

Andrey V. Koldunov

Особенности строения o -пополнения архимедовой ℓ -группы с сильной единицей

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 37 (1987), No. 1, 1–3,4–6

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102129>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1987

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ОСОБЕННОСТИ СТРОЕНИЯ o -ПОПОЛНЕНИЯ
АРХИМЕДОВОЙ l -ГРУППЫ С СИЛЬНОЙ ЕДИНИЦЕЙ

А. В. КОЛДУНОВ, Ленинград

(Поступило в редакцию 21/I 1980 г.)

В [1], [2] было показано, что o -пополнение архимедовой l -группы X можно получить путем присоединения к X пределов всех o -фундаментальных последовательностей. Таким образом каждый элемент из oX является o -пределом некоторой последовательности из X .

Основной целью заметки является описание o -пополнения oX архимедовой l -группы непрерывных функций на бикompакте B , разделяющей точки B и содержащей тождественную единицу $\mathbf{1}$, причем описание будет дано с помощью функций, непрерывных на плотных подмножествах B (Для векторных решеток аналогичные результаты получены в [3]). В результате такого описания будет легко установить, почему oX не обязано быть равномерным и даже не содержать равномерного пополнения EX l -группы X (напомним, что для векторных решеток oX всегда равномерно полно ([4]).

Введем необходимые обозначения. Обозначим

$$A(\mathfrak{N}(B), n) = \{t \in B \mid x(t) = l/k, k \in N, k \leq n, l \in I, x \in \mathfrak{N}(B)\},$$

причем $\mathfrak{N}(B)$ всегда обозначает l -группу непрерывных функций на B , разделяющую точки B и содержащую тождественную единицу. Если $t \in B$, $U(t)$ окрестность точки t в B и $x \in \mathfrak{N}_+(B)$, то существует $y \in \mathfrak{N}_+(B)$, $y[B \setminus U(t)] \equiv 0$, $y(t) > x(t)$; в этом случае $h = x \wedge y \in \mathfrak{N}_+(B)$ обладает следующими свойствами: $h[B \setminus U(t)] \equiv 0$, $h \equiv x$ для некоторой окрестности $V(t)$ точки t . В дальнейшем любую функцию $h \in \mathfrak{N}_+(B)$, удовлетворяющую этим свойствам, будем обозначать $[t, U(t), x]$.

Если $f: X \rightarrow R$, где X -плотное подмножество в B , $t \in X$, то будем говорить, что f аппроксимируется элементами $\mathfrak{N}(B)$ в точке t , если существуют $u, v \in \mathfrak{N}(B)$, для которых $u|_X \leq f \leq v|_X$ и $u(t) = f(t) = v(t)$.

Напомним, что l -группа $\mathfrak{N}(B)$ называется o -полной (соответственно, равномерно полной), если для любой такой последовательности $\{x_n\} \subset \mathfrak{N}(B)$, что $|x_n - x_{n+p}| \leq V_n \downarrow 0$ (соответственно, $k(n) |x_n - x_{n+p}| \leq \mathbf{1}$, $k(n) \uparrow +\infty$), существует

$z \in \mathfrak{R}(B)$, для которого $|x_n - z| \leq v_n$ (соответственно $k(n) |x_n - z| \leq 1$); через $o \mathfrak{R}(B)$ (соответственно, $E \mathfrak{R}(B)$) обозначается o -пополнение (равномерное пополнение) $\mathfrak{R}(B)$.

Через $\Theta(B)$ обозначается семейство всех нигде не плотных нуль-множеств в B . Заметим, что $o \mathfrak{R}(B)$ лежит в дедекиндовом пополнении $k \mathfrak{R}(B)$, а $k \mathfrak{R}(B)$ состоит из классов эквивалентности функций, непрерывных на плотных $B \setminus \bigcup F_n$, где F_n замкнутое нигде не плотное множество в B . Поэтому для описания представителя класса эквивалентности, принадлежащего l -группе $o \mathfrak{R}(B)$, можно рассматривать только функции, непрерывные на плотных $B \setminus \bigcup F_n$ в B . Если $f \in C^*(T)$, T плотно в B , то запись $f \in C^*(B \setminus \bigcup \{\theta_n \in \Theta(B)\})$ означает, что f может быть непрерывно продолжено (при необходимости) с T на $B \setminus \bigcup \{\theta_n \in \Theta(B)\}$.

Теорема 1. Пусть $z \in C^*(T)$, где T плотно в B . Эквивалентны следующие утверждения:

1) $z \in o \mathfrak{R}(B)$; 2) $z \in C^*(B \setminus \bigcup \{\theta_n \in \Theta(B)\})$ и z аппроксимируется элементами $\mathfrak{R}(B)$ в каждой точке $A(\mathfrak{R}(B), k) \setminus \theta_k$ ($k \in N$).

Доказательство. 1) \Rightarrow 2). Если $z \in o \mathfrak{R}(B)$, то $x_n - u_n \leq z \leq x_n + u_n$, где $u_n \downarrow 0$. Положим $\theta_k = \bigcap \{u_n^{-1}[1/k, +\infty] \mid n \in N\} \in \Theta(B)$. Если $t \in T_1 = B \setminus \bigcup \theta_k$, то $u_n(t) \downarrow 0$ и $x_n(t) \rightarrow f(t)$. Проверим, что f непрерывно на T_1 . Пусть $t \in T_i$ и $\varepsilon > 0$; существует $n_0 \in N$, $3/n_0 < \varepsilon$; далее найдется $n_i \in N$, для которого $u_{n_i}(t) < 1/n_0$; пусть $V(t)$ такая окрестность точки t в B , что $|x_{n_i}(t) - x_{n_i}(p)| < 1/n_0$, $|u_{n_i}(p)| < 1/n_0$ для $p \in V(t)$. Получаем $|f(t) - f(p)| \leq |f(t) - x_{n_i}(t)| + |x_{n_i}(t) - x_{n_i}(p)| + |x_{n_i}(p) - f(p)| \leq 3/n_0 < \varepsilon$.

Пусть теперь $t \in A(\mathfrak{R}(B), k) \setminus \theta_k$, тогда найдется $m \in N$, для которого $0 \leq U_m(t) < 1/k$, т.е. $u_m(t) = 0$ и $f(t) = (x_m + u_m)(t) = x_m(t) = (x_m - u_m)(t)$; $f \equiv z$ на $T \cap T_1$.

2) \Rightarrow 1). Пусть z удовлетворяет условиям 2) $H = B \setminus \bigcup \theta_n$. Считаем, что $z \geq 0$. Положим

$$T_k = \{t \in B \mid \forall W(t) \in t \exists p, q \in H \cap W(t), |z(p) - z(q)| \geq 1/k\}.$$

Тогда, $T_k \subset \bigcup \theta_n$ и замкнуто; это означает, что T_k не содержит P' -множеств и может быть погружено в нигде не плотное нуль-множество Γ_k ([5]). Считаем, что $\Gamma_k \supset \theta_k$ и $\Gamma_k = h_k^{-1}(0)$, где $h_k \in C(B)$, $0 \leq h_k \leq 1$. Дальнейшее доказательство разобьем на ряд шагов:

1) Обозначим $L(n, m) = \text{cl } h_{n+1}^{-1}(1/(m+1), 1]$. Покажем, что для любой точки $t \in L(n, m)$ найдутся $z_t \in \mathfrak{R}_+(B)$, окрестность $V(t) \in t$, для которых $z_t \leq z$ на H , $z - z_t \leq 3/n$ на $V(t) \cap H$.

Если $t \in L(n, m) \setminus A(\mathfrak{R}(B), n)$, то найдется такая окрестность $W(t) \ni t$, что для любых $p, q \in W(t) \cap H$ всегда $|z(p) - z(q)| \leq 1/(n+1)$. Пусть $a = \inf \{z(p) \mid p \in W(t) \cap H\}$. Существует $x_t \in \mathfrak{R}_+(B)$, $0 < x_t(t) \leq 1/(n+1)$. Пусть k есть целая часть $(a - 1/n)/x_t(t)$, т.е. $a - 1/n \geq k x_t(t) > a - 2/n$. Выберем такую окрестность $U(t) \subset W(t) \setminus A(\mathfrak{R}(B), n)$, на которой $a > k x_t(p) > a - 2/n$ ($p \in U(t)$).

Тогда $[t, U(t), kx_t] \leq z$. Действительно, если $p \in U(t) \cap H$, то $[t, U(t), kx_t](p) \leq kx_t(p) < a \leq z(p)$; если $p \in H \setminus U(t)$, то $[t, U(t), kx_t](p) = 0 \leq z(p)$. Положим $V(t) = [t, U(t), kx_t]^{-1}(a - 2/n, a) \cap W(t) \ni t$ и $z_t = [t, U(t), kx_t]$. Если $p \in V(t) \cap H$, то $z(p) \leq a + 1/n \leq z_t(p) + 3/n$.

Если $t \in L(n, m) \cap A(\mathfrak{R}(B), n)$, то найдется такая окрестность $W(t) \ni t$, на которой для любых $p, q \in H$ всегда $|z(p) - z(q)| \leq 1/n + 1$. По условию найдутся $u_t, v_t \in \mathfrak{R}(B)$, $u_t|_H \leq z \leq v_t|_H$ и $u_t(t) = z(t) = v_t(t)$. Положим $V(t) = W(t) \cap u_t^{-1}(u_t(t) - 1/n, u_t(t) + 1/n) \cap (v_t - u_t)^{-1}[0, 1/n] \ni t$, $z_t = u_t$. Тогда для $p \in V(t) \cap H$ имеем

$$0 \leq z(p) - u_t(p) = z(p) - z(t) + u_t(t) - u_t(p) \leq 2/n.$$

Заметим, что каждое $V(t) \cap A(\mathfrak{R}(B), n) = \emptyset$ для $t \in L(n, m) \setminus A(\mathfrak{R}(B), n)$.

2) Пусть $\{V(t_k) \mid k \leq k_0\}$ есть конечное покрытие бикомпакта $L(n, m)$ элементами вида $V(t)$. Положим $x_{n,m} = \sup \{z_{t_k} \mid k \leq k_0\}$. Тогда $x_{n,m} \leq z$ и $z - x_{n,m} \leq 3/n$ на $L(n, m) \cap H$; $x_{n,m} \in \mathfrak{R}(B)$.

3) Покажем, что для любого $t \in L(n, m)$ существуют $g_t \in \mathfrak{R}_+(B)$, окрестность $G(t) \ni t$, для которых $g_t \geq z - x_{n,m}$ на H и $g_t \leq 7/n$ на $G(t)$.

Если $t \in L(n, m) \setminus A(\mathfrak{R}(B), n)$, то существует такая окрестность $W(t) \ni t$, что $|z(p_1) - z(p_2)| \leq 1/n$ ($p_1, p_2 \in W(t) \cap H$) и $|x_{n,m}(q_1) - x_{n,m}(q_2)| \leq 1/n$ ($q_1, q_2 \in W(t)$), т.е. на $W(t) \cap H$ выполнено $|(x_{n,m} - z)(p) - (x_{n,m} - z)(q)| \leq 2/n$ ($p, q \in W(t) \cap H$).

Положим $b = \sup \{(z - x_{n,m})(p) \mid p \in W(t) \cap H\}$, тогда $b \leq 5/n$ т.к. если $p \in W(t) \cap H \cap L(n, m)$, то $(z - x_{n,m})(p) \leq 3/n$ (по 2); если $p \in W(t) \cap H \setminus L(n, m)$, то $(z - x_{n,m})(p) \leq (z - x_{n,m})(p_1) + 2/n \leq 5/n$ (где $p_1 \in W(t) \cap H \cap L(n, m)$); существование точки p_1 обеспечено тем, что $t \in L(n, m) = \text{cl } h_{n+1}^{-1}(1/(m+1), 1]$ и $W(t) \cap h_{n+1}^{-1}(1/(m+1), 1] \neq \emptyset$.

Далее существует $x_t \in \mathfrak{R}_+(B)$, для которого $0 < x_t(t) \leq 1/(n+1)$. Положим k равным целой части $(b + 1/n)/x_t(t)$, т.е. $b + 2/n < (k+1)x_t(t) < b$. Выберем окрестность $U(t) \ni t$, $U(t) \subset W(t)$, на которой $b + 2/n > (k+1)x_t(p) > b$ ($p \in U(t)$). Поскольку $z \in C_+^*(H)$, то $z(q) \leq r \in N(q \in H)$; найдется $y \in \mathfrak{R}_+(B)$, для которого $y(t) = 0$ и $y[B \setminus U(t)] \equiv r$.

Покажем, что $g_t = y \vee (k+1)x_t \geq z - x_{n,m}$. Действительно, если $p \in H \cap U(t)$, то $(z - x_{n,m})(p) \leq b \leq (k+1)x_t(p) \leq g_t(p)$; если $p \in H \setminus U(t)$, то $(z - x_{n,m})(p) \leq r \leq g_t(p)$. Наконец, положим $G(t) = g_t^{-1}[0, 7/n) \cap U(t) \ni t$, т.к. $g_t(t) = (k+1)x_t(t) < b + 2/n \leq 7/n$.

Если $t \in L(n, m) \cap A(\mathfrak{R}(B), n)$, тогда $t \in V(t_k)$, причем $t_k \in A(\mathfrak{R}(B), n)$ (по выбору $V(t)$ в 2)). По построению имеем $V(t_k) \subset (v_{t_k} - u_{t_k})^{-1}[0, 1/n)$, $z \leq v_{t_k}$, $u_{t_k} \leq x_{n,m}$, т.е. $0 \leq z - x_{n,m} \leq v_{t_k} - u_{t_k} = g_t$. Положим $G(t) = g_t^{-1}[0, 1/n) \ni t$, тогда g_t и $G(t)$ искомые для этого случая.

4) Пусть $\{G(t_k) \mid k \leq l_0\}$ конечное покрытие $L(n, m)$ и $g_{n,m} = \inf \{g_{t_k} \mid k \leq l_0\} \in \mathfrak{R}_+(B)$. Тогда $g_{n,m} \geq z - x_{n,m}$ и $g_{n,m} \leq 7/n$ на $L(n, m)$. Положим

$$x_k = \sup \{x_{n,m} \mid n, m \leq k\} \in \mathfrak{R}_+(B), \quad g_k \equiv \inf \{g_{n,m} \mid n, m \leq k\} \in \mathfrak{R}_+(B).$$

Тогда $|z - x_k| \leq z - x_{n,m} \leq g_{n,m}(n, m \leq k)$, т.е. $|z - x_k| \leq g_k \downarrow 0$. Остается проверить, что $g_k \downarrow 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $t \in B \setminus \bigcup h_k^{-1}(0)$. Существует $n_0 \in N$, для которого $\varepsilon/7 > 1/n_0$, и $m_0 \in N$, для которого $t \in L(n_0, m_0)$.

Тогда $g_{k_0}(t) \leq g_{n_0, m_0}(t) \leq 7/n_0 < \varepsilon$ (где $k_0 = \max(n_0, m_0)$).

Таким образом $z \in o \mathfrak{R}(B)$ и импликация 2) \Rightarrow 1) доказана.

Замечание. При доказательстве 2) \Rightarrow 1) попутно установлен следующий факт: $n|z - y_n| \leq 7 \mathbf{1}$ для некоторой $y_n \in C^*(B \setminus \theta_n)$ ($n \in N$). Действительно, пусть $n \in N$; для каждого $m \in N$ существует $f_m^{(n)} \in \mathfrak{R}(B)$, для которого $f_m^{(n)} \equiv x_{n,m}$ на $h_n^{-1}[1/m; 1/(m-1)]$, $f_m^{(n)} \equiv 0$ на $B \setminus h_n^{-1}(1/(m+1); 1/(m-2))$. Тогда $y_n = \sup \{f_m^{(n)} \mid m \in N\} \in C^*(B \setminus \theta_n)$ и $|y_n - z| \leq 7/n$ на $B \setminus \theta_n$.

Введем следующее обозначение: $S_\sigma(\mathfrak{R}(B)) = \{f \in C^*(B \setminus \theta) \mid \theta \in \Theta(B), \forall t \in B \setminus \theta \exists x_t \in \mathfrak{R}(B), V(t) \in t: x_t|_{V(t)} \equiv f|_{V(t)}\}$.

Таким образом получено следующее утверждение:

Предложение 1. *о $\mathfrak{R}(B) \subset E(S_\sigma(\mathfrak{R}(B)))$, причем равенство $o \mathfrak{R}(B) = E(S_\sigma(\mathfrak{R}(B)))$ эквивалентно равномерной полноте $o \mathfrak{R}(B)$.*

Замечание. В общем случае $o \mathfrak{R}(B) \neq E(S_\sigma(\mathfrak{R}(B)))$.

Предложение 2. *Пусть для любого $n \in N$ существует главная полоса с проекциями $Y_n \subset \mathfrak{R}(B)$, для которой выполнены следующие два условия:*

а) *существует $x_n \in Y_n$, $0 \leq (n+1)x_n \leq \text{Pr}_{Y_n} \mathbf{1} \leq (n+2)x_n$;*

в) *для $0 < z \in Y_n^d$ всегда $(nz - \mathbf{1})_+ \neq 0$.*

Тогда $o \mathfrak{R}(B) = E(S_\sigma(\mathfrak{R}(B)))$.

Доказательство. Покажем, что $A(\mathfrak{R}(B), n)$ открыто замкнуто. Для этого заметим, что $A(\mathfrak{R}(B), n) = (\text{Pr}_{Y_n^d} \mathbf{1})^{-1}(1)$. Действительно, если $t \in A(\mathfrak{R}(B), n) \setminus (\text{Pr}_{Y_n^d} \mathbf{1})^{-1}(1)$, то существует $x_n \in \mathfrak{R}(B)$ из условия а). Тогда $x_n(t) \neq 0$, т.е. $x_n(t) \geq 1/n$ и $(n+1)x_n(t) > 1$; если $t \in (\text{Pr}_{Y_n^d} \mathbf{1})^{-1}(1) \setminus A(\mathfrak{R}(B), n)$, то существует $x \in \mathfrak{R}_x(B)$, $x[A(\mathfrak{R}(B), n)] \equiv 0$ и $x(t) = 1$; кроме того, существует $y \in \mathfrak{R}_+(B)$, $0 < y(t) \leq 1/(n+1)$. Пусть G есть такая окрестность точки t , что $y[G] < (2n+1)/2n(n+2)$. Тогда $z = [t, G, y] \wedge x \in Y_n^d$ и $z(p) < (2n+1)/2n(n+2)$ и $(nz - \mathbf{1})_+ = 0$. Таким образом, $A(\mathfrak{R}(B), n) = (\text{Pr}_{Y_n^d} \mathbf{1})^{-1}(1)$.

Пусть теперь $m(k) \mid u_{k+p} - u_k| \leq 1$, где $u_k \in S_\sigma(\mathfrak{R}(B))$; всегда можно выбрать подпоследовательность $\{z_n\} \subset \{u_k\}$, т.ч. $2n|z_n - z_{n+p}| \leq 1$. Если будет доказано, что $z_n \rightarrow f \in o \mathfrak{R}(B)$, то $u_k \rightarrow f$ и $E(S_\sigma(\mathfrak{R}(B))) = o \mathfrak{R}(B)$. Имеем $z_{n+p} \equiv z_n$ на $A(\mathfrak{R}(B), n) \setminus (\theta_n \cup \theta_{n+p})$ ($p \in N$) и поскольку $A(\mathfrak{R}(B), n)$ открыто замкнуто, то можно считать, что $\theta_n \cap A(\mathfrak{R}(B), n) = \theta_{n+p} \cap A(\mathfrak{R}(B), n)$. Обозначим $T = B \setminus \bigcup \theta_n$; если $t \in T$, то $z_n(t) \rightarrow f(t)$ и $f \in C^*(T)$. Остается заметить, что $f \equiv z_{n+p} \equiv z_n$ на $A(\mathfrak{R}(B), n) \setminus \theta_n$; из того, что $A(\mathfrak{R}(B), n)$ открыто замкнуто, следует, что f аппроксимируется элементами из v в каждой точке $A(\mathfrak{R}(B), n) \setminus \theta_n$.

Замечание 1. Другим условием, при котором $o \mathfrak{R}(B) = E(S_\sigma(\mathfrak{R}(B)))$, является следующее: каждое $A(\mathfrak{R}(B), k)$ можно погрузить в $\Gamma_k \in \Theta(B)$. Это условие можно сформулировать и в терминах l -группы $\mathfrak{R}(B)$.

Замечание 2. $S_\sigma(\mathfrak{R}(B))$ является l -группой (относительно поточечных действий), причем функции, совпадающие на плотных $B \setminus F_n$, отождествляются). Основные свойства $S_\sigma(\mathfrak{R}(B))$ позволяют принять его за секвенциальный аналог дизъюнктивного пополнения $S(\mathfrak{R}(B))$ l -группы $\mathfrak{R}(B)$.

Теорема 2. Пусть $z \in C_+^*(T)$, где T плотно в B ; $z^d = \{0\}$. Эквивалентны следующие утверждения:

1) $z \in S_\sigma(\mathfrak{R}(B))$; 2) существует полная ограниченная полудизъюнктивная последовательность $\{x_n\} \subset \mathfrak{R}(B)$ (т.е. для любого $n \in N$ множество $\{m \in N \mid x_m \wedge x_n \neq 0\}$ конечно), для которой $z = \sup x_n$.

Доказательство. 1) \Rightarrow 2). Имеем $z \in C^*(B \setminus \theta)$; пусть $\theta = h^{-1}(0)$, где $h \in C(B)$, $0 \leq h \leq 1$. Положим $G_n = h^{-1}[1/(n+2), 1/n]$. Для любого $t \in G_n$ по условию существует $x_t \in \mathfrak{R}(B)$ и окрестность $V(t) \ni t$, для которых $x_t|_{V(t)} \equiv z|_{V(t)}$ и $V(t) \subset h^{-1}(1/(n+3), 1/(n-1))$. Положим $y_t = [t, V(t), x_t]$, $W(t) = \text{int}(y_t - x_t)^{-1}(0) \ni t$. Выбираем конечное покрытие $\{W(t_k) \mid k \leq k_0\}$ бикомпакта G_n и полагаем $x_n = \sup \{y_{t_k} \mid k \leq k_0\} \in \mathfrak{R}(B)$. Тогда $x_n \leq z$,

$$x_n[B \setminus h^{-1}(1/(n+3), 1/(n-1))] \equiv 0, \quad x_n|_{G_n} \equiv z|_{G_n}.$$

Тогда $\{x_n\}$ искомая система.

2) \Rightarrow 1). Поскольку $\{x_n\}$ полная система, то $\theta = \bigcap \{x_n^{-1}(0) \mid n \in N\} \in \Theta(B)$. Если $t \in B \setminus \theta$, то $\emptyset \neq A(t) = \{n \in N \mid x_n(t) \neq 0\}$ конечно. Тогда $W(t) = \bigcap \{x_n^{-1}(0, +\infty) \mid n \in A(t)\}$ содержит t и $(\sup x_n)|_{W(t)} \equiv (\sup \{x_n \mid n \in A(t)\})|_{W(t)}$.

Предложение 4. Если $\{x_n\}$ полная ограниченная полудизъюнктивная последовательность в $S_\sigma(\mathfrak{R}(B))$, $x_n \geq 0$, то $\sup x_n \in S_\sigma(\mathfrak{R}(B))$.

Доказательство. Если $h \in N$, то $x_n \in C_+^*(B \setminus \theta_n)$, $\theta_n \in \Theta(B)$; найдется конульмножество $V_n \subset B$, для которого $V_n \cap (B \setminus \theta_n) = x_n^{-1}(0, +\infty)$. Положим $T_n = \text{cl } V_n \cap \theta_n$; если $t \in \theta_n \setminus T_n$, то существует такая окрестность этой точки, что $x_n \equiv 0$ на ней, и поэтому можно сказать, что x_n задано и непрерывно на $B \setminus T_n$. Поскольку $\{x_n\}$ полная система, то $\Gamma = B \setminus \bigcup V_n \in \Theta(B)$. Проверим, что $T = \Gamma \cup \bigcup T_n$ замкнуто. Пусть $t \notin T$, тогда $t \in V_{n_0} \setminus \theta_{n_0} \subset x_{n_0}^{-1}(0, +\infty)$, множество $A(n_0) = \{m \in N \mid x_m \wedge x_{n_0} \neq 0\}$ конечно. Найдется окрестность $W(t)$ точки t , для которой $\text{cl } W(t) \cap \bigcup \{T_k \mid k \in A(n_0)\} = \emptyset$, $W(t) \subset V_k \in t$. Покажем, что $W(t) \cap T = \emptyset$. Если $q \in W(t) \cap T$, то $q \in T_n \cap W(t)$ ($n \notin A(n_0)$) и $\emptyset \neq V_n \cap W(t) \subset V_n \cap V_{n_0} = \emptyset$ (т.к. $n \notin A(n_0)$).

Таким образом, T замкнуто и $T \subset \bigcup \theta_n \cup \Gamma$, т.е. по [4] $T \subset \theta \in \Theta(B)$. А это и означает, что $\sup x_n \in S_\sigma(\mathfrak{R}(B))$.

Замечание. Из теоремы 2 и предложения 4 следует, что $S_\sigma(\mathfrak{R}(B))$ является наименьшей l -группой, содержащей $\mathfrak{R}(B)$ (с сохранением всех граней) и полной относительно взятия счетных супремумов ограниченных полудизъюнктивных последовательностей положительных элементов.

Литература

- [1] *Papangelou, F.*: Order convergence and topological completion of commutative lattice-groups, *Math. Ann.*, 155, 1964, p. 81—107.
- [2] *Quinn, J.*: Intermediate Riesz spaces, *Pacif. Journ. Math.*, 56, No 1, 1975, p. 225—263.
- [3] *Колдунов, А. В.*: σ -пополнение и o -пополнение $C(B)$ „Функциональный анализ“ (Ульяновск), 6, 1976, 76—84.
- [4] *Векслер, А. И., Колдунов А. В.*: Секвенциальная мажорируемость в векторных решетках, „Современная алгебра“ (Ленинград), 6, 1977, 66—85.
- [5] *Векслер, А. И., Диканова З. Т.*: P -множества в бикompактах Π „Функциональный анализ“ (Ульяновск), 2, 1973, 162—170.
- [6] *Колдунов, А. В.*: Об одной конструкции o -пополнения архимедовых l -групп с единицей, ДАН Уз. ССР, Но 3, 1979, 10—11.

Адрес автора: ЛГПИ им. А. И. Герцена, Ленинград, 198255, пр. Ветеранов д. 21 кв. 59, СССР.