Рассмотрим проектирование $\pi : Q_1 \times Q_2 \to Q_1$ и его ограничение $\pi|_X = f : X \to Q_1$. Из (α) следует: $f^{-1}(y) \in AR$, $y \in Q_1$; из (β) следует, что $f^{-1} \in ELC$, из (γ) следует, что f открыто; а из (δ), наконец, следует, что и f^{-1} не допускает непрерывной селекции, что означает, что f не есть r — отображение. Из леммы 1 вытекает, что $f \notin AR(\mathfrak{M})$ (можно показать даже, что $f \notin ANR(\mathfrak{M})$).

Лемма 7. *Свойства* a), b), c) *и* d), *соотв.,* ã), b) *и* c) *теоремы* 1 *независимы даже в классе двумерных компактов.*

A. Тождество $\mathrm{id}_X : X \to X$, где $X \notin LC$ удовлетворяет требованиям b), c) и d) но не удовлетворяет даже ã).

B. Проекция $\omega : I \cup I' \to I$ двух прилегающих сторон I и I' квадрата на сторону I удовлетворяет требованиям a), c) и d), но не удовлетворяет требованию b).

C. Проекция $\pi_X : C \cup C' \to I_X$ цилиндра $C = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \leqq z \leqq 1\}$ с крышкой $C' = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 \leqq 1, \ z = 0\}$ на отрезок $I_X = [-1, 1]$ оси OX удовлетворяет требованиям a), b) и d), но не удовлетворяет требованию c).

D. Пусть $X \in LC$, но $X \notin C$ и $f : X \to (p)$ — постоянное отображение. f удовлетворяет требованиям a), b), c), но не удовлетворяет d).

Приведем напоследок еще одно свойство $ANR(\mathfrak{M})$ — отображений, являющееся непосредственным следствием основной теоремы 1, и аналогичное второй теореме Ханнера [2] и [7]. Для этого нам понадобится еще одно определение:

Определение 4. Отображение $f : X \to Y$ назовем *локальным абсолютным окрестностным ретрактом категории* $C(\mathfrak{M})$ и будем писать $f \in LANR(\mathfrak{M})$, если для всякой точки $y \in Y$ найдется такая её окрестность $Oy \subseteq Y$, что отображение $f|_{f^{-1}O_y} : f^{-1}Oy \to Oy$ является абсолютным окрестностным ретрактом категории $C(\mathfrak{M})$.

Теорема 6. *Если пространства X и Y удовлетворяют предположениям теоремы I о полноте и конечномерности, то отображение $f : X \to Y$ является $LANR(\mathfrak{M})$ — отображением тогда и только тогда, когда $f \in ANR(\mathfrak{M})$.*

Доказательство теоремы 6. Включение $ANR(\mathfrak{M}) \subseteq LANR(\mathfrak{M})$ следует из определения 4, причем окрестность точки $y \in Y$ в определении может быть выбрана, благодаря лемме 5, произвольно.

Пусть теперь $f \in LANR(\mathfrak{M})$. Для доказательства включения $f \in ANR(\mathfrak{M})$ проверим выполнение условий $\tilde{a}_N$), b) и c) теоремы 1. В дальнейшем под Oy всегда понимается окрестность точки y из определения 4.

Так как $Y = \bigcup_{y \in Y} Oy$, а по теореме 1 $Oy \in ANR(\mathfrak{M})$, то из [7] следует, что $Y \in \in ANR(\mathfrak{M})$.

Перейдем к условию b). Пусть $U \subseteq X$ – открытое множество. Так как $X = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}Oy$, то $U = \bigcup_{y \in Y} (f^{-1}Oy \cap U)$ и $f(U) = \bigcup_{y \in Y} \{Oy \cap f(U)\}$. Но множество $Oy \cap f(U)$ открыто в Oy согласно выполнению свойства b) для отображения $f|_{f^{-1}Oy} : f^{-1}Oy \to Oy$. Так как Oy открыты в Y, то и $f(U)$ открыто.

Покажем выполнение условия c). Пусть $x \in X$ – некоторая точка, $U \subseteq X$ – некоторая её окрестность. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $U \subseteq f^{-1}Oy$ для некоторой точки $y \in Y$. Так как для отображения $f|_{f^{-1}Oy} : f^{-1}Oy \to Oy$ условие c) выполнено, то найдется такая окрестность точки x и такая гомотопия $H_{y'} : (V \cap f^{-1}y') \times I \to U \cap f^{-1}(y')$ для любой точки $y' \in Y$ (с непустым пересечением $V \cap f^{-1}(y')$), что $H_{y'}(v, 0) = v_{y'}$ и $H_{y'}(v, 1) = v$ для любой точки $v \in V \cap f^{-1}(y')$. Ясно, что эта окрестность и эта гомотопия доказывают тот факт, что $f^{-1} \in ELC$.

Литература

[1] *Цаленко М. Ш., Шульгейфер:* Основы теории категорий, М, 1974.

[2] *К. Борсук:* Теория ретрактов. М., „Мир“, 1971.

[3] *K. Borsuk:* On some metrizations of hyperspace of compact sets, Fund. Math., *41* (1954) p. p. 168—202.

[4] *E. Michael:* Continuous selections II, Ann. Math., Ser. 2, *64*, No 3 (1956), 562—580.

[5] *К. Куратовский:* Топология, т. 2, М., „Мир“, 1969.

[6] *C. P. Pixley:* An example concerning continuous selections on infinite-dimensional spaces, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. *43*, No 1, March 1974, 237—244.

[7] *Hu S. T.:* Theory of retracts, Wayne State University Press, Detroit, 1965.

[8] *Ungar G.:* ANR's and NES's in the category of map on metric spaces, Fund. Math. 95 (1977), 111—127.

Адрес авторов: МГУ, механико-математический факультет, кафедра топологии, Москва, СССР.