Johannes Elschner; Bernd Silbermann

# Eine Klasse entarteter gewöhnlicher Differentialgleichungen und das Kollokationsverfahren zu ihrer Lösung

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 29 (1979), No. 4, 551–563

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101636

Czechoslovak Mathematical Journal, 29 (104) 1979, Praha

# EINE KLASSE ENTARTETER GEWÖHNLICHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN UND DAS KOLLOKATIONSVERFAHREN ZU IHRER LÖSUNG

JOHANNES ELSCHNER, Berlin, und BERND SILBERMANN, Karl-Marx-Stadt

(Eingegangen am 22. August 1977)

In dieser Arbeit untersuchen wir entartete gewöhnliche Differentialgleichungen der Gestalt

$$(1) \qquad (Ay)(t) = [(tD_t)^l + a_{m-1}(t)(tD_t)^{l-1} + \ldots + a_{m-l}(t)]\, D_t^{m-l}\, y(t) + \\ + \sum_{i=l+1}^{m} a_{m-i}(t)\, D_t^{m-i}\, y(t) = f(t)$$

mit $D_t y = y'$, $l \in \mathbb{N}$ und $l \leqq m$. Für $m = l$ ergeben sich gerade die Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse (vgl. [2]).

Näherungsmethoden zur Lösung von Randwertproblemen für die Gleichung (1) im Fall $m = 2$ wurden in zahlreichen Arbeiten betrachtet; dies betrifft insbesondere das Differenzenverfahren (vgl. [8] und die dort angegebene Literatur). In [4] wurde ein Differenzenverfahren u. a. für die allgemeine Differentialgleichung (1) untersucht während in [6] Differenzverfahren für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit einer singulären Stelle 1. Art studiert wurden (bekanntlich lässt sich die Gleichung (1) im Fall $m = l$ auf ein derartiges System zurückführen; vgl. [2], S. 124). Natterer [9] verwendete eine verallgemeinerte Spline-Methode zur näherungsweisen Lösung gewisser Randwertprobleme für ein solches System.

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir ein Kollokationsverfahren für die skalare Gleichung (1) im Fall beliebig hoher Ordnung. In [11] ist eine wesentlich speziellere Variante dieser Arbeit enthalten.

Die Untersuchungen stützen sich wesentlich auf die Theorie der normal auflösbaren Operatoren (vgl. [10], Kap. 1 oder [7]). Sie wurden so angelegt, dass das Kollokationsverfahren zur näherungsweisen Lösung von gewissen 2-Punkt-Randwertaufgaben für die Gleichung $Ay = f$ relativ einfach begründet werden kann. Besondere Aufmerksamkeit wird der Konvergenzgeschwindigkeit gewidmet.

**1.** Es sei $X_p^k = X_p^k[0, 1]$, $k \in \mathbb{N}_0(\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\})$, für $1 < p < \infty$ der Sobolewraum $W_p^k[0, 1]$ mit der Norm $\|y\|_{W_p^k} = \sum_{i=0}^{k} (\int_0^1 |y^{(i)}(t)|^p \, dt)^{1/p}$ und für $p = \infty$ der Raum $C^k[0, 1]$ der $k$-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$ mit der Norm $\|y\|_{C^k} = \sum_{i=0}^{k} \max_{t \in [0,1]} |y^{(i)}(t)|$.

Für $\varrho \in [0, \infty)$ und $p < \infty$ bezeichne $X_p^{k,\varrho}$ den Banach-Raum $\{y \in X_p^k : t^{-\varrho} y^{(k)} \in \in X_p^0\}$ mit der Norm $\|y\|_{X_p^{k-1}} + \|t^{-\varrho} y^{(k)}\|_{X_p^0}$; für $p = \infty$ sei dies der Raum $C^{k,\varrho} = = \{y \in C^k : t^{-\varrho}[y^{(k)}(t) - y^{(k)}(0)] \in C^0\}$ mit der Norm

$$\|y\|_{C^{k-1}} + \|t^{-\varrho}[y^{(k)}(t) - y^{(k)}(0)]\|_{C^0} + |y^{(k)}(0)| .$$

Schliesslich bezeichnen wir mit $H^\lambda[0, 1]$ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ den Raum der hölderstetigen Funktionen auf $[0, 1]$.

Wir betrachten den Operator $A$ in den Raumpaaren $X_p^{k+m-l,\varrho}$, $X_p^{k,\varrho}$, wobei wir für das Weitere stets

$$\text{(2)} \qquad 0 \leqq \varrho < \frac{1}{p} \quad \text{für} \quad p < \infty \quad \text{und} \quad 0 \leqq \varrho < 1 \quad \text{für} \quad p = \infty$$

und

$$\text{(3)} \qquad a_{m-i}(t) \in C^{1,\varrho}[0, 1] \, , \quad i = 1, \ldots, l \, , \quad a_{m-i}(t) \in C^{0,\varrho}[0, 1] \, , \quad i = l + 1, \ldots, m$$

voraussetzen. Das Definitionsgebiet $D_p^{k,\varrho}(A)$ sei die lineare Menge

$$X_{p,m-l}^{k,\varrho} = \{y \in X_p^{k+m-l,\varrho} : \exists f_i \in X_p^{k,\varrho} \quad \text{derart, dass}$$
$$(tD_t)^i \, D_t^{m-l} \, y(t) = f_i(t) \quad \text{für} \quad t \neq 0 \, , \quad i = 1, \ldots, l\} \, .$$

$X_{p,m-l}^{k,\varrho}$ ist offenbar mit der Norm $\|y\| = \|y\|_{X_p^{k+m-l,\varrho}} + \sum_{i=1}^{l} \|f_i\|_{X_p^{k,\varrho}}$ ein Banach-Raum und $A : X_{p,m-l}^{0,\varrho} \to X_p^{0,\varrho}$ unter den Voraussetzungen (2) ein linearer stetiger Operator.

Dem Operator $A$ ordnen wir nun die charakteristische Gleichung

$$\text{(4)} \qquad \lambda^l + a_{m-1}(0) \, \lambda^{l-1} + \ldots + a_{m-l}(0) = 0$$

zu, deren Wurzeln wir mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ bezeichnen. Im weiteren sei stets die Bedingung

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{Re} \lambda_j \neq -\frac{1}{p} + k + \varrho \, , \quad j = 1, \ldots, l$$

erfüllt. Mit $l_1 = l_1(p, k, \varrho)$ bezeichnen wir die Anzahl der $\lambda_j$ mit

$$\operatorname{Re} \lambda_j > -\frac{1}{p} + k + \varrho \, .$$

Für die Gleichung (1) stellen wir nunmehr das folgende Randwertproblem:

$$(6) \qquad (Ay)(t) = f(t)\,,$$

$$u_i(y) = \sum_{j=0}^{m-l} a_{ij}\, y^{(j)}(0) + \sum_{j=0}^{m-1} b_{ij}\, y^{(j)}(1) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, \tilde{m}\,,$$

wobei $\tilde{m} = \mathrm{m} - l + l_1(p, 0, \varrho)$, $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}$, $a_{i,m-l} = 0$ für $p < \infty$ $(i = 1, \ldots, \tilde{m})$ und die Zeilen der Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{10} \ldots a_{1,m-1} & b_{10} \ldots b_{1,m-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{\tilde{m}0} \ldots a_{\tilde{m},m-1} & b_{\tilde{m}0} \ldots b_{\tilde{m},m-1} \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind.

Das Problem (6) schreiben wir im weiteren in der Operatorform

$$(7) \qquad \boldsymbol{A}y = \begin{pmatrix} Ay \\ Uy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Uy = (u_i y)_1^{\tilde{m}}\,.$$

Offenbar stellen die Ausdrücke $u_i(y)$, $i = 1, \ldots, \tilde{m}$, linear unabhängige stetige Funktionale über dem Banachraum $X^{0,\varrho}_{p,m-l}$ dar. Dann ist $\tilde{X}^{0,\varrho}_{p,m-l} = \{y \in X^{0,\varrho}_{p,m-l} : : Uy = 0\}$ ein abgeschlossener Teilraum von $X^{0,\varrho}_{p,m-l}$ mit der Kodimension $\tilde{m}$. Offenbar ist $A : \tilde{X}^{0,p}_{p,m-l} \to X^{0,\varrho}_p$ stetig, d. h. $\boldsymbol{A} \in \mathscr{L}(\tilde{X}^{0,\varrho}_{p,m-l}, X^{0,\varrho}_p)$.

**Satz 1.** *Es seien die Voraussetzungen (2), (3) und (5) für $k = 0$ erfüllt. Dann ist der Operator $\boldsymbol{A} \in \mathscr{L}(\tilde{X}^{0,\varrho}_{p,m-l}, X^{0,\varrho}_p)$ ein $\Phi$-Operator mit dem Index 0.*[1] *Sind weiterhin die Voraussetzungen*

$$(8) \qquad a_{m-i}(t) \in C^{k+1,\varrho'}[0, 1]\,, \quad i = 1, \ldots, l\,,$$

$$a_{m-i}(t) \in C^{k,\varrho'}[0, 1]\,, \qquad i = l + 1, \ldots, m\,,$$

$$k + \varrho' \geqq \varrho\,, \quad \varrho' \leqq \frac{1}{p} \quad \textit{für} \quad p < \infty \quad \textit{und} \quad \varrho' < 1 \quad \textit{für} \quad p = \infty \quad \textit{sowie}$$

$$(9) \qquad \operatorname{Re} \lambda_j \notin \left[-\frac{1}{p} + \varrho,\ k + \varrho' - \frac{1}{p}\right], \quad j = 1, \ldots, l$$

*und $f \in X^{k,\varrho'}_p$ erfüllt, so gehört jede Lösung $y \in X^{0,\varrho}_{p,m-l}$ des Problems zum Raum $X^{k,\varrho'}_{p,m-l}$.*

Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir eine Reihe von Behauptungen, denen wir uns jetzt zuwenden werden. Zunächst formulieren wir

[1]) Die Definition des $\Phi$-Operators siehe [10], Kap. 1.

**Satz 2.** *Es seien die Voraussetzungen* (2), (5) *und*

$$a_{m-i}(t) \in C^{k+1,\varrho}\,, \quad i = 1, \ldots, l\,, \quad a_{m-i}(t) \in C^{k,\varrho}\,, \quad i = l+1, \ldots, m$$

*erfüllt. Dann ist der Operator* $A \in \mathscr{L}(X^{k,\varrho}_{p,m-l}, X^{k,\varrho}_p)$ *ein* $\Phi$*-Operator mit dem Index* $\varkappa_{p,k,\varrho}(A) = l_1(p, k, \varrho) + m - l$.

Bemerkung 1. Satz 2 wurde für $\varrho = 0$ im Fall $\operatorname{Re} \lambda_j \notin [-1/p, -1/p + k]$, $j = 1, \ldots, l$, sowie in einigen Fällen für $\varrho > 0$ mit anderen Methoden in [5] bewiesen. Im Fall der Raumpaare $C^{k+m-l}$, $C^k$ ergibt sich Satz 2 unter der Bedingung $\operatorname{Re} \lambda_j < k$, $j = 1, \ldots, l$, auch aus den Resultaten der Arbeit [1].

Bemerkung 2. Ähnlich wie Satz 2.1 in [3] kann man zeigen, dass der Operator $A \in \mathscr{L}(X^{k,\varrho}_{p,m-l}, X^{k,\varrho}_p)$ kein $\Phi$-Operator ist, falls die Bedingung (5) verletzt ist.

Wir benötigen nun einige Hilfssätze.

**Hilfssatz 1.** *Die Differentialgleichung*

$$tD_t y - \lambda y = f\,, \quad \lambda \in \mathbb{C} \tag{10}$$

*hat unter der Voraussetzung* $\operatorname{Re} \lambda \neq -1/p$ *für beliebiges* $f \in X^0_p[0, 1]$ *eine Lösung* $y \in X^0_p[0, 1]$.

Beweis. a) Sei zunächst $\mu = \operatorname{Re} \lambda < -1/p$. Die durch die Beziehung

$$y(t) = t^\lambda \int_0^t f(\tau)\, \tau^{-\lambda-1}\, d\tau\,, \quad t \neq 0 \tag{11}$$

definierte Funktion ist Lösung der Gleichung (10) im Intervall (0, 1]. Wir zeigen $y \in W^0_p[0, 1]$ für $p < \infty$: Mit $\varphi(t, \tau) = |f(t\tau)|\, \tau^{-\mu-1}$ erhält man aus einer Ungleichung von Minkowski (vgl. [12]. S. 318) unter Berücksichtigung der Substitution $\tau' = t\tau$ und wegen $-\mu - 1 - 1/p > -1$ die Beziehung

$$\left[\int_0^1 |y(t)|^p\, dt\right]^{1/p} \leqq \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 |\varphi(t, \tau)|\, d\tau\right)^p dt\right]^{1/p} \leqq \int_0^1 \left(\int_0^1 \varphi(t, \tau)^p\, dt\right)^{1/p} d\tau \leqq$$

$$\leqq \int_0^1 d\tau \left(\int_0^1 |f(t\,\tau)|^p\, \tau^{p(-\mu-1)}\, dt\right)^{1/p} \leqq \int_0^1 \|f\|_{W_p{}^0}\, \tau^{-\mu-1-1/p}\, d\tau \leqq c\|f\|_{W_p{}^0}\,.$$

Im Fall $p = \infty$ ist die Funktion $y(t)$, die für $t \neq 0$ durch die Beziehung (11) gegeben ist und für $t = 0$ den Wert $-(1/\lambda) f(0)$ annimmt, stetig auf [0, 1]. Ist nämlich $f(0) = 0$, erhält man durch Anwendung der L'Hospitalschen Regel

$$\lim_{t\to 0+} t^\mu \int_0^t |f(\tau)|\, \tau^{-\mu-1}\, d\tau = 0 \quad \text{und daraus} \quad \lim_{t\to 0+} y(t) = 0\,.$$

Im allgemeinen Fall ist $y(t) + (1/\lambda)f(0)$ Lösung der Gleichung $tD_t - \lambda y = f(t) - f(0)$, und die Behauptung folgt aus dem bereits Bewiesenen.

b) Es sei nun $\mu = \operatorname{Re}\lambda > -1/p$. Die durch den Ausdruck

$$y(t) = t^\lambda \int_1^t f(\tau)\,\tau^{-\lambda-1}\,\mathrm{d}\tau\,, \quad t \neq 0$$

definierte Funktion genügt wiederum der Gleichung (10) in $(0, 1]$. Ist $p < \infty$, so ergibt sich mit $\varphi(t, \tau) = |f(t\tau)|\,\tau^{-\mu-1}$ aus der oben erwähnten Ungleichung von Minkowski wegen $1 + \mu + 1/p > 1$ die Beziehung

$$\|y\|_{W_p{}^0} \leqq \left[\int_0^1 \left(\int_1^{1/t} |\varphi(t, \tau)|\,\mathrm{d}\tau\right)^p \mathrm{d}t\right]^{1/p} \leqq \left[\int_0^1 \left(\int_1^{\infty} \varphi(t, \tau)^p\,\mathrm{d}\tau\right)^p \mathrm{d}t\right]^{1/p} \leqq$$

$$\leqq \int_1^\infty \left(\int_0^1 |\varphi(t, \tau)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p} \mathrm{d}\tau = \int_1^\infty \left(\int_0^\tau |f(t)|^p\,\tau^{p(-\mu-1)}\,\frac{\mathrm{d}t}{\tau}\right)^{1/p} \mathrm{d}\tau \leqq$$

$$\leqq \int_1^\infty \frac{1}{\tau^{1+\mu+1/p}}\,\|f\|_{W_p{}^0}\,\mathrm{d}\tau \leqq c\|f\|_{W_p{}^0}\,.$$

Für $p = \infty$ erhält man die Behauptung ähnlich wie im Teil a) des Beweises. Andere Beweise von Hilfssatz 1 sind in [5] und [3] enthalten.

**Hilfssatz 2.** *Der Operator* $A_0 = [(tD_t)^l + a_{m-1}(0)\,(tD_t)^{l-1} + \ldots + a_{m-l}(0)]\,D_t^{m-l}$ *ist unter den Voraussetzungen* (2) *und* (5) *für* $k = 0$ *stets ein* $\Phi$*-Operator im Raumpaar* $X^{0,\varrho}_{p,m-1}, X^{0,\varrho}_p$ *mit dem Index* $l_1(p, 0, \varrho) + m - l$.

Beweis. Wir setzen zunächst $m = l$ voraus. Es gilt dann $A_0 = (tD_t - \lambda_1)\ldots$ $\ldots(tD_t - \lambda_l)$, wobei $\lambda_j$, $j = 1, \ldots, l$, die Wurzeln von (4) sind. Für $\varrho = 0$ erhält man durch sukzessive Anwendung von Hilfssatz 1 im $A_0 = X^0_p$. Im Fall $p < \infty$, $\varrho > 0$ suchen wir eine Lösung der Gleichung $Ay = t^\varrho g$, $g \in X^0_p$ in der Form $y = t^\varrho v$, $v \in X^0_p$. Da die Wurzeln der zum neuen Differentialoperator $t^{-\varrho}A_0t^\varrho$ – dieser ist wieder von der Gestalt (1) – gehörigen charakteristischen Gleichung gerade die Zahlen $\lambda_j - \varrho$, $j = 1, \ldots, l$, sind, folgt wegen Hilfssatz 1 wieder im $A_0 = X^{0,\varrho}_p$.

Seien nun $p = \infty$ und $\varrho > 0$. Gilt $f \in X^{0,\varrho}_\infty$ und $f(0) = 0$, so erhält man wie im Fall $p < \infty$ eine Lösung $y = t^\varrho v$, $v \in X^0_\infty$, der Gleichung $A_0 y = f$. Wir haben somit im $A_0 = {}^0X^{0,\varrho}_\infty$ gezeigt, $A_0 : {}^0X^{0,\varrho}_{\infty,0} \to {}^0X^{0,\varrho}_\infty$, wobei ${}^0X^{0,\varrho}_{\infty,0} = \{y \in X^{0,\varrho}_{\infty,m-l} : y(0) = 0\}$, ${}^0X^{0,\varrho}_\infty = \{f \in X^{0,\varrho}_\infty : f(0) = 0\}$. Wir betrachten nun die homogene Gleichung $A_0 y = 0$, wobei wir im Falle $p = \infty$ noch $y \in {}^0X^{0,\varrho}_{\infty,0}$ fordern. Diese hat auf jedem Intervall $[\delta, 1]$, $0 < \delta < 1$, ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gestalt $t^{\lambda_i}(ln\ t)^j$, $j = 0, \ldots, r_i - 1$, $i = 1, \ldots, k$, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, $k \leqq l$ die verschiedenen Wurzeln von (4) mit den Vielfachheiten $r_1, \ldots, r_k$, $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = l$, sind. Es gilt nun $t^{\lambda_i}(ln\ t)^j \in \ker A_0$ genau dann, wenn $\operatorname{Re}\lambda_i > -(1/p) + \varrho$ ist.

Somit ergibt sich, dass $A_0 \in \mathscr{L}(X_{p,0}^{0,\varrho}, X_p^{0,\varrho})$ $(p < \infty)$ bzw. $A_0 \in \mathscr{L}({}^0X_{\infty,0}^{0,\varrho}, {}^0X_{\infty}^{0,\varrho})$ ein $\Phi$-Operator mit dem Index $l_1(p, 0, \varrho)$ ist. Da die Räume $X_{\infty,0}^{0,\varrho}$ und $X_{\infty}^{0,\varrho}$ jeweils Erweiterung der Räume ${}^0X_{\infty,0}^{0,\varrho}$ bzw. ${}^0X_{\infty}^{0,\varrho}$ um eine Dimension sind und $A_0 : X_{\infty,0}^{0,\varrho} \to$ $\to X_{\infty}^{0,\varrho}$ korrekt erklärt ist, stellt $A_0 \in \mathscr{L}(X_{\infty,0}^{0,\varrho}, X_{\infty}^{0,\varrho})$ ebenfalls einen $\Phi$-Operator mit dem Index $l_1(p, 0, \varrho)$ dar. Für $a_0(0) \neq 0$ hat die Gleichung $A_0 y = f$ mit $f = c =$ $=$ const die Lösung $y = c/a_0(0)$, und es gilt wiederum im $A_0 = X_{\infty}^{0,\varrho}$.

Im Fall $a_0(0) = 0$ ist die Gleichung $A_0 y = f$ genau dann in $X_{\infty,0}^{0,\varrho}$ lösbar, wenn $f(0) = 0$ ist.

Da $D_t^{m-l}$ eine Abbildung von $X_p^{m-l,\varrho}$ auf $X_p^{0,\varrho}$ mit der Nullzahl $m - l$ ist, ergibt sich sofort die Behauptung von Hilfssatz 2 für $m > l$.

**Hilfssatz 3.** *Die Operatoren* $B_i y = t(tD_t)^i D_t^{m-l} y$, $i = 0, \ldots, l - 1$, $B_i y =$ $= D_t^{m-1-i} y$, $i = 1, \ldots, m - 1$ *wirken vollstetig von* $W_{p,m-l}^{0,\varrho}$ *nach* $C^{0,\varrho}$ *bzw. vollstetig von* $C_{m-l}^{0,\varrho}$ *nach* $H^{\lambda}$, $0 < \lambda < 1$, *wenn nur* (2) *gilt.*

Beweis. Ist $M \subset C_{m-l}^{0,\varrho}$ eine beschränkte Menge, so sind die Mengen $B_i(M)$, $i = 0, \ldots, m - 1$, beschränkt im Raum $C^1$. Aus der Vollstetigkeit der Einbettung $C^1 \to H^{\lambda}$ ergibt sich die relative Kompaktheit der Menge $B_i(M)$ in $H^{\lambda}$. Ist $M \subset$ $\subset W_{p,m-l}^{0,\varrho}$ beschränkt, so ergibt sich die relative Kompaktheit von $B_i(M)$ in $C^{0,\varrho}$ auf analoge Weise aus der Vollstetigkeit der Einbettung $W_p^1 \to C^{0,\varrho}$.

**Folgerung 1.** *Die Operatoren* $B_i$, $i = 0, \ldots, m - 1$, *wirken vollstetig von* $W_{p,m-l}^{0,\varrho}$ *nach* $W_p^{0,\varrho}$ *bzw. von* $C_{m-l}^{0,\varrho}$ *nach* $C^{0,\varrho}$. *Dies ergibt sich aus den stetigen Einbettungen* $C^{0,\varrho} \to L_p^{\varrho}$, $\varrho < 1/p$, *und* $H^{\varrho} \to C^{0,\varrho}$.

Beweis von Satz 2 für $k = 0$: Es gilt $A = A_0 + A_1$ mit

$$A_1 = \sum_{i=1}^{l} \left[a_{m-i}(t) - a_{m-i}(0)\right] \cdot (tD_t)^{l-i} D_t^{m-l} + \sum_{i=l+1}^{m} a_{m-i}(t) D_t^{m-i}.$$

Dabei ist $a_{m-i}(t) - a_{m-i}(0) = t\, b_i(t)$, $b_i(t) \in C^{0,\varrho}$, $i = 1, \ldots, l$. Somit erhält man aus Hilfssatz 2 und Folgerung 1 sowie der Stabilität des Index eines $\Phi$-Operators bezüglich vollstetiger Störungen (vgl. [10]) die Behauptung von Satz 2 für $k = 0$.

Bemerkung 3. Die Aussage von Satz 1 für $k = \varrho = 0$ lässt sich auch unter den schwächeren Voraussetzungen $a_i(t) \in C^0[0, 1]$, $i = 0, \ldots, m - 1$, zeigen. Überdies gilt noch die Beziehung im $A = X_p^0[0, 1]$ (vgl. [5]; in [4] wurde dies für $p = \infty$ mittels der Methode der kleinen Störungen von $\Phi$-Operatoren gezeigt).

Bemerkung 4. Der Operator $A$ ist mit dem Definitionsgebiet

$$D(A) = \{y \in X_p^{m-l,\varrho} : \exists f \in X_p^{0,\varrho} \text{ mit } (Ay)(t) = f(t),\ t \neq 0\}$$

ein abgeschlossener Operator im Raumpaar $X_p^{m-l,\varrho}$, $X_p^{0,\varrho}$. Man kann zeigen, dass unter den Voraussetzungen (3) und (5) für $k = 0$ $D(A) = X_{p,m-l}^{0,\varrho}$ gilt. Wird höhere Glattheit der Koeffizienten vorausgesetzt, gilt letztere Beziehung im Falle $p = \infty$, $\varrho = 0$ immer (vgl. [1] oder [11]).

Beweis von Satz 2 für $k > 0$. Wir betrachten den Operator $By = D_t^k Ay$. Dieser hat die Gestalt

$$B = \left[(tD_t)^l + b_{m+k-1}(t)\,(tD_t)^{l-1} + \ldots + b_{m+k-1}(t)\right] D_t^{m+k-l} + \\ + \sum_{i=l+1}^{m+k} b_{m+k-i}(t)\, D_t^{m-i}\,,$$

wobei für die Koeffizienten $b_i(t) \in C^{0,\varrho}$, $i = 0, \ldots, m + k - l - 1$, $b_i(t) \in C^{1,\varrho}$, $i = m + k - l, \ldots, m + k - 1$, gilt. Weiterhin sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung des Operators $B$ gerade die Zahlen $\lambda_j - k$, $j = 1, \ldots, l$. Wendet man Satz 2 für $k = 0$ auf den Operator $B$ an, so erhält man, dass $B \in \mathscr{L}(X^{k,\varrho}_{p,m+k-l}, X^{0,\varrho}_p)$ $\Phi$-Operator mit dem Index $l_1(p, k, \varrho) + k + m - l$ ist. Der Operator $D_t^k \in \mathscr{L}(X^{k,\varrho}_p, X^{0,\varrho}_p)$ ist jedoch $\Phi$-Operator mit dem Index $k$. Mithin erweist sich wegen $B = D_t^k A$ und Theorem 12.2 in [7] der Operator $A \in \mathscr{L}(X^{k,\varrho}_{p,m-l}, X^{k,\varrho}_p)$ als $\Phi$-Operator mit dem Index $\varkappa_{p,k,\varrho}(A) = l_1(p, k, \varrho) + k + m - l - k = l_1(p, k, \varrho) + m - l$. Damit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

**Folgerung 2** (über die Glattheit von Lösungen). *Es seien die Voraussetzungen* (2), (8) *und* (9) *erfüllt. Ist $f \in X^{k,\varrho'}_p$, so gehört jede Lösung $y \in X^{0,\varrho}_{p,m-l}$ der Gleichung $Ay = f$ dem Raum $X^{k,\varrho'}_{p,m-l}$ an.*

Beweis. Aus Satz 2 folgt zunächst $\varkappa_{p,k,\varrho'}(A) = \varkappa_{p,0,\varrho}(A)$. Wegen $\ker_{p,k,\varrho'} A \subset \ker_{p,0,\varrho} A$ und $\mathrm{im}_{p,k,\varrho'} A \subset \mathrm{im}_{p,0,\varrho} A$ ergibt sich leicht die Behauptung.

Beweis von Satz 1. Aus Satz 2 und der Beziehung $\dim X^{0,\varrho}_{p,m-l}/\tilde{X}^{0,\varrho}_{p,m-l} = \tilde{m}$ folgt der erste Teil von Satz 1. Den zweiten Teil erhält man aus Folgerung 2.

Bemerkung 5. Jeder Operator der Gestalt

$$\tilde{A} = t^l D_t^m + \tilde{a}_{m-1}(t)\, t^{l-1} D_t^{m-1} + \ldots + \tilde{a}_{m-l}(t)\, D_t^{m-l} + \ldots + \tilde{a}_0(t)$$

lässt sich auf die Form (1) bringen, wobei die Koeffizienten $a_i(t)$ genau dann die Voraussetzungen (3) erfüllen, wenn dies für die Funktionen $\tilde{a}_i(t)$ zutrifft. Die charakteristische Gleichung, die dem Operator $\tilde{A}$ entspricht, hat die Form

$$\lambda(\lambda - 1) \ldots (\lambda - l + 1) + \tilde{a}_{m-1}(0)\, \lambda(\lambda - 1) \ldots \\ \ldots (\lambda - l + 2) + \ldots + \tilde{a}_{m-l+1}(0)\, \lambda + \tilde{a}_{m-l}(0) = 0\,.$$

**2.** Abschliessend untersuchen wir Differentialoperatoren der Gestalt

$$A = t^\alpha D_t^m + a_{m-1}(t)\, t^{\alpha-1} D_t^{m-1} + \ldots + a_{m-l+1}(t)\, t^{\alpha-l+1} D_t^{m-l+1} + \\ + \sum_{i=l}^{m} a_{m-i}(t)\, D_t^{m-i} \tag{12}$$

mit $l-1<\alpha<l$, $l\in\mathbb{N}$, $l\leqq m$. $C^{0,\varrho}_{m-l,\alpha}$ bezeichne den Banachraum $\{y\in C^{m-l,\varrho}:$ $: t^{\alpha-i}D_t^{m-i}y\in C^{0,\varrho},\ i=0,\dots,l-1\}$ mit der Norm

$$\|y\| = \|y\|_{C^{m-l,\varrho}} + \sum_{i=0}^{l-1} \|t^{\alpha-i}D_t^{m-i}y\|_{C^{0,\varrho}}.$$

Im weiteren setzen wir

$$(13)\qquad a_{m-i}(t)\in C^{1,\varrho}\,,\quad i=1,\dots,l-1\,,\quad a_{m-i}(t)\in C^{0,\varrho}\,,\quad i=l,\dots,m\,,$$

und

$$(14)\qquad 0\leqq \varrho < l-\alpha$$

voraus. Unter den Voraussetzungen (13) und (14) ist offenbar $A\in\mathscr{L}(C^{0,\varrho}_{m-l,\alpha}, C^{0,\varrho})$. Dem Operator $A$ wird die charakteristische Gleichung

$$(15)\qquad \lambda(\lambda-1)\ldots\ldots(\lambda-l+1) + a_{m-1}(0)\,\lambda\ldots\ldots(\lambda-l+2) + \ldots$$
$$\ldots + a_{m-l+1}(0)\,\lambda = 0$$

mit den Wurzeln $\lambda_j$ $(j=1,\dots,l)$ zugeordnet. Es sei stets die Bedingung

$$(16)\qquad \operatorname{Re}\lambda_j \neq \varrho + l - \alpha$$

erfüllt. Mit $l_1(\varrho,\alpha)$ bezeichnen wir die Anzahl der Wurzeln $\lambda_j$ mit $\operatorname{Re}\lambda_i > \varrho +$ $+ l - \alpha$. Wir setzen nun $\tilde{m} = \tilde{m}(\varrho,\alpha) = m - l + 1 + l_1(\varrho,\alpha)$ und bezeichnen mit $A$ den Operator, der der Randwertaufgabe (6) für den Operator (12) entspricht. Es sei $\tilde{C}^{0,\varrho}_{m-l,\alpha} = \{y\in C^{0,\varrho}_{m-l,\alpha} : u_i y = 0,\ i=1,\dots,\tilde{m}\}$.

**Satz 3.** *Unter den Voraussetzungen* (13), (14) *und* (16) *ist der Operator* $A\in$ $\in\mathscr{L}(\tilde{C}^{0,\varrho}_{m-l,\alpha}, C^{0,\varrho})$ *stets ein* $\Phi$*-Operator mit dem Index* 0.

Beweis. Wir betrachten den Operator

$$A_0 = t^\alpha D_t^m + a_{m-1}(0)\,t^{\alpha-1}D_t^{m-1} + \ldots + a_{m-l+1}(0)\,t^{\alpha-l+1}D_t^{m-l+1}\,.$$

Es sei zunächst $\varrho=0$. Wegen Hilfssatz 2 ist der Operator $B_0 = t^{l-\alpha}A_0\in\mathscr{L}(C^{0,l-\alpha}_{m-l}$, $C^{0,l-\alpha})$ ein $\Phi$-Operator mit dem Index $l_1(\varrho,\alpha) + m - l$. Nun gilt aber, wie man leicht nachprüft, die Beziehung $C^{0,l-\alpha}_{m-l} = C^0_{m-l,\alpha}$, und der Operator der Multiplikation mit der Funktion $t^{l-\alpha}$ ist im Raumpaar $C^0$, $C^{0,l-\alpha}$ ein $\Phi$-Operator mit der Nullzahl 0 und der Defektzahl 1. Folglich ist der Operator $A_0\in\mathscr{L}(C^0_{m-l,\alpha}, C^0)$ ein $\Phi$-Operator mit dem Index $l_1(0,\alpha) + m - l + 1 = \tilde{m}(0,\alpha)$ (vgl. [10], Kap. 1, Satz 3.6).

Es sei jetzt $\varrho>0$. Wie im Hilfssatz 2 erhält man, dass der Operator $B_0\in\mathscr{L}(C^{0,\varrho+l-\alpha}_{m-l}, {}^0C^{0,\varrho+l-\alpha})$ ein $\Phi$-Operator mit dem Index $l_1(\varrho,\alpha) + m - l + 1$ ist. Man überzeugt sich unschwer von der Gültigkeit der Beziehung.

$$C^{0,\varrho+l-\alpha}_{m-l} = {}^0C^{0,\varrho}_{m-l,\alpha} = \{y\in C^{0,\varrho}_{m-l,\alpha} : h(y) = t^{\alpha-l+1}D_t^{m-l+1}y\big|_{t=0} = 0\}\,.$$

Wegen $h(y_0) \neq 0$ für $y_0(t) = t^{m-\alpha} \in C^{0,\varrho}_{m-l,\alpha}$ ist $h$ ein nicht triviales lineares stetiges Funktional über dem Raum $C^{0,\varrho}_{m-l,\alpha}$, und ${}^0C^{0,\varrho}_{m-l,\alpha}$ stellt einen Teilraum von $C^{0,\varrho}_{m-l,\alpha}$ der Kodimension 1 dar. Wir bemerken an dieser Stelle noch, dass für alle $y \in {}^0C^{0,\varrho}_{m-l,\alpha}$ auch $t^{\alpha-i}D_t^{m-i}y\big|_{t=0} = 0$, $i = 0, \ldots, l-2$, gilt.

Da der Operator der Multiplikation mit der Funktion $t^{l-\alpha}$ einen Isomorphismus von ${}^0C^{0,\varrho}$ auf den Raum ${}^0C^{0,\varrho+l-\alpha}$ darstellt, ist der Operator $A_0 \mid {}^0C^{0,\varrho}_{m-l,\alpha} \in \mathscr{L}({}^0C^{0,\varrho}_{m-l,\alpha}, {}^0C^{0,\varrho})$ ein $\Phi$-Operator mit dem Index $l_1(\varrho, \alpha) + m - l + 1$. Wegen $\dim C^{0,\varrho}_{m-l,\alpha}/{}^0C^{0,\varrho}_{m-l,\alpha} = 1$ und $\dim C^{0,\varrho}/{}^0C^{0,\varrho} = 1$ folgt schliesslich, dass der Operator $A_0 \in \mathscr{L}(C^{0,\varrho}_{m-l,\alpha}, C^{0,\varrho})$ auch für $\varrho > 0$ ein $\Phi$-Operator mit dem Index $l_1(\varrho, \alpha) + m - l + 1 = \tilde{m}(\varrho, \alpha)$ ist.

Weiterhin zeigt man analog zu Hilfssatz 3, dass die Operatoren $tt^{\alpha-i}D_t^{m-i}$, $i = 1, \ldots, l-1$, und $D_t^{m-i}$, $i = l+1, \ldots, m$, vollstetig von $C^{0,\varrho}_{m-l,\alpha}$ in den Raum $H^\lambda$, $0 < \lambda < 1$, wirken.

Aus der Abschätzung

$$\left|D_t^{m-l}\, y(t_1) - D_t^{m-l}\, y(t_2)\right| \leqq \left|\int_{t_1}^{t_2} t^{l-\alpha-1}\big(t^{\alpha-l+1}D_t^{m-l+1}y\big)\, \mathrm{d}t\right|$$

erhält man, dass der Operator $D_t^{m-l}$ jede beschränkte Menge $M \subset C^{0,\varrho}_{m-l,\alpha}$ in eine beschränkte Menge im Raum $H^\lambda$, $0 < \lambda < l - \alpha$, und damit in eine relativ kompakte Menge in $H^{\lambda'}$, $\lambda' < \lambda$, abbildet (vgl. [10], Kap. 3, Folg. 4.3). Wegen (14) können wir nun eine Zahl $\lambda_0$, $\varrho \leqq \lambda_0 < l - \alpha$, wählen, und infolge der stetigen Einbettung $H^{\lambda_0} \subset C^{0,\varrho}$ ergibt sich die Behauptung von Satz 3 analog zum Beweis von Satz 1.

## 2. BEGRÜNDUNG EINES KOLLOKATIONSVERFAHRENS

**1.** Wir stellen zunächst einige Fakten aus der Approximationstheorie in einer für unsere Ziele genehmen Form zusammen. Wir betrachten auf dem Intervall $[0, 1]$ Punkte der Gestalt

$$t_{in} = \frac{1 + \cos \dfrac{2i+1}{2(n+1)}\pi}{2} \quad (i = 0, \ldots, n). \tag{17}$$

Jeder auf dem Intervall $[0, 1]$ beschränkten Funktion $f$ ordnen wir (das eindeutig bestimmte) algebraische Polynom $\tilde{Q}_n f$ vom Grade $\leqq n$ zu, das die Bedingung $(\tilde{Q}_n f)(t_{in}) = f(t_{in})$ $(i = 0, \ldots, n)$ erfüllt. Es sei $H^{k,\lambda}[0,1] = \{y \in C^k[0,1] : y^{(k)} \in H^\lambda[0,1]\}$, $0 \leqq l \leqq 1$, $k \in \mathbb{N}$.

**Hilfssatz 4.** *Für jede Funktion $f \in C^0[0, 1]$ gilt*

$$\|\tilde{Q}_n f - f\|_{W_p{}^0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,. \tag{18}$$

*Für $f \in H^{k,\lambda}[0, 1]$ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ hat die Abschätzung*

$$\|\tilde{Q}_n f - f\|_{W_p{}^0} = 0\left(\frac{1}{n^{k+\lambda}}\right) \tag{19}$$

*bzw.*

$$\|\tilde{Q}_n f - f\|_{C^0} = 0\left(\frac{\ln n}{n^{k+\lambda}}\right) \tag{20}$$

*Gültigkeit.*

Beweis. Die Interpolationsknoten (17) sind die Bilder der Tschebyscheffschen Interpolationsknoten $\cos((2i + 1)/(2(n + 1)) \pi$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ vermöge der Abbildung $x \to t = (1 + x)/2$, $x \in [-1, +1]$. Unter Benutzung dieses Faktes schliesst man aus [11], Kap. II, § 5, sofort auf die Gültigkeit von Hilfssatz 4.

Mit $X_p^{k,\varrho}$ bezeichnen wir die im § 1 eingeführten Räume, wobei $\varrho$ die Bedingung (2) erfüllt. Ferner bezeichne $H_\varrho^{k,\lambda}[0, 1]$ den Raum $\{y \in H^{k,\lambda} : t^{-\varrho}[y^{(k)}(t) - y^{(k)}(0)] \in \in H^\lambda\}$ mit der Norm

$$\|y\|_{H^{k,\lambda}} + \|t^{-\varrho}[y^{(k)}(t) - y^{(k)}(0)]\|_{H^\lambda} .$$

Falls $\lambda + \varrho \leqq 1$ gilt, kann $H^{\lambda+\varrho} \subset H_\varrho^\lambda$ im Sinne einer stetigen Einbettung gezeigt werden.

Sei $p < \infty$. Mit $Q_n$ bezeichnen wir die im Raum $X_p^{0,\varrho}$ durch die Vorschrift

$$Q_n f = t^\varrho \tilde{Q}_n t^{-\varrho}[f(t) - f(0)] + f(0) \tag{21}$$

definierten Operatoren mit dem Definitionsgebiet $D(Q_n) = C^{0,\varrho}$. Im Raume $X_\infty^{0,\varrho}$ sind die durch (21) erklärten Operatoren $Q_n$ offenbar stetig. Für das Weitere benötigen wir die folgenden, leicht zu zeigenden Eigenschaften dieser Operatoren:

$$Q_n^2 = Q_n , \quad (Q_n f)(t_{in}) = f(t_{in}) \quad (i = 0, \ldots, n) .$$

Aus Hilfssatz 4 ergibt sich nunmehr sofort

**Hilfssatz 5.** *Für jede Funktion $f \in C^{0,\varrho}$ gilt*

$$\|Q_n f - f\|_{W_p{}^{0,\varrho}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 .$$

*Für $f \in H_\varrho^\lambda[0, 1]$ hat die Abschätzung*

$$\|Q_n f - f\|_{W_p{}^{0,\varrho}} = O\left(\frac{1}{n^\lambda}\right) \quad \text{bzw.} \quad \|Q_n f - f\|_{C^{0,\varrho}} = O\left(\frac{\ln n}{n^\lambda}\right)$$

*Gültigkeit.*

**2.** Wir betrachten im Raumpaar $X^{0,\varrho}_{p,m-l}$, $X^{0,\varrho}_p$ die lineare Differentialgleichung

(22) $$Ay = [(tD_t)^l + a_{m-1}(t)(tD_t)^{l-1} + \ldots + a_{m-l}(t)]\, D_t^{m-l}y + \sum_{i=l+1}^{m} a_{m-i}(t)\, D_t^{m-i}y = f$$

mit den linearen homogenen Randbedingungen

(23) $$u_i(y) = \sum_{j=0}^{m-l} a_{ij}\, y^{(i)}(0) + \sum_{j=0}^{m-1} b_{ij}\, y^{(j)}(1) = 0$$
$$(i = 1, \ldots, \tilde{m};\ 0 \leqq \tilde{m} \leqq m;\ a_{im-l} = 0 \text{ für } p < \infty)\,.$$

Wir nehmen an, dass das Problem

(24) $$[(tD_t)^l + a_{m-1}(0)(tD_t)^{l-1} + \ldots + a_{m-l}(0)]\, D_t^{m-l}y = g$$
$$u_i(y) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, \tilde{m}$$

für jede Funktion $g \in X^{0,\varrho}_p$ eindeutig lösbar ist im Raum $\tilde{X}^{0,\varrho}_{p,m-l}$.

Mit $\psi_j(t) \in X^{0,\varrho}_{p,m-l}$ bezeichnen wir die Lösungen des Problems (24) für $g = 1$ und $g = t^\varrho t^{j-1}$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

Bei der Kollokationsmethode sucht man die Näherungslösung des Problems (22), (23) in der Gestalt

$$y_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \xi_j\, \psi_j(t)$$

und bestimmt die Koefficienten $\xi_j$ so, dass $y_n(t)$ die Gleichung (9) in den Kollokationspunkten (17) erfüllt:

(25) $$(Ay_n - f)(t_{in}) = 0 \quad (i = 0, \ldots, n)\,.$$

Wie schon früher bezeichne $A$ bzw. $A_0$ den durch das Problem (22), (23) bzw. (24) erzeugten Operator (diese wirken im Raumpaar $\tilde{X}^{0,\varrho}_{p,m-l}$, $X^{0,\varrho}_p$).

**Satz 4.** *Es gelte $p < \infty$ und die Voraussetzungen (2) und (3) seien erfüllt. Wenn $f \in C^{0,\varrho}[0, 1]$ und das Problem (22), (23) eine eindeutig bestimmte Lösung $y(t)$ besitzt, dann ist das Gleichungssystem (25) für alle hinreichend grossen $n$ eindeutig lösbar, und für $n \to \infty$ gilt*

(26) $$\|y - y_n\|_{X_{p,m-l}{}^{0,\varrho}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0\,.$$

*Wenn $f \in C^k$ und die Voraussetzungen (8) und (9) (für $\varrho' = \varrho = 0$) erfüllt sind, dann hat die Abschätzung*

(27) $$\|y - y_n\|_{X_{p,m-l}{}^{0}} = O(n^{-k})$$

*Gültigkeit.*

Beweis. Sei $P_n$ ein beliebiger (aber fixierter) Projektor, der den Raum $\tilde{X}^{0,\varrho}_{p,m-l}$ auf die lineare Hülle der Elemente $\{\psi_0, \ldots, \psi_n\}$ abbildet. Dann ist die Kollokationsgleichung (25) der Gleichung

$$Q_n A P_n y_n = Q_n f\,, \quad y_n \in \operatorname{im} P_n$$

äquivalent.

Sei zunächst $A = A_0$. Nach Konstruktion gilt $Q_n A_0 P_n = A_0 P_n$. Wegen der Invertierbarkeit von $A_0$ folgt hieraus sofort, dass die Operatoren

$$Q_n A_0 P_n : \operatorname{im} P_n \to \operatorname{im} Q_n$$

invertierbar sind und

$$(Q_n A_0 P_n)^{-1}\, Q_n = A_0^{-1} Q_n\,.$$

Mithin gilt wegen Hilfssatz 5 $\{f \in C^{0,\varrho} : (Q_n A_0 P_n)^{-1} Q_n f \to A_0^{-1} f\} = C^{0,\varrho}$. Nach Hilfssatz 3 ist $T = A - A_0$ ein vollstetiger Operator von $\tilde{X}^{0,\varrho}_{p,m-l}$ in $C^{0,\varrho}$ und nach Voraussetzung von Satz 4 ist $A$ invertierbar. Somit ist nach Satz 1.4.3 aus [11] für $n \geqq n_0$ der Operator $Q_n A P_n : \operatorname{im} P_n \to \operatorname{im} Q_n$ invertierbar und es gilt

$$\{f \in C^{0,\varrho} : (Q_n A P_n)^{-1}\, Q_n f \to A^{-1} f\} = C^{0,\varrho}\,.$$

Aus dieser Beziehung folgt unmittelbar (26).

Wenn $f \in C^k$ und die Voraussetzungen (8) und (9) erfüllt sind, dann gilt zunächst $y \in X^k_{p,m-l}$. Nunmehr kann man sich unschwer von der Beziehung $(A - A_0)\, y \in C^k$ und damit von $A_0 y \in C^k$ überzeugen. Aus Hilfssatz 4, Satz 14.3 [11] sowie Folgerung 1.4.1 [11] ergibt sich nunmehr (27). Der Satz ist bewiesen.

**Satz 5.** *Es gelte* $a_{m-i} \in H^\lambda_\varrho[0, 1]$, $0 < \lambda < 1$, $i = 1, \ldots, m$ *und* $a_{m-i} \in H^{1,\lambda}_\varrho$, $i = 1, \ldots, l$.

*Wenn* $f \in H^\lambda_\varrho$ *und das Problem* (22), (23) *im Raumpaar* $C^{0,\varrho}_{m-l}$, $C^{0,\varrho}$ *eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt, dann ist das Gleichungssystem* (25) *für alle hinreichend grossen n eindeutig lösbar, und für* $n \to \infty$ *gilt*

$$\|y - y_n\|_{C_{m-l}{}^{0,\varrho}} = O\left(\frac{\ln n}{n^\lambda}\right).$$

*Wenn* $f \in H^{k,\lambda}$, $a_{m-i}(t) \in H^{k+1,\lambda}[0, 1]$, $i = 1, \ldots, l$, $a_{m-i}(t) \in H^{k,\lambda}[0, 1]$, $i = l + 1, \ldots, m$ *und die Voraussetzung* (9) *(für* $\varrho' = \varrho = 0$) *erfüllt ist, gilt*

$$\|y - y_n\|_{C_{m-l}{}^0} = O\left(\frac{\ln n}{n^{k+\lambda}}\right).$$

Der Beweis wird analog zum Beweis des Satzes 4 geführt. Dabei wird wesentlich davon Gebrauch gemacht, dass für $a(t) \in H^{1,\lambda}_\varrho$ gilt $a(t) - a(0) = tb(t)$ mit $b(t) \in H^\lambda_\varrho$. Dieser Fakt kann mit den Methoden des Abschnittes 6.1.2 [10] bewiesen werden.

Bemerkung 5. Falls $\varrho > 0$ und $a_{m-l}(0) = 0$ gilt, besitzt das Problem (24) im Raumpaar $C^{0,\varrho}_{m-l}$, $C^{0,\varrho}$ nicht für jede rechte Seite eine Lösung (vgl. Beweis des Hilfssatzes 2). Setzt man jedoch $g(0) = 0$ voraus und fordert noch zusätzlich $y^{(m-l)}(0) = = 0$, so gilt einerseits die früher entwickelte Theorie im vollen Maße und das Problem (24) kann sich für jede Funktion $g$ mit $g(0) = 0$ als eindeutig lösbar erweisen. Mit $\psi_j(t) \in C^{0,\varrho}_{m-l}$ bezeichnen wir dann die Lösung dieses Problems für $g = = t^\varrho t^j$ $(j = 0, 1, \ldots)$.

Dann behält Satz 5 auch hier sinngemäss seine volle Gültigkeit.

Bemerkung 6. Ein zum Satz 5 analoger Satz kann auch für die im § 1, Abschnitt 2, § 1, betrachtete Randwertaufgabe formuliert und bewiesen werden.

## *Literatur*


[1] *M. S. Baouendi, C. Goulaouic:* Cauchy problems with characteristic initial hypersurface, Comm. Pure Appl. Math. *26*, Nr. 3 (1973), 455—475.

[2] *E. Coddington, N. Levinson:* Theory of ordinary differential equations, New York, Toronto, London 1955.

[3] *J. Elschner:* Über die normale Auflösbarkeit von entarteten gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen in Räumen differenzierbarer Funktionen, Math. Nachrichten *81* (1978), 169—193.

[4] *J. Elschner:* О разностном методе для вырождающихся обыкновенных дифференциальных уравнений, Дифференц. уравнения *15* (1979), 828—839.

[5] *В. П. Глушко:* Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения, Воронеж 1972.

[6] *F. R. de Hoog, R. Weiss:* Difference methods for boundary problems with a singularity of the first kind, Siam. J. Numer. Anal. *13*, Nr. 5, (1976), S. 775—813.

[7] *С. Г. Крейн:* Линейные уравнения в банаховом пространстве, Москва 1971.

[8] *F. Natterer:* Das Differenzenverfahren für singuläre Rand-Eigenwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen, Numer. Math. *23*, Nr. 5 (1975), S. 387—409.

[9] *F. Natterer:* A generalized spline method for singular boundary value problems in ordinary differential equations, Linear Algebra and Appl. *7* (1973), 189—216.

[10] *S. Prößdorf:* Einige Klassen singulärer Gleichungen, Akademie-Verlag Berlin 1974.

[11] *S. Prößdorf, B. Silbermann:* Projektionsverfahren und die näherungsweise Lösung singulärer Gleichungen, Teubner-Verlag, Leipzig 1977.

[12] *И. Стейн:* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, Москва 1973.



*Anschrift der Verfasser:* Johannes *Elschner*, Zentralinstitut für Mathematik und Mechanik der Akademie der Wissenschaften, DDR - 108 Berlin, Mohrenstr. 39; Bernd *Silbermann* Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt, Sektion Mathematik, DDR - 90 Karl-Marx-Stadt, Reichenhainer Str. 39.