Czechoslovak Mathematical Journal

Jiří Jelínek; Zdeněk Krtouš

Les distributions intégrables sur un ouvert de $\mathbf{R}^N$

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 38 (1988), No. 1, 49–70

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102200

Czechoslovak Mathematical Journal, 38 (113) 1988, Praha

LES DISTRIBUTIONS INTÉGRABLES SUR UN OUVERT DE $\mathbf{R}^N$

JIŘÍ JELÍNEK, Praha, ZDENEK KRTOUŠ, Liberec

(Reçu le 22 août 1985)

Introduction. L. Schwartz a introduit ([1], [2]) les distributions intégrables sur $\mathbf{R}^N$: ce sont les éléments du dual de l'espace $\mathscr{B}^{\cdot}$ des fonctions $\omega \in \mathscr{E}$ bornées et convergent vers 0 à l'infini, aisni que chacune de leurs dérivées. Dans cet article nous généralisons la notion de distribution intégrable aux distributions définies sur un ouvert $G \subset \mathbf{R}^N$. Autrement dit, nous donnons un sens résonable à l'expression $\langle f, \mathbf{1} \rangle$ pour les éléments d'un certain sous-espace de distributions de $\mathscr{D}'(G)$. Toutefois, ce sous-espace n'est pas bien déterminé par G. On obtient comme cas spécial des espaces $\mathscr{B}^{\cdot\prime}_{\{\Gamma_p\}_p}(G)$ que nous allons de définir.

1. Notation. Le dual de l'espace $\mathscr{B}^{\cdot}$ sera désigné par $\mathscr{B}^{\cdot\prime}$ et non par $\mathscr{D}'_{L^1}$ comme il est désigné dans [1]. G sera toujours un ouvert de $\mathbf{R}^N$.

2. Définition. Supposons donnée, pour tout multi-indice de dérivation p, une famille Γ_p de fonctions (voir les hypothèses si-dessous). $\mathscr{B}_{\{\Gamma_p\}_p}(G)$ est exactement l'espace de toutes les fonctions $\omega \in \mathscr{E}(G)$ (cf. [3], p. 97) telles que, pour tout multi-indice de dérivation p et toute $\gamma \in \Gamma_p$, $\gamma \, . \, D^p\omega$ soit bornée sur G.

On écrira $\mathscr{B}_{\{\Gamma_p\}}$, $\mathscr{B}(G)$ ou $\mathscr{B}$ au lieu de $\mathscr{B}_{\{\Gamma_p\}_p}(G)$ si aucune confusion n'est à craindre. Dans le cas où Γ_p ne contient qu'une seule fonction γ_p, l'espace $\mathscr{B}_{\{\Gamma_p\}_p}(G)$ sera désigné par $\mathscr{B}_{\{\gamma_p\}_p}(G)$. Notons que pour le but d'introduir les distributions intégrable sur G, il suffirait de définir les espaces $\mathscr{B}_{\{\gamma_p\}}$ et non nécessairement tous les espaces $\mathscr{B}_{\{\Gamma_p\}}$. La seule raison d'introduit les espaces $\mathscr{B}_{\{\Gamma_p\}}$ est plus de généralité. Parmi ces espaces on trouve $\mathscr{S}$ et $\mathscr{D}$.

3. Hypothèses. Sauf mention expresse du contraire, les familles Γ_p de la définition si-dessus sont toujours soumises aux hypothèses suivantes (pour tous p, q).

1. Γ_p est une famille de fonctions $\geqq 0$ et continues sur G telle que pour tout compact $K \subset G$ il existe $\gamma \in \Gamma_p$ qui soit partout >0 sur K.

2. Pour toute $\gamma'' \in \Gamma_{p+q}$, il y a $\gamma \in \Gamma_p$, $\gamma' \in \Gamma_q$ et un nombre $c > 0$ de sorte que

$$\gamma \cdot \gamma' \geqq c\gamma'' .$$

3. Il y a une unité approximative spéciale dans $\mathscr{B}_{\{\Gamma_p\}}(G)$, définie ultérieurement (déf. 6).

On en déduit $\mathscr{D}(G) \subset \mathscr{B}(G) \subset \mathscr{E}(G)$.

4. Définition de la topologie. v, plus précisément $v_{\{\Gamma_p\}}$, est la topologie localement convexe de l'espace $\mathscr{B}$ définie par le système de semi-normes

$$\|\omega\|_{p,\gamma} = \sup_{x \in G} |\gamma(x)\, \mathrm{D}^p \omega(x)|$$

$(\gamma \in \Gamma_p)$ pour $\omega \in \mathscr{B}$. Par le même symbole v on désigne la topologie induite par v sur les sous-espaces de $\mathscr{B}$.

Evidemment, l'espace $(\mathscr{B}_{\{\Gamma_p\}})_v$ est complet, $(\mathscr{B}_{\{\gamma_p\}})_v$ est espace de Fréchet.

Note. Un ensemble $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ est borné pour la topologie v (v-borné ou $\{\Gamma_p\}$-borné) si et seulement si toute semi-norme $\| \ \|_{p,\omega}$ est bornée sur $\mathscr{A}$. Ce qui est important, ce sont les parties bornées de $\mathscr{B}$ et non pas la topologie. Dans ce qui suit, $\mathscr{B}$ sera muni d'une topologie localement convexe séparée (non nécessairement v) pour laquelle les parties bornées coïncident avec les parties v-bornées.

5. Définition. Une partie $\mathscr{A}' \subset \mathscr{B}_{\{\Gamma_p\}}(G)$ est dite semi-bornée, plus précisément $\{\Gamma_p\}_p$-semi-bornée, si elle est bornée dans un espace $\mathscr{B}_{\{\Delta_p\}}(G)$ où $\Delta_p \subset \Gamma_p$ sont des sous-familles remplissant (quels que soient les multi-indices p, q): pour toute $\gamma'' \in \Gamma_{p+q}$ il y a $\gamma \in \Gamma_p$, $\gamma' \in \Delta_q$ et un nombre $c > 0$ de sorte que $\gamma \,.\, \gamma' \geqq c\gamma''$. On n'exige pas les hypothèses 3 pour l'espace $\mathscr{B}_{\{\Delta_p\}_p}(G)$. L'hypothèse 3.1 pour Δ_p est une conséquence.

Toute partie bornée est semi-bornée. Dans l'espace $\mathscr{B}_{\{\gamma_p\}}$ les parties bornées et semi-bornées coïncident. On verra (conséquence de 9.2) que dans l'espace $\mathscr{B}$ contenant les fonctions constants, les parties bornées et semi-bornées coïncident. Toute partie semi-bornée de $\mathscr{B}_{\{\Gamma_p\}}(G)$ est bornée dans $\mathscr{E}(G)$.

6. Définition. Une suite $\{\beta_n\} \subset \mathscr{B}_{\{\Gamma_p\}}(G)$ s'appelle unité approximative, si elle est semi-bornée et que $\lim \beta_n = 1$ dans $\mathscr{E}(G)$. $\{\beta_n\}$ s'appelle unité approximative spéciale, si elle est semi-bornée et si pour tout compact $K \subset G$, il y a un $n_0 \in \mathbf{N}$ de sorte que $\beta_n = 1$ sur K pour $n \geqq n_0$.

On voit qu'il revient au même si l'on remplace la convergence dans $\mathscr{E}(G)$, c-à-d la convergence uniforme sur tout compact de G, pour β_n et pour chacune de leurs dérivées, par la convergence simple: $\{\beta_n\} \subset \mathscr{B}$ est une unité approximative, si (et seulement si) elle est semi-bornée et $\lim \mathrm{D}^p \beta_n(x) = \mathrm{D}^p \mathbf{1}$ pour tout x et p ($\mathbf{1}$ désigne la fonction constante égale à 1).

7. Notons que la notion de l'ensemble semi-borné et par conséquent la notion de l'unité approximative (spéciale) dépend du système de familles de fonctions $\{\Gamma_p\}_p$ et non seulement de l'espace $\mathscr{B}_{\{\Gamma_p\}_p}(G)$ avec sa topologie v.

Exemple. Pour $G = \mathbf{R}^N$ on obtient l'espace $\mathscr{S} = \mathscr{B}_{\{\Gamma_p\}}$ muni de sa topologie habituelle en prenant

$$\Gamma_p = \{\gamma;\, \gamma(x) = (1 + |x|)^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots\}$$

(indépendamment de p), ou

$$\Gamma_p = \{\gamma;\, \gamma(x) = (1 + |x|)^k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}\,.$$

Dans ces deux cas, les parties semi-bornées ne sont pas les mêmes. On peut prendre pour Δ_p n'importe quel sous-ensemble non-vide de Γ_p.

8. Exemples. On voit facilement que les familles $\{\Gamma_p\}_p$ suivantes, définissant des espaces $\mathscr{B}_{\{\Gamma_p\}_p}$, satisfont aux hypothèses 3.

1. Les deux constructions 7 de l'espace $\mathscr{S}$.

2. Si, pour tout p, Γ_p est l'ensemble de toutes les fonctions positives et continues sur G, on obtient $\mathscr{B}_{\{\Gamma_p\}}(G) = \mathscr{D}(G)$. Toutefois, la topologie habituelle de $\mathscr{D}$ ne coincide pas avec v (cf. la note 4).

3. Si, pour tout p, Γ_p est l'ensemble des fonctions $\geqq 0$, continues et à support compact dans G, on obtient l'espace $\mathscr{E}(G)$.

9. Propositions. 1. *Pour $\alpha, \beta \in \mathscr{B}$, on a $\alpha \,.\, \beta \in \mathscr{B}$.*

2. *Si $\mathscr{A}, \mathscr{A}' \subset \mathscr{B}$, $\mathscr{A}$ borné, $\mathscr{A}'$ semi-borné, alors l'ensemble*

$$\mathscr{A} \,.\, \mathscr{A}' = \{\alpha \,.\, \beta;\ \alpha \in \mathscr{A},\ \beta \in \mathscr{A}'\}$$

est borné.

Démonstration. Il suffit de démontrer la proposition 2. Considérons un multi-indice de dérivation r, une fonction $\gamma'' \in \Gamma_r$ et estimons (déf. 4) $\|\alpha \,.\, \beta\|_{r,\gamma''}$. D'après la définition 5, pour tous multi-indices p, q avec $p + q = r$, on choisit $\gamma_p \in \Gamma_p$, $\gamma'_q \in \Delta_q$ et $c_p > 0$ de sorte que

$$\gamma_p \,.\, \gamma'_q \geqq c_p \gamma'' \tag{1}$$

et que

$$|\gamma'_q\, \mathrm{D}^q \beta(x)| \leqq b_q \tag{2}$$

avec un nombre $b_q > 0$ indépendant de x et de $\beta \in \mathscr{A}'$. Comme $\mathscr{A}$ est borné, on a pour $p \leqq r$

$$|\gamma_p(x)\, \mathrm{D}^p \alpha(x)| \leqq a_p \tag{3}$$

avec un nombre a_p indépendant de x et de $\alpha \in \mathscr{A}$. Alors, on calcule (déf. 4)

$$\|\alpha \,.\, \beta\|_{r,\gamma''} = \sup_x |\gamma''(x)\, \mathrm{D}^r(\alpha(x)\, \beta(x))| =$$

$$= \sup_x \left| \gamma''(x) \left(\sum_{\substack{p,q \\ p+q=r}} \binom{r}{p} \mathrm{D}^p \alpha(x)\, \mathrm{D}^q \beta(x) \right) \right| \leqq$$

(en vertu de (1), (2), (3))

$$\leqq \sup_x \sum_{\substack{p,q \\ p+q=r}} \binom{r}{p} \frac{a_p b_q}{c_p},$$

c.q.f.d.

10. L'exemple suivant montre que, pour tout ensemble G non-vide et ouvert dans $\mathbf{R}^N$, il y a un espace $\mathscr{B}_{\{\gamma_p\}_p}$ contenant les fonctions constantes et satisfaisant aux hypothèses 3.

Exemple. Prenons, pour $G = \mathbf{R}^N$,

(1) $$\gamma_p(x) = (1 + |x|^2)^{|p|/2}$$

($|p| = p_1 + \ldots + p_N$), et pour $G \subsetneqq \mathbf{R}^N$,

(2) $$\gamma_p(x) = [\operatorname{dist}(x, \mathbf{R}^N \setminus G)]^{|p|}$$

Proposition. *Dans l'espace $\mathscr{B}_{\{\gamma_p\}_p}(G)$ si-dessus, il y a une unité approximative spéciale.*

Démonstration. Quelques formules de cette démonstration ne seront utilisées que dans la démonstration 38.

1. Pour $G = \mathbf{R}^N$, choisissons une fonction $\alpha_1 \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^N)$, $\alpha_1(x_1) \geqq \alpha_1(x_2)$ pour $|x_1| \leqq |x_2|$,

(3) $$\alpha_1(x) = 0 \quad \text{pour} \quad |x| \geqq 1$$
$$\alpha_1(x) = 1 \quad \text{pour} \quad |x| \leqq 1/2\,.$$

Désignons $a_p = \max\limits_x |\mathrm{D}^p \alpha_1(x)|$,

(4) $$\alpha_d(x) = \alpha_1(x/d)$$

(pour $d > 0$). On a alors

(5) $$|\mathrm{D}^p \alpha_d(x)| \leqq \frac{a_p}{d^{|p|}}\,,$$

(6) $$\operatorname{Supp} \alpha_d \subset \{x;\, |x| \leqq d\}\,,$$

d'où on voit que les fonctions α_n ($n = 1, 2, \ldots$) forment une unité approximative spéciale.

2. Pour $G \subsetneqq \mathbf{R}^N$, on peut supposer que $0 \notin G$. Comme $\gamma_p(x) \leqq |x|^{|p|}$, la suite α_n, remplissant (5) et (6) (après la restriction sur G), est bornée dans $\mathscr{B}(G)$. Désignons $a = \int \alpha_1$, $\varrho_d(x) = (1/ad^N)\, \alpha_d(x)$. On a $\int \varrho_d = 1$ et, en vertu de (5) et (6),

(7) $$|\mathrm{D}^p \varrho_d(x)| \leqq \frac{a_p}{a\,.\,d^{|p|+N}}$$

(8) $$\operatorname{Supp} \varrho_d(x) \subset \{x;\, |x| \leqq d\}\,.$$

Désignons

$$\beta_d = \varrho_d * \chi_{\{x \in G;\, \operatorname{dist}(x, \mathbf{R}^N \setminus G) \geqq 2d\}}$$

(convolution avec l'indicatrice). En vertu de (8), on a

(9) $$\beta_d(x) = 1 \quad \text{pour} \quad \operatorname{dist}(x, \mathbf{R}^N \setminus G) \geqq 3d\,,$$
$$\beta_d(x) = 0 \quad \text{pour} \quad \operatorname{dist}(x, \mathbf{R}^N \setminus G) \leqq d\,,$$
$$1 \geqq \beta_{d_1}(x) \geqq \beta_{d_2}(x) \geqq 0 \quad \text{pour} \quad d_1 \leqq d_2\,.$$

Il résulte de (7), (8) que

(10) $$|\mathrm{D}^p \beta_d(x)| = |(\mathrm{D}^p \varrho_d(x)) * \chi_{\{\ldots\}}| \leqq \frac{a_p}{a\,.\,d^{|p|+N}}\, v_N d^N$$

où v_N désigne le volume de la boule à rayon 1 dans $\mathbf{R}^N$. On voit de (9), (10) et (2) que $\{\beta_d;\ d > 0\}$ est une partie bornée de $\mathscr{B}_{\{\gamma_p\}_p}(G)$. Comme $\{\alpha_n\}$ est bornée aussi, on déduit de 9.2 que $\{\alpha_n\beta_{1/n}\}_{n=1,2,\ldots}$ est une unité approximative spéciale.

11. Exemple. Au lieu des fonctions γ_p de l'exemple 10, prenons (pour n'importe quel ouvert non-vide $G \subset \mathbf{R}^N$) les fonctions

$$\gamma_p'(x) = \min\{\gamma_p(x), 1\}\ .$$

Alors non seulement $\mathscr{B}_{\{\gamma_p\}}(G)$, mais aussie $\mathscr{B}_{\{\gamma_p'\}}(G)$ satisfait aux hypothèses 3 et contient les fonctions constantes. Les unités approximatives de $\mathscr{B}_{\{\gamma_p\}}$ servent d'unités approximatives pour $\mathscr{B}_{\{\gamma_p'\}}$. Pour $G = \mathbf{R}^N$, on obtient ainsi l'espace conu $\mathscr{B}$ de Schwartz.

12. Définition. Désignons par σ la convergence des suites, qui est pour les suites $\{\omega_n\} \subset \mathscr{B}(G)$ définie:

$$\sigma - \lim \omega_n = \omega \quad (\omega \in \mathscr{B})$$

si $\lim \omega_n = \omega$ dans l'espace $\mathscr{E}(G)$ et si l'ensemble $\{\omega_n\}$ est borné dans $\mathscr{B}(G)$.

Note. Comme dans la définition 6, on peut remplacer la convergence dans $\mathscr{E}(G)$ par la convergence simple $\lim_n \mathrm{D}^p\omega_n(x) = \mathrm{D}^p\omega(x)$ (pour tout p et tout x) sans changer le sens de cette définition. Notons que $v - \lim \omega_n = \omega$ (déf. 4) entraine $\sigma - \lim \omega_n = \omega$.

13. Proposition. *Si $\{\beta_n\}$ est une unité approximative et si $\omega \in \mathscr{B}(G)$, alors $\sigma - \lim \beta_n\omega = \omega$. Par conséquent, l'ensemble $\mathscr{D}(G)$ est σ-séquentiellement dense dans l'espace $\mathscr{B}(G)$.*

En effet, on voit que $\lim \beta_n\omega = \omega$ dans $\mathscr{E}$ et $\{\beta_n\omega\}$ est borné en vertu de la proposition 9.2.

Note. Tout ensemble borné $\mathscr{A}$ de l'espace $\mathscr{B}(G)$ est contenu dans l'adhérence σ-séquentielle d'un ensemble v-borné de $\mathscr{D}(G)$, notamment de l'ensemble $\{\alpha\beta_n;\ \alpha \in \mathscr{A},\ n = 1, 2, \ldots\}$ (borné en vertu de 9.2).

14. Proposition. *L'application qui à toute forme linéaire $\tilde{F}$, σ-séquentiellement continue sur $\mathscr{B}(G)$, fait correspondre sa restriction $F = \tilde{F}/\mathscr{D}(G)$, est une application bi-univoque de l'espace des formes linéaires σ-séquentiellement continues sur $\mathscr{B}(G)$ à l'espace des formes linéaires σ-séquentiellement continues sur $\mathscr{D}(G)$. Etant donnée F, la valeur de $\tilde{F}$ dans le point $\omega \in \mathscr{B}$ est donnée par la formule*

$$\langle \tilde{F}, \omega\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle F, \omega\beta_n\rangle\ ; \tag{1}$$

où $\{\beta_n\}$ est une unité approximative spéciale.

Démonstration. Supposone que F soit une forme linéaire σ-séquentiellement continue sur $\mathscr{D}(G)$, $\omega \in \mathscr{B}(G)$ et que $\{\varphi_n\} \subset \mathscr{D}(G)$ soit une suite avec $\sigma - \lim \varphi_n = \omega$ (dont l'existence est assurée par la proposition 13).

I. Démontrons d'abord que $\lim F(\varphi_n)$ existe. Dans le cas contraire, on trouverait $\delta > 0$ et deux suites partielles $\{F(\varphi_{k_n})\}$ et $\{F(\varphi_{j_n})\}$ avec $|F(\varphi_{k_n}) - F(\varphi_{j_n})| > \delta$. Comme $\sigma - \lim(\varphi_{k_n} - \varphi_{j_n}) = 0$, F ne serait pas σ-séquentiellement continue.

II. De la même manière on démontre que $\lim F(\varphi_n)$ ne dépend pas de la suite $\{\varphi_n\}$ remplissant $\sigma - \lim \varphi_n = \omega$. En posant $\tilde{F}(\omega) = \lim F(\varphi_n)$, on définie une forme linéaire $\tilde{F}$ sur $\mathscr{B}(G)$ avec $\tilde{F}/\mathscr{D}(G) = F$.

III. Montrons que $\tilde{F}$ est σ-séquentiellement continue. Pour $\sigma - \lim \omega_n = \omega$, nous avons à démontrer que $\lim \tilde{F}(\omega_n) = \tilde{F}(\omega)$, et nous le savons déjà dans le cas où $\{\omega_n\} \subset \mathscr{D}(G)$. En choisissant une unité approximative spéciale $\{\beta_k\}$, on a

$$\sigma - \lim_{k\to\infty} \beta_k\omega_n = \omega_n\,, \quad \lim_{k\to\infty} F(\beta_k\omega_n) = \tilde{F}(\omega_n)\,,$$

alors, pour un k_n suffisamment grand,

$$(2) \qquad |F(\beta_{k_n}\omega_n) - \tilde{F}(\omega_n)| < 1/n\,.$$

On choisit par récurrence $k_n \nearrow \infty$. La suite $\{\beta_{k_n}\omega_n\}_n$ est bornée grâce à 9.2, d'où

$$\sigma - \lim_{n\to\infty} \beta_{k_n}\omega_n = \omega\,.$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} F(\beta_{k_n}\omega_n) = \tilde{F}(\omega)$$

et (2) entraine

$$\lim \tilde{F}(\omega_n) = \tilde{F}(\omega)\,.$$

IV. Pour achever la démonstration, on remarque que (grâce à 13) le valeur $\tilde{F}$, est nécessarement donnée par la formule (1), alors $\tilde{F}$ est bien déterminée par F.

15. Théorème. *Pour une distribution $F \in \mathscr{D}'(G)$, les propriétés suivantes sont equivalentes.*

1. *Quels que soient la partie v-bornée $\mathscr{A} \subset \mathscr{D}(G)$ et $\varepsilon > 0$, il y a un compact $K \subset G$ de sorte que*

$$\varphi \in \mathscr{A}\,, \quad \operatorname{Supp} \varphi \cap K = \emptyset \Rightarrow |\langle F, \varphi\rangle| \leqq \varepsilon\,.$$

2. *F est σ-séquentiellement continue sur $\mathscr{D}(G)$.*
3. *F est v-continue sur toute partie v-bornée $\mathscr{A} \subset \mathscr{D}(G)$.*
4. *F est bornée sur toute partie v-bornée $\mathscr{A} \subset \mathscr{D}(G)$.*

Démonstration. $1 \Rightarrow 2$: Si F, remplissant 1, n'étailt pas σ-séquentiellement continue, il y aurait une suite $\{\varphi_m\} \subset \mathscr{D}(G)$ avec $\sigma - \lim \varphi_m = 0$ et

$$(1) \qquad \langle F, \varphi_m\rangle \geqq 1$$

pour tous les m. Pour une unité approximative spéciale $\{\beta_n\}$, l'ensemble $\mathscr{A} = \{\varphi_m - \varphi_m\beta_n;\ m, n = 1, 2, \ldots\}$ est borné en vertu de la proposition 9.2. Pour $\varepsilon = 1/3$, on obtient un compact K de la propriété 1. Choisissons un indice n_0 pour que

$$(2) \qquad \beta_{n_0} = 1$$

sur un voisinage de K. Comme F est une distribution et que $\lim \varphi_m\beta_{n_0} = 0$ dans $\mathscr{D}$, trouvons un indice m_0 pour que

$$|\langle F, \varphi_{m_0}\beta_{n_0}\rangle| \leqq \tfrac{1}{3}\,.$$

D'après la propriété 1,

$$|\langle F, \varphi_{m_0}(1 - \beta_{n_0})\rangle| \leqq \varepsilon = \tfrac{1}{3}\,.$$

La somme des deux innégalités fait

$$|\langle F, \varphi_{m_0}\rangle| \leqq \tfrac{2}{3}$$

ce qui contredit (1).

$2 \Rightarrow 3$: D'après la définition 12, une forme linéaire F, σ-séquentiellement continue, est continue sur $\mathscr{A}$ pour la topologie induite par l'espace de Fréchet $\mathscr{E}(G)$. Donc à plus forte raison, elle est v-continue sur $\mathscr{A}$.

$3 \Rightarrow 4$ vaut généralement pour les espaces localement convexes. En effet, soit $\mathscr{A}$ une partie bornée et équilibrée, $\mathscr{V}$ un voisinage équilibré de zéro de sorte que F soit bornée sur $\mathscr{V} \cap \mathscr{A}$. Pour un $c \geqq 1$, on a $\mathscr{A} \subset c\,.\,\mathscr{V}$. Alors F est bornée sur $c\,.\,(\mathscr{V} \cap \mathscr{A}) = c\mathscr{V} \cap c\mathscr{A} \supset \mathscr{A}$, c.q.f.d.

$4 \Rightarrow 1$: Si la propriété 1 n'était pas remplie, alors pour un $\varepsilon > 0$ et pour une partie v-bornée $\mathscr{A} \subset \mathscr{D}(G)$, on trouverait par récurrence des compactes $K_n \subset G$ et des fonctions $\varphi_n \in \mathscr{A}$ de sorte que $K_n \supset K_{n-1} \cup \operatorname{Supp} \varphi_{n-1}$, $\operatorname{Supp} \varphi_n \cap K_n = \emptyset$, $\langle F, \varphi_n\rangle > \varepsilon$. Comme les $\operatorname{Supp} \varphi_n$ sont disjoints, les fonctions $\psi_n = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots$ $\dots + \varphi_n$ constituent un ensemble v-borné. $F(\psi_n) = F(\varphi_1) + \dots + F(\varphi_n) > n\varepsilon$ ce qui contredit la propriété 4.

16. On désigne par b (ou $b_{\{\Gamma_p\}_p}$) la topologie localement convexe sur $\mathscr{D}(G)$ la plus fine pour laquelle les ensembles bornés coïncident avec les ensembles v-bornés ([5], V. 3). La topologie b de l'espace $\mathscr{D}(G)$ est bornologique et plus fine que v. Un ensemble équilibré $\mathscr{V} \subset \mathscr{D}$ est voisinage de zéro dans $\mathscr{D}_b$, si et seulement s'il absorbe tout ensemble v-borné $\mathscr{A} \subset \mathscr{D}$.

Définition. Désignons par $\mathscr{B}^{\cdot}(G)$ le complété de l'espace $\mathscr{D}_b$; la topologie de $\mathscr{B}^{\cdot}$ sera notée par b, aussi (sauf mention expresse du contraire, $\mathscr{B}^{\cdot}$ sera muni de cette topologie). Les formes linéaires continues sur $\mathscr{B}^{\cdot}$ sont les mêmes que sur $\mathscr{D}_b$ et ce sont exactement les distributions F décrites par le théorème 15.

17. Lemme. *Pour $\beta \in \mathscr{B}(G)$, l'application*

$$\varphi \mapsto \varphi\beta \tag{1}$$

de l'espace $(\mathscr{D}(G))_b$ dans $(\mathscr{D}(G))_b$ est continue. Si β parcourt une partie semi-bornée de $\mathscr{B}(G)$, les applications (1) sont équicontinues.

Démonstration. Supposons que $\mathscr{A}' \subset \mathscr{B}(G)$ soit semi-bornée. Pour un voisinage équilibré de zéro $\mathscr{V}$ dans $\mathscr{D}_b$, désignons

$$\mathscr{U} = \{\varphi \in \mathscr{D}(G);\ \varphi\beta \in \mathscr{V} \text{ pour toute } \beta \in \mathscr{A}'\}\,.$$

Pour voir que $\mathscr{U}$ est voisinage de zéro, il suffit de montrer que $\mathscr{U}$ absorbe toute partie v-bornée $\mathscr{A} \subset \mathscr{D}$. Ça résulte de la proposition 9.2.

18. Comme $\mathscr{B}_v$ est complet, l'application identique de $\mathscr{D}_b$ dans $\mathscr{B}_v$ se prolonge par continuité en application linéaire continue bien déterminée de $\mathscr{B}^{\bullet}$ dans $\mathscr{B}_v$.

Propositions. 1. *L'application linéaire continue de $\mathscr{B}^{\bullet}$ dans $\mathscr{B}_v$, identique sur $\mathscr{D}$, est injective. On considère alors $\mathscr{B}^{\bullet}$ comme sous-ensemble de $\mathscr{B}$.*

2. *Etant donnée une unité approximative spéciale $\{\beta_n\} \subset \mathscr{B}$, une fonction $\omega \in \mathscr{B}$ appartient à $\mathscr{B}^{\bullet}$, si et seulement si $\{\omega\beta_n\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathscr{D}_b$. Dans ce cas-là, $\omega = \lim \omega\beta_n$ dans $\mathscr{B}^{\bullet}$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{F}$ un filtre de Cauchy dans $\mathscr{D}_b$. Il converge alors dans $\mathscr{B}_v$, donc à plus forte raison dans $\mathscr{E}$, vers une fonction $\omega \in \mathscr{B}_v$. Supposant n fixe, le filtre $\beta_n\mathfrak{F}$ constitué par les ensembles

$$\beta_n\mathscr{A} = \{\beta_n\alpha;\ \alpha \in \mathscr{A}\}$$

avec $\mathscr{A} \in \mathfrak{F}$, converge dans $\mathscr{D}$ vers $\beta_n\omega$. Montrons que dans $\mathscr{D}_b$ les filtres $\beta_n\mathfrak{F}$ convergent vers les fonctions $\beta_n\omega$ uniformément par rapport à $n = 1, 2, \ldots$. En effet, si $\mathscr{V}$ est un voisinage de zéro dans $\mathscr{D}_b$, équilibré et fermé, grâce au lemme précédent il y a un voisinage de zéro $\mathscr{U} \subset \mathscr{V}$ dans $\mathscr{D}_b$ avec $\beta_n\mathscr{U} \subset \mathscr{V}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. On a

$$\mathscr{A} - \mathscr{A} \subset \mathscr{U} \subset \mathscr{V} \tag{1}$$

pour un $\mathscr{A} \in \mathfrak{F}$, alors $\beta_n\mathscr{A} - \beta_n\mathscr{A} \subset \mathscr{V}$ pour tous les n et, comme $\mathscr{V}$ est fermé et que le filtre $\beta_n\mathfrak{F}$ converge vers $\beta_n\omega$, on a

$$\beta_n\omega - \beta_n\mathscr{A} \subset \mathscr{V} \tag{2}$$

pour tous les n.

Pour achever la démonstration des propositions, choisissons une fonction $\varphi \in \mathscr{A}$. Pour les n suffisamment grands, on a $\beta_n\varphi = \varphi$ et (2) entraine

$$\beta_n\omega - \varphi \in \mathscr{V}\,, \tag{3}$$

d'où on voit que $\{\beta_n\omega\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathscr{D}_b$. Il résulte de (1) et (3) que $\beta_n\omega - \mathscr{A} \subset \mathscr{V} + \mathscr{V}$ pour les n suffisamment grands, alors le filtre $\mathfrak{F}$ et la suite $\{\beta_n\omega\}$ ont la même limite dans $\mathscr{B}^{\bullet}$. Comme la suite dépend seulement de ω et non du chois plus précis du filtre $\mathfrak{F}$, et qu'elle détermine bien la fonction ω, on peut identifier la limite de $\mathfrak{F}$ avec sa limite ω dans l'espace $\mathscr{B}_v$ (ou dans $\mathscr{E}$). La proposition 1 est ainsi démontré. Les raisonnements précédents font voir aussi la proposition 2.

19. Propositions. *Dans l'espace $\mathscr{B}^{\bullet}(G)$,*

1. *les ensembles bornés pour les topologies v et b coïncident;*

2. *tout ensemble v-borné de $\mathscr{B}^{\bullet}$ est contenu dans l'adhérence (pour la topologie b) d'un ensemble v-borné de $\mathscr{D}(G)$.*

Démonstration. Pour voir la proposition 2, rappelons la note 13. Dans notre cas, la suite $\{\alpha\beta_n\}$ est b-convergente en vertu de 18.2. Cela étant, on en déduit la proposition 1.

20. On désigne par $\mathscr{B}^{\bullet\prime}$ (à la différence de [1]) le dual de l'espace $\mathscr{B}^{\bullet}$. Sauf mention expresse du contraire, $\mathscr{B}^{\cdot\prime}$ sera muni de la topologie forte. Toute forme linéaire continue F sur l'espace $\mathscr{D}_b$ se prolonge par continuité, d'une unique façon, sur $\mathscr{B}^{\cdot}$. Aussi bien, d'après 14 et 15, F peut être prolonger d'une unique façon en une forme $\tilde{F}$, σ-sequentiellement continue, définie sur $\mathscr{B}$ par la formule 14(1). La comparaison avec 18.2 montre que les deux prolongements de F coïncident sur $\mathscr{B}^{\cdot}$. Si aucune confusion n'est à craindre, on écrira F au lieu de $\tilde{F}$. Alors, pour $F \in \mathscr{B}^{\cdot\prime}$ et $\omega \in \mathscr{B}$, on note par $\langle F, \omega\rangle$ ou $\langle \omega, F\rangle$ la valeur de la forme $\tilde{F}$ dans le point ω, donnée par 14(1). Ainsi les espaces $\mathscr{B}^{\cdot\prime}$ et $\mathscr{B}$ sont mis en dualité algébrique. En effet, le mesures de Dirac $\delta_a \in \mathscr{B}^{\cdot\prime}$ $(a \in G)$ séparent les points de l'espace $\mathscr{B}$. Evidemment, sur $\mathscr{B}^{\cdot\prime} \times \mathscr{D} \subset \mathscr{B}^{\cdot\prime} \times \mathscr{B}$ cette dualité coïncide avec la dualité habituelle sur $\mathscr{D}' \times \mathscr{D}$; sur $\mathscr{E}' \times \mathscr{B}$ cette dualité coïncide avec la dualité habituelle sur $\mathscr{E}' \times \mathscr{E}$.

Lemme. *La dualité*

(1) $$\langle F, \omega\rangle = \lim \langle F, \omega\beta_n\rangle$$

$(F \in \mathscr{B}^{\cdot\prime}$, $\omega \in \mathscr{B}$, $\{\beta_n\}$ est une unité approximative spéciale$)$ est continue par rapport à F et σ-séquentiellement continue par rapport à ω.

Démonstration. On voit de la définition de la dualité ci-dessus que $\omega \mapsto \langle F, \omega\rangle$ est bien σ-séquentiellement continue. Supposant $\omega \in \mathscr{B}$ fixe, l'ensemble $\mathscr{A} = \{\beta_n\omega;\ n = 1, 2, \ldots\}$ est borné dans $\mathscr{B}^{\cdot}$ (9.2). Alors son polaire absolu $\mathscr{A}^0$ est voisinage de zéro pour la topologie forte de $\mathscr{B}^{\cdot\prime}$. Pour $F \in \mathscr{A}^0$, on a $|\langle F, \beta_n\omega\rangle| \leqq 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, alors $|\langle F, \omega\rangle| \leqq 1$, c.q.f.d.

21. La propriété 15.1 peut être généralisée comme suit.

Proposition. *Si $F \in \mathscr{B}^{\cdot\prime}$, $\mathscr{A}$ borné dans $\mathscr{B}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il y a un compact $K \subset G$ de sorte que*

$$\alpha \in \mathscr{A}\,,\quad \operatorname{Supp} \alpha \cap K = \emptyset \Rightarrow |\langle F, \alpha\rangle| \leqq \varepsilon\,.$$

Démonstration. Comme $\langle F, \alpha\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \langle F, \alpha\beta_n\rangle$ et que l'ensemble $\{\alpha\beta_n;\ \alpha \in \mathscr{A},\ n = 1, 2, \ldots\} \subset \mathscr{D}$ est ν-borné d'après 9.2, la proposition découle de 15.1.

22. Proposition. *Si $\{\beta_n\}$ est une unité approximative spéciale et si $F \in \mathscr{B}^{\cdot\prime}$, alors $\lim \beta_n F = F$ dans l'espace $\mathscr{B}^{\cdot\prime}(G)$. Par conséquent, l'ensemble $\mathscr{E}'(G)$ des distributions à support compact est séquentiellement dense dans $\mathscr{B}^{\cdot\prime}(G)$.*

Démonstration. Evidemment $\mathscr{E}'(G) \subset \mathscr{B}^{\cdot\prime}(G)$. Pour une partie bornée $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}^{\cdot}$, il faut montrer que

(1) $$\lim_{n\to\infty} \langle \beta_n F, \alpha\rangle = \langle F, \alpha\rangle$$

uniformément par rapport à $\alpha \in \mathscr{A}$. Ecrivons (1) dans la forme

$$\lim_{n\to\infty} \langle F, (1 - \beta_n)\,\alpha\rangle = 0\,.$$

L'ensemble $\{(1 - \beta_n)\,\alpha;\ n = 1, 2, \ldots,\ \alpha \in \mathscr{A}\} \subset \mathscr{B}$ est borné en vertu de 9.2, d'où la conclusion grâce à la proposition précédente.

23. A toute fonction $\omega \in \mathscr{B}(G)$ on fait correspondre la forme linéaire $F \mapsto \langle F, \omega\rangle$ sur $\mathscr{B}^{\cdot\prime}$.

Théorèmes. 1. *L'ensemble $\mathscr{B}(G)$ s'identifie par la correspondence ci-dessus avec le bidual $\mathscr{B}^{\cdot\prime\prime}(G)$.*

2. *La topologie forte du bidual $\mathscr{B}^{\cdot\prime\prime}$ a pour base de voisinages de zéro la famille des bipolaires $\mathscr{U}^{00}$ où $\mathscr{U}$ parcourt les voisinages de zéro dans $\mathscr{B}^{\cdot}$ (resp. dans $\mathscr{D}_b$).*

3. *Cette topologie a aussi pour base de voisinages de zéro la famille des ensembles convexes, équilibrés, fermés pour la topologie induite par $\mathscr{E}(G)$ sur $\mathscr{B}(G)$, et absorbant les parties v-bornées de $\mathscr{B}(G)$ (resp. de $\mathscr{D}(G)$).*

Par conséquent, la topologie forte du bidual $\mathscr{B}^{\cdot\prime\prime}$ est plus fine que v; elle coïncide sur $\mathscr{B}^{\cdot}$ avec sa topologie initialle b. Notons cette topologie de l'espace $\mathscr{B} = \mathscr{B}^{\cdot\prime\prime}$ par b, aussi.

Démonstration 1. les espace $\mathscr{B}^{\cdot\prime}$ et $\mathscr{B}$ sont mis en dualité par la formule 20 (1) et le lemme 20 dit que cette dualité est continue par rapport à $F \in \mathscr{B}^{\cdot\prime}$. Alors $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}^{\cdot\prime\prime}$. Réciproquement, si L est une forme linéaire continue sur $\mathscr{B}^{\cdot\prime}(G)$, alors sa restriction est une forme linéaire continue sur l'espace $\mathscr{E}'(G)$. Comme $\mathscr{E}(G)$ est réfléxif, il y a une fonction $\omega \in \mathscr{E}(G)$ de sorte que

$$L(F) = \langle F, \omega\rangle \tag{1}$$

pour $F \in \mathscr{E}'(G)$. Considérons une fonction $\gamma \in \Gamma_p$. Comme l'ensemble

$$\{\gamma(a)\, \mathrm{D}^p\delta_a;\ a \in G\} \subset \mathscr{B}^{\cdot\prime}$$

est équicontinu, il est borné dans $\mathscr{B}^{\cdot\prime}$. Il en résulte qu'il y a un nombre $c > 0$ ne dépendant pas de $a \in G$ de sorte que

$$c \geqq |L(\gamma(a)\, \mathrm{D}^p\delta_a)| = |\langle\gamma(a)\, \mathrm{D}^p\delta_a, \omega\rangle| = \gamma(a)\, |\mathrm{D}^p\omega(a)|\,.$$

Cela veut dire que $\omega \in \mathscr{B}$. Cela étant, grâce à 22 et au lemme 20, (1) s'étend à toutes les distributions $F \in \mathscr{B}^{\cdot\prime}$ et $\mathscr{B}$ s'identifie bien avec $\mathscr{B}^{\cdot\prime\prime}$.

2. Le bidual fort $\mathscr{B}^{\cdot\prime\prime}$ a pour base de voisinages de zéro la famille des bipolaires $\mathscr{U}^{00}$ où $\mathscr{U} \subset \mathscr{B}^{\cdot}$ parcourt les ensembles convexes, équilibrés, $\sigma(\mathscr{B}^{\cdot}, \mathscr{B}^{\cdot\prime})$ – fermés et absorbant les ensembles bornés de $\mathscr{B}^{\cdot}$. Sous ces condition, $\mathscr{U} \cap \mathscr{D}$ est voisinage de zéro dans $\mathscr{D}_b$ (déf. 16). Alors $\mathscr{U}$, étant fermé, est voisinage de zéro dans $\mathscr{B}^{\cdot}$.

3. La bipolaire $\mathscr{U}^{00}$ envisagé est σ-séquentiellement fermé en vertu du lemme 20, et absorbe les parties v-bornées de $\mathscr{D}$. Il résulte de la note 13 que $\mathscr{U}^{00}$ absorbe les parties v-bornées de $\mathscr{B}$ aussi. Alors tout voisinage de zéro dans $\mathscr{B}^{\cdot\prime\prime}$ absorbe les parties v-bornées de $\mathscr{B}$.

Si $\{\beta_n\}$ est une unité approximative spéciale, l'ensemble

$$\beta_n\mathscr{U}^0 = \{\beta_n F;\ F \in \mathscr{U}^0,\ n = 1, 2, \ldots\} \subset \mathscr{E}'$$

est équicontinu dans $\mathscr{B}^{\cdot\prime}$ car il est borné sur toute partie v-bornée de $\mathscr{D}$ (9.2 et 16). Alors son polaire $(\beta_n\mathscr{U}^0)^0 \subset \mathscr{B}^{\cdot\prime\prime}$ est voisinage de zéro et fermé pour $\sigma(\mathscr{B}, \mathscr{E}')$, donc à plus forte raison pour la topologie induite par $\mathscr{E}$. De plus, $(\beta_n\mathscr{U}^0)^0 \subset \mathscr{U}^{00}$

en vertu de 22. Cela veut dire que $\mathscr{B}^{\cdot\prime\prime}$ a bien une base de voisinages de zéro fermés pour la topologie induite par $\mathscr{E}$.

Réciproquement, soit $\mathscr{W} \subset \mathscr{B}^{\cdot\prime\prime}$ un ensemble convexe, équilibré, fermé pour la topologie induite par $\mathscr{E}$ et absorbant les parties v-bornées de $\mathscr{D}$. Alors l'adhérence $\overline{\mathscr{W}}$ dans l'espace $\mathscr{E}$ est le polaire d'un ensemble $\mathscr{M} \subset \mathscr{E}'$; autrement dit, $\mathscr{W} = \overline{\mathscr{W}} \cap \mathscr{B}$ est le polaire de $\mathscr{M} \subset \mathscr{E}' \subset \mathscr{B}^{\cdot\prime}$ pour la dualité sur $\mathscr{B} \times \mathscr{B}^{\cdot\prime}$. Comme $\mathscr{W}$ absorbe les parties v-bornées de $\mathscr{D}$, $\mathscr{M}$ est borné sur toute partie v-bornée de $\mathscr{D}$, $\mathscr{M}$ est équicontinu, d'où le résultat.

Problème. Nous ne savons pas si la topologie b sur $\mathscr{B}$ est bornologique. Bien sûr, il en est ainsi dans le cas où v est bornologique. Dans ce cas-là, v et b coïncident.

24. Théorème. *Les propriétés suivantes relatives à une partie $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(G) = \mathscr{B}^{\cdot\prime\prime}(G)$ sont équivalentes.*

1. *$\mathscr{A}$ est $\sigma(\mathscr{B}, \mathscr{B}^{\cdot\prime})$ – faiblement bornée.*
2. *$\mathscr{A}$ est bornée pour la topologie forte du bidual $\mathscr{B}^{\cdot\prime\prime}$.*
3. *$\mathscr{A}$ est v-bornée.*
4. *$\mathscr{A} \subset \mathscr{A}_1^{00}$ pour une partie v-bornée $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{D}(G)$.*
5. *$\mathscr{A}$ est équicontinue sur $\mathscr{B}^{\cdot\prime}$.*

Une partie $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ possédant l'une quelconque de ces propriétés sera simplement appelée bornée.

Démonstration. $1 \Rightarrow 2$: Une partie $\mathscr{A}$ $\sigma(\mathscr{B}^{\cdot\prime\prime}, \mathscr{B}^{\cdot\prime})$ – bornée est contenue dans $\mathscr{T}^0$ pour un toneau $\mathscr{T}$ de l'espace $\mathscr{B}^{\cdot\prime}$. Considérons un voisinage de zéro dans $\mathscr{B}^{\cdot\prime\prime}$, de la forme $\mathscr{U}^{00}$ (d'après le théorème 23) où $\mathscr{U}$ est voisinage de zéro dans $\mathscr{B}^{\cdot}$, convexe, équilibré et $\sigma(\mathscr{B}^{\cdot}, \mathscr{B}^{\cdot\prime})$ – fermé. Il faut montrer que $\mathscr{U}^{00}$ absorbe $\mathscr{A}$, c-à-d que $\mathscr{T}$ absorbe $\mathscr{U}^0$. L'espace $\mathrm{Sp}\,\mathscr{U}^0$, engendré par $\mathscr{U}^0$, dans lequel $\mathscr{U}^0$ est la boule unité, est espace de Banach, alors tonnelé, d'où il résulte que $\mathscr{T}$ absorbe bien $\mathscr{U}^0$.

$2 \Rightarrow 3$ est évident, v étant moin fine (théorème 23).

$3 \Rightarrow 4$: Supposant $\mathscr{A}$ v-bornée, choisissons une unité approximative spéciale $\{\beta_n\}$ et notons

$$\mathscr{A}_1 = \{\alpha\beta_n;\ \alpha \in \mathscr{A},\ n = 1, 2, \ldots\}\,.$$

$\mathscr{A}_1$ est bornée en vertu de 9.2 et 20 (1) entraine la propriété 4.

$4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$ est évident.

25. Proposition. *La convergence σ (déf. 12) coïncide avec la convergence des suites de $\mathscr{B}$ pour la topologie faible $\sigma(\mathscr{B}, \mathscr{B}^{\cdot\prime})$. Pour cette topologie, $\mathscr{B}$ est séquentiellement complet.*

Démonstration. Il découle du lemme 20 que la convergence σ implique la convergence faible. Réciproquement, si $\{\omega_n\}$ est une suite de Cauchy pour $\sigma(\mathscr{B}, \mathscr{B}^{\cdot\prime})$, elle est $\sigma(\mathscr{B}, \mathscr{B}^{\cdot\prime})$ – bornée, donc v-bornée en vertu du théorème précédent. Comme $\mathrm{D}^p\delta_a \in \mathscr{B}^{\cdot\prime}$ (pour $a \in G$), on obtient que la suite $\{\langle\omega_n, \mathrm{D}^p\delta_a\rangle\}_n = \{\mathrm{D}^p\omega_n(a)\}_n$ est convergente, ce qui veut dire (note 12) que $\{\omega_n\}$ est σ-convergente.

26. Dans le cas où toute famille Γ_p ne contient qu'une seule fonction γ_p, ou plus généralement dans le cas où la topologie v est bornologique, la topologie b sur $\mathscr{B}^\bullet$ ainsi que sur $\mathscr{B}$ (définie dans 23) coïncide avec v (cela découle du théorème 23). Dans ce cas-là, $\mathscr{B}^\bullet$ est égal à l'adhérence $\overline{\mathscr{D}}$ de l'ensemble $\mathscr{D}$ dans l'espace complet $\mathscr{B}_v$, et peut être donc caractérisé par la proposition suivante (valable géneralement).

Proposition. *L'adhérence* $\overline{\mathscr{D}}$ *de l'ensemble* $\mathscr{D}(G)$ *dans l'espace* $\mathscr{B}_v(G)$ *est constitué par les fonctions* $\omega \in \mathscr{B}$ *pour lesquelles*

$$\lim_{\substack{x \in G \\ x \to \mathrm{Fr}_{\mathrm{A}} G}} \gamma(x)\, \mathrm{D}^p \omega(x) = 0 \tag{1}$$

pour tout p *et toute* $\gamma \in \Gamma_p$. *Ici* $\mathrm{Fr}_{\mathrm{A}} G$ *signifie la frontière d'Alexandrov et la formule* (1) *veut dire: Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il y a un compact* $K \subset G$ *de sorte que pour* $x \in G \setminus K$, *on ait* $|\gamma(x)\, D^p \omega(x)| < \varepsilon$.

Démonstration. Evidemment, toute fonction $\omega \in \overline{\mathscr{D}}$ remplit (1). Réciproquement, supposant (1), montrons que

$$\lim_{n \to \infty} \beta_n \omega = \omega$$

dans $\mathscr{B}_v$ où $\{\beta_n\}$ est une unité approximative spéciale. Considérons un multi-indice de dérivation r, une fonction $\gamma'' \in \Gamma_r$ et estimons (déf. 4) $\|\beta_n \omega - \omega\|_{r,\gamma''}$. D'après la définition 5 relative à $\{\beta_n;\, n = 1, 2, \ldots\}$, pour tous multi-indices p, q, avec $p + q = r$, on choisit $\gamma_p \in \Gamma_p$, $\gamma'_q \in \Delta_q$ et $c > 0$ de sorte que

$$\gamma_p \gamma'_q \geqq c_p \gamma'' \tag{2}$$

et que

$$\sup_x |\gamma'_q(x)\, \mathrm{D}^q \beta_n(x)| \leqq b_q \tag{3}$$

avec un nombre b_q ne dépendent pas de n. Choisissant $\varepsilon > 0$, en vertu de (1) on trouve un compact $K \subset G$ de sorte que, pour $x \in G \setminus K$, $p \leqq r$, on ait

$$|\gamma_p(x)\, \mathrm{D}^p \omega(x)| \leqq \varepsilon \tag{4}$$

et

$$|\gamma''(x)\, \mathrm{D}^r \omega(x)| \leqq \varepsilon. \tag{5}$$

Pour les n suffisamment grands, on a $\beta_n = 1$ sur un voisinage du compact K. Pour ces n on calcule (déf. 4):

$$\|\beta_n \omega - \omega\|_{r,\gamma''} = \sup_x |\gamma''(x)\, \mathrm{D}^r(\beta_n(x)\, \omega(x) - \omega(x))| =$$

$$= \sup_x \left| \gamma''(x) \left(\sum_{\substack{p,q \\ p+q=r}} \binom{r}{p} \mathrm{D}^q \beta_n(x)\, \mathrm{D}^p \omega(x) - \mathrm{D}^r \omega(x) \right) \right| \leqq$$

(en vertu de (2))

$$\sup_x \sum_{\substack{p,q \\ p+q=r \\ q\neq 0}} \binom{r}{p} \frac{1}{c_p} \left|\gamma'_q \mathrm{D}^q \beta_n(x)\, \gamma_p\, \mathrm{D}^p\omega(x)\right| +$$
$$+ \sup_x \left|\gamma''(x)\,(\beta_n(x) - 1)\, \mathrm{D}^r\omega(x)\right| .$$

Comme $\beta_n = 1$ sur un voisinage de K, on peut remplacer $\sup\limits_x$ par $\sup\limits_{x\in G\setminus K}$. Applicant (3), (4), (5), on obtient

$$\leqq \sum_{\substack{p+q=r \\ q\neq 0}} \binom{r}{p} \frac{b_q\varepsilon}{c_p} + \varepsilon ,$$

d'où le résultat.

27. Lemme. *Soit $\mathscr{A} \subset \overline{\mathscr{D}}$ un ensemble pour lequel* 26 (1) *vaut uniformément par rapport à $\omega \in \mathscr{A}$, quels que soient p et $\gamma \in \Gamma_p$. Soit $\mathscr{A}' \subset \mathscr{B}$ une partie semi-bornée. Alors, quels que soient le multi-indice r et $\gamma'' \in \Gamma_r$, on a*

$$\lim_{\substack{x\in G \\ x\to \mathrm{Fr_A} G}} \gamma''(x)\, \mathrm{D}^r(\alpha(x)\, \beta(x)) = 0$$

uniformément par rapport à $\alpha \in \mathscr{A}$, $\beta \in \mathscr{A}'$.

La démonstration est analogue à la démonstration 9.

28. Proposition. *Un ensemble $\mathscr{P} \subset \overline{\mathscr{D}}$ (l'adhérence dans l'espace $\mathscr{B}_v$) est précompact pour la topologie v, si et seulement si*

1. *$\mathscr{P}$ est v-borné et*

2. *pour tout p et toute $\gamma \in \Gamma_p$,* 26 (1) *est rempli uniformément par rapport à $\omega \in \mathscr{P}$.*

Démonstration. I. Si $\mathscr{P}$ est précompact, alors quels que soient $\varepsilon > 0$, p, $\gamma \in \Gamma_p$, on a

$$\mathscr{P} \subset \mathscr{F} + (\varepsilon/2)\, \mathscr{U} ,$$

où $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}$ est fini et $\mathscr{U} = \{\omega \in \mathscr{B};\ \|\omega\|_{p,\gamma} \leqq 1\}$ (déf. 4). En vertu de la proposition 26, il y a un compact $K \subset G$ de sorte que pour tout $x \in G \setminus K$ et toute fonction $\varphi \in \mathscr{F}$, on ait

$$\left|\gamma(x)\, \mathrm{D}^p\varphi(x)\right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon .$$

Il en résulte que, pour $\omega \in \mathscr{F} + \frac{1}{2}\varepsilon\mathscr{U}$ et $x \in G \setminus K$, on a

$$\left|\gamma(x)\, \mathrm{D}^p\omega(x)\right| < \varepsilon$$

et 26 (1) est bien rempli uniformément .

II. Supposons que $\mathscr{P}$ satisfasse aux conditions 1 et 2 de la proposition. Soit $\{\beta_n\}$ une unité approximative spéciale et soit

$$\mathscr{U} = \{\omega \in \mathscr{B};\ \left|\gamma_j\, \mathrm{D}^{p_j}\omega(x)\right| < \varepsilon \text{ pour } x \in G,\ j = 1, 2, \ldots, j_0\}$$

$(\gamma_j \in \Gamma_{p_j},\ \varepsilon > 0)$ un voisinage de zéro dans $\mathscr{B}_v$. En vertu du lemme 27, il y a un compact $K \subset G$ de sorte que, pour $x \in G \setminus K$, tout n, toute $\omega \in \mathscr{P}$ et $j = 1, 2, \ldots, j_0$, on ait

$$\gamma_j(x)\, \mathrm{D}^{p_j}[\omega(x)\,(1 - \beta_n(x))] < \varepsilon\,.$$

Pour un n_0, $\operatorname{Supp}(1 - \beta_{n_0}) \subset G \setminus K$, d'où

$$\mathscr{P}(1 - \beta_{n_0}) \subset \mathscr{U}\,.$$

L'ensemble $\mathscr{P}.\beta_{n_0}$ est borné dans $\mathscr{B}_v$. Comme dans l'espace $\mathscr{D}(\operatorname{Supp}\beta_{n_0})$ la topologie v coïncide avec la topologie habituelle de l'espace $\mathscr{D}(\operatorname{Supp}\beta_{n_0})$, l'ensemble $\mathscr{P}\,.\,\beta_{n_0}$ est précompact. Alors, pour tout voisinage de zéro $\mathscr{U}$, on vient de trouver un précompact $\mathscr{P}\,.\,\beta_{n_0}$ de sorte que

$$\mathscr{P} \subset \mathscr{P}\,.\,\beta_{n_0} + \mathscr{P}\,.\,(1 - \beta_{n_0}) \subset \mathscr{P}\,.\,\beta_{n_0} + \mathscr{U}\,,$$

ce qui signifie que $\mathscr{P}$ est précompact.

29. Proposition. *Un ensemble $\mathscr{P}' \subset \mathscr{B}^{\boldsymbol{\cdot}\prime}(G)$ est précompact (pour la topologie forte du dual de $\mathscr{B}^{\boldsymbol{\cdot}}$) si et seulement si*

1. *$\mathscr{P}'$ est borné et*
2. *15.1 est rempli avec un K ne dépendant pas de $F \in \mathscr{P}'$.*

Démonstration. I. Supposons $\mathscr{P}'$ précompact. Si $\mathscr{A}$ est une partie v-bornée et équilibrée de $\mathscr{D}(G)$, son polaire $\mathscr{A}^0$ dans $\mathscr{B}^{\boldsymbol{\cdot}\prime}$ est voisinage de zéro, d'où, pour $\varepsilon > 0$, il y a une partie finie $\mathscr{F}' \subset \mathscr{P}'$ de sorte que

$$\mathscr{P}' \subset \mathscr{F}' + \tfrac{1}{2}\varepsilon\mathscr{A}^0 \tag{1}$$

En vertu de 15.1 (cf. la définition 16), il y a un compact $K \subset G$ de sorte que

$$\varphi \in \mathscr{A}\,, \quad \operatorname{Supp}\varphi \subset G \setminus K \Rightarrow |\langle F_i, \varphi\rangle| < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

pour tout $F_i \in \mathscr{F}'$. Il résulte de (1) que pour tout $F \in \mathscr{P}'$, toute $\varphi \in \mathscr{A}$ avec $\operatorname{Supp}\varphi \subset G \setminus K$, on a $|\langle F, \varphi\rangle| < \varepsilon$, ce qui est la condition 2 de la proposition.

II. Supposons que $\mathscr{P}'$ satisfasse aux conditions de la proposition. Supposons donné un voisinage de zéro dans $\mathscr{B}^{\boldsymbol{\cdot}\prime}$ qui, grâce aux propositions 19 peut être égal à $\mathscr{A}^0$ où $\mathscr{A}$ est une partie v-bornée et équilibrée de $\mathscr{D}$. Soit $\{\beta_n\}$ une unité approximative spéciale. La condition 2 relative à la partie

$$\{\alpha(1 - \beta_n);\ \alpha \in \mathscr{A}, n = 1, 2, \ldots\} \subset \mathscr{D}(G)$$

(v-bornée, en vertu de 9.2) dit qu'il y a un compact K de sorte que, pour tout $F \in \mathscr{P}'$, $\alpha \in \mathscr{A}$, $n = 1, 2, \ldots$ avec

$$\operatorname{Supp}\alpha(1 - \beta_n) \subset G \setminus K\,,$$

on ait

$$|\langle F, \alpha(1 - \beta_n)\rangle| \leqq 1\,.$$

Il en résulte

$$\mathscr{P}'(1 - \beta_{n_0}) \subset \mathscr{A}^0 \tag{2}$$

aussitôt que $\operatorname{Supp}(1 - \beta_{n_0}) \subset G \setminus K$. Quelle que soit la partie bornée $\mathscr{M} \subset \mathscr{E}(G)$, évidemment $\mathscr{M}\,.\,\beta_{n_0}$ est une partie bornée de $\mathscr{D}(G)$, donc à plus forte raison, v-bornée.

$\mathscr{P}'$ est borné sur $\mathscr{M} \,.\, \beta_{n_0}$ (condition 1), donc $\mathscr{P}' \,.\, \beta_{n_0}$ est borné sur $\mathscr{M}$. Cela veut dire que $\mathscr{P}' \,.\, \beta_{n_0}$ est une partie bornée de $\mathscr{E}'(G)$, donc précompacte dans $\mathscr{E}'(G)$. Comme $\mathscr{E}'(G)$ est continuement plongé dans $\mathscr{B}^{\boldsymbol{\cdot}\prime}(G)$, $\mathscr{P}' \,.\, \beta_{n_0}$ est précompacte dans $\mathscr{B}^{\boldsymbol{\cdot}\prime}$, aussi. En vertu de (2), il en résulte que la partie

$$\mathscr{P}' \subset \mathscr{P}' \,.\, \beta_{n_0} + \mathscr{P}'(1 - \beta_{n_0}) \subset \mathscr{P}' \,.\, \beta_{n_0} + \mathscr{A}^0$$

est précompacte, c.q.f.d.

30. Notons que dans 29.2 (ainsi que dans 15.1) nous pouvons nous borner à $\varepsilon = 1$ seulement: pour qu'un ensemble $\mathscr{P}' \subset \mathscr{B}^{\boldsymbol{\cdot}\prime}$ soit précompact, (il faut et) il suffit que

1. $\mathscr{P}'$ soit borné et que

2. quelle que soit la partie v-bornée $\mathscr{A} \subset \mathscr{D}(G)$, il y a un compact $K \subset G$ de sorte que

$$\varphi \in \mathscr{A}\,, \quad \operatorname{Supp} \varphi \cap K = \emptyset\,, \quad F \in \mathscr{P}' \Rightarrow |\langle F, \varphi\rangle| \leqq 1\,.$$

An effet, applicant 30.2 à la partie bornée $(1/\varepsilon)\,\mathscr{A}$, on obtient 29.2.

Corollaire. *$P' \subset \mathscr{B}^{\boldsymbol{\cdot}\prime}$ est précompact, si et seulement si*

1. *$\mathscr{P}'$ est borné et*

2. *quelle que soit la partie v-bornée $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(G)$, il y a un compact $K \subset G$ de sorte que*

$$\alpha \in \mathscr{A}\,, \quad \operatorname{Supp} \alpha \cap K = \emptyset\,, \quad F \in \mathscr{P}' \Rightarrow |\langle F, \alpha\rangle| \leqq 1\,.$$

Démonstration. Supposons $\mathscr{P}'$ précompact. Pour une unité approximative spéciale $\{\beta_n\}$, l'ensemble

$$\{\alpha\beta_n;\ \alpha \in \mathscr{A},\ n = 1, 2, \ldots\}$$

est v-borné (prop. 9.2) dans $\mathscr{D}(G)$. Applicant 29.2, on obtient un compact $K \subset G$ de sorte que

$$\alpha \in \mathscr{A}\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,, \quad \operatorname{Supp} \alpha\beta_n \cap K = \emptyset\,, \quad F \in P' \Rightarrow |(F, \alpha\beta_n\rangle| \leqq 1$$

Si alors $\operatorname{Supp} \alpha \cap K = \emptyset$, la proposition 18.2 entraine le résultat.

31. Définition. Désignons par τ la topologie localement convexe sur $\mathscr{B}$, la plus fine pour laquelle les suites σ-convergentes (prop. 25) restent convergentes.

On verra plus tard (th. 36) que τ est la topologie de Mackey $\tau(\mathscr{B}, \mathscr{B}^{\boldsymbol{\cdot}\prime})$. Il est aisé de voir que l'espace $\mathscr{D}(G)$ est continuement plongé dans $\mathscr{B}_\tau$. Un ensemble convexe équilibré $\mathscr{U} \subset \mathscr{B}$ est voisinage de zéro pour la topologie τ, si et seulemenet si, pour toute suite $\{\alpha_n\} \subset \mathscr{B}$, σ-convergent vers zéro, il y a un n_0 de sorte que $n \geqq n_0$ entraine $\alpha_n \in \mathscr{U}$.

32. Lemme. $\mathscr{B}'_\tau = \mathscr{B}^{\boldsymbol{\cdot}\prime}$.

Démonstration. Comme τ est plus fine que la topologie faible $\sigma(\mathscr{B}, \mathscr{B}^{\boldsymbol{\cdot}\prime})$, on a $\mathscr{B}'_\tau \supset \mathscr{B}^{\boldsymbol{\cdot}\prime}$. Réciproquement, si $F \in \mathscr{B}'_\tau$, la forme linéaire F est σ-séquentiellement continue. Alors, sa restriction $F/\mathscr{D}$ est une distribution; le théorème 15 avec la proposition 14 entrainent $F \in \mathscr{B}^{\boldsymbol{\cdot}\prime}$.

33. Lemme. *Un ensemble convexe et équilibré $\mathscr{U} \subset \mathscr{B}(G)$ est voisinage de zéro pour la topologie τ, si et seulement si*

1. *$\mathscr{U} \cap \mathscr{D}(G)$ est voisinage de zéro pour la topologie habituelle de l'espace $\mathscr{D}(G)$ et*
2. *Quelle que soit la partie v-bornée $\mathscr{A}$ de $\mathscr{B}$, il y a un compact $K \subset G$ de sorte que*

$$\alpha \in \mathscr{A}\,, \quad \operatorname{Supp} \alpha \cap K = \emptyset \Rightarrow \alpha \in \mathscr{U}\,.$$

Démonstration. I. Soit $\mathscr{U}$ un voisinage de zéro dans $\mathscr{B}_\tau$. Evidemment $\mathscr{U} \cap \mathscr{D}$ est voisinage de zéro dans $\mathscr{D}$. Si la condition 2 n'était par remplie, il y aurait une partie bornée $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ et une suite de compacts $K_n \subset G$ de sorte que $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$, $\bigcup K_n = G$, $\alpha_n \in \mathscr{A}$, $\operatorname{Supp} \alpha_n \cap K_n = \emptyset$ et que, pour aucun n, α_n n'appartient à $\mathscr{U}$. Dans ce cas-là, $\{\alpha_n\}$ σ-converge vers zéro, ce qui contredit la définition de τ.

II. Soit $\mathscr{U} \subset \mathscr{B}$ un ensemble satisfaisant aux conditions de la proposition, soit $\{\alpha_n\}$ une suite σ-convergent vers zéro et soit $\{\beta_n\}$ une unité approximative spéciale. L'ensemble

$$\{2\alpha_n(1 - \beta_m);\ n, m = 1, 2, \ldots\}$$

est borné (prop. 9.2); il y a alors un compact $K \subset G$ de sorte que

$$\operatorname{Supp} \alpha_n(1 - \beta_m) \cap K = \emptyset \Rightarrow \alpha_n(1 - \beta_m) \in \tfrac{1}{2}\mathscr{U}\,.$$

Par conséquent, si on choisit un m_0 tel que

$$\operatorname{Supp}(1 - \beta_{m_0}) \cap K = \emptyset\,,$$

on obtient

$$\alpha_n(1 - \beta_{m_0}) \in \tfrac{1}{2}\mathscr{U} \tag{1}$$

pour tout n. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n\beta_{m_0} = 0$ dans $\mathscr{D}$, choisissons un n_0 tel que $\alpha_n\beta_{m_0} \in \frac{1}{2}\mathscr{U}$ pour $n \geqq n_0$. Avec (1), ça implique $\alpha_n \in \mathscr{U}$ pour $n \geqq n_0$, c.q.f.d.

34. Proposition. *La topologie τ sur $\mathscr{B}$ est la topologie de la convergence uniforme sur les parties précompactes de $\mathscr{B}^{\cdot\prime}$.*

Démonstration. Comme (lemme 32) τ est compatible avec la dualité, $\mathscr{B}_\tau$ possède une base de voisinage de zéro constituée par les polaires de parties bornées de $\mathscr{B}^{\cdot\prime}$. Le résultat se déduit du corollaire 30 et du lemme 33.

35. Corollaire. *La topologie τ est la topologie localement convexe sur $\mathscr{B}$ la plus fine qui coïncide, sur toute partie bornée $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$, avec la topologie faible $\sigma(\mathscr{B}, \mathscr{B}^{\cdot\prime})$.*

Démonstration. Désignons par τ' la topologie définie par le corollaire. Elle est moin fine que la topologie τ de la définition 31. Réciproquement, τ coïncide avec σ sur les parties bornées d'après le théorème général: sur les parties équicontinues $A \subset \mathscr{B} = \mathscr{B}^{\cdot\prime\prime}$ (voir 33.1. 24.5), la topologie faible coïncide avec la topologie de la convergence uniforme sur les parties précompactes de $\mathscr{B}^{\cdot\prime}$.

36. Dans la démonstration suivante, on utilisera le lemme de Rosenthal ([4], p. 18): Soient $\mathfrak{F}$ un sigma-algèbre de sous-ensembles de l'ensemble Ω, $\{\mu_n\}$ une suite bornée de mesures réelles (finiment aditives) sur $\mathfrak{F}$, $\{E_n\} \subset \mathfrak{F}$ une suite d'ensembles disjoints, $\varepsilon > 0$. Alors, il y a une suite partielle $\{E_{n_j}\}_j$ de sorte que, pour tout j, (la variation)

$$|\mu_{n_j}| \left(\bigcup_{k \neq j} E_{n_k} \right) < \varepsilon .$$

Théorème. $\tau = \tau(\mathscr{B}, \mathscr{B}^{\cdot\prime})$ (la topologie de Mackey).

Par conséquent, les parties convexes et $\sigma(\mathscr{B}^{\cdot\prime}, \mathscr{B})$ — faiblement compactes de $\mathscr{B}^{\cdot\prime}$ sont précompactes.

Démonstration. En vertu du lemme 32, la topologie de Mackey est plus fine que τ. Réciproquement, suivant la proposition 34, choisissons un ensemble $\mathscr{M}' \subset \mathscr{B}^{\cdot\prime}$, convexe, équilibré, borné, mais non précompact. On a à démontrer que le polaire $\mathscr{M}'^0 \subset \mathscr{B}$ n'est pas voisinage de zéro pour la topologie de Mackey. En vertu de la proposition 29 (et de la note 30), il y a une partie ν-bornée $\mathscr{A} \subset \mathscr{D}$ de sorte que, pour tout compact $K \subset G$, il existe $\varphi \in \mathscr{A}$ et $F \in \mathscr{M}'$ avec $\operatorname{Supp} \varphi \cap K = \emptyset$, $\langle F, \varphi \rangle =$ $= 1$. Choisissons des compacts K_n avec

$$\operatorname{int} K_{n+1} \supset K_n , \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = G$$

et choisissons par récurrence $\varphi_n \in \mathscr{A}$, $F_n \in \mathscr{M}'$ de sorte que $\operatorname{Supp} \varphi_n \cap K_n = \emptyset$, $\operatorname{Supp} \varphi_n \cap \operatorname{Supp} \varphi_m = \emptyset$ $(n \neq m)$,

$$\langle F_n, \varphi_n \rangle = 1 . \tag{1}$$

Applicant le lemme de Rosenthal si-dessus, on va voir que les suites $\{\varphi_n\}$, $\{F_n\}$ peuvent être choisises de sorte que l'on ait en outre

$$\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} |\langle F_n, \varphi_m \rangle| < \tfrac{1}{4} \tag{2}$$

quel que soit n. En effet, comme $\mathscr{A}$ est ν-bornée et que les $\operatorname{Supp} \varphi_m$ sont disjoints, l'ensemble

$$\mathscr{C} = \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} a_m \varphi_m ;\ |a_m| \leqq 1 \right\}$$

est borné dans $\mathscr{B}$ (donc équicontinu, 24.5). Toute distribution F_n définit une mesure μ_n sur la tribu des parties de $\mathbf{N}$ einsi: pour $A \subset \mathbf{N}$ posons

$$\mu_n(A) = \langle F_n, \sum_{m \in A} \varphi_m \rangle .$$

Comme F_n appartiennent à l'ensemble borné $\mathscr{M}'$ et que $\mathscr{C}$ est équicontinu, les nombres $\mu_n(A)$ sont bornés indépendamment de n et de A, ce qui est l'hypothèse du lemme de Rosenthal. On a alors (2) en passant, si nécessaire, à des suites partielles.

En vertu de 25, la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m = \omega \in \mathscr{B} \tag{3}$$

est σ-faiblement sommable. Par conséquent, ω appartient à l'adhérence faible de l'ensemble convexe

$$\mathscr{C}_1 = \{ \sum_{m=1}^{n_0} a_m \varphi_m;\ n_0 \in \mathbf{N},\ |a_m| \leqq 1 \} .$$

Aussi appartient-il à l'adhérence de $\mathscr{C}_1$ pour la topologie de Mackey. Toutefois, (1), (2) at (3) impliquent

$$\langle F_n, \omega \rangle > \tfrac{3}{4} ,$$

tandis que, quel que soit $\psi = \sum_{m=1}^{n_0} a_m \varphi_m \in \mathscr{C}_1$, en choisissant $n > n_0$, on a en vertu de (2) $|\langle F_n, \psi \rangle| < 1/4$. Alors

$$\langle F_n, \omega - \psi \rangle > \tfrac{1}{2} , \quad \omega - \psi \notin \tfrac{1}{2}\mathscr{M}'^0$$

ce qui veut dire que $\mathscr{M}'^0$ n'est pas voisinage de zéro pour la topologie de Mackey.

37. Dans le reste de l'article, nous nous occuperons du cas où $\Gamma_p = \{\gamma_p\}$, $\gamma_0 = 1$, ce qui entraine $\mathbf{1} \in \mathscr{B}_{\{\Gamma_p\}_p}$. Les distributions $F \in \mathscr{B}^{\bullet\prime}_{\{\gamma_p\}_p}(G)$ peuvent être appelées distributions intégrables, $\int_G F = \langle F, 1 \rangle$. Ainsi a-t-on obtenu une généralisation de la notion de distribution intégrable, définie dans [1] pour $G = \mathbf{R}^N$ seulement. Cependant, l'intégrabilité d'une distribution dépend du choix des fonctions γ_p, ce qui sera aisé de voir de la charactérisation 37.2 ou 38. Par exemple, d'après [1], la fonction sin x n'est pas une distribution intégrable, tout en appartenant à l'espace $\mathscr{B}^{\bullet\prime}_{\{\gamma_p\}_p}(\mathbf{R}^1)$ défini par 10 (1), car

$$-\sin x = \left(\frac{\sin x}{\gamma_2} \gamma_2 \right)'' .$$

Rappelons que $\mathscr{B}_{\{\gamma_p\}}$ est espace de Fréchet, donc bornologique, la topologie forte du bidual $\mathscr{B}^{\bullet\prime\prime} = \mathscr{B}$ coïncide avec la topologie initiale v (cf. 23). Par conséquent, la topologie b (déf. 16) de l'espace $\mathscr{B}^{\bullet} = \overline{\mathscr{D}}$ (cf. 26) coïncide avec v. Dans ce cas-là, on peut ajouter au théorème 15 le théorème suivant.

Théorème. *Supposons* (toujours sous les hypothèses 3) *que les topologies v et b sur $\mathscr{D}(G)$ coïncident et que $\mathbf{1} \in \mathscr{B}$. Alors, pour une distribution $F \in \mathscr{D}'(G)$, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $F \in \mathscr{B}^{\bullet\prime}_{\{\Gamma_p\}_p}$.

2. *Il y a un nombre fini de multi-indices $p_1, p_2, \dots, p_n$, des mesures de Radon μ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) à variation bornée sur G et $\gamma_k \in \Gamma_{p_k}$ de sorte que*

$$F = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}^{p_k}(\gamma_k \mu_k) \tag{1}$$

3. *Pour toute unité approximative spéciale $\{\beta_n\} \subset \mathscr{B}(G)$,* lim $\langle F, \beta_n \rangle$ *existe.*

Démonstration. $1 \Rightarrow 2$: Suivant la démonstration dans [1], III, Th. XXVII, trouvons un voisinage de zéro dans $\mathscr{D}_b = \mathscr{D}_v$ (déf. 4)

$$\mathscr{V} = \{\varphi;\ |\gamma_k(x)\, \mathrm{D}^{p_k}\varphi(x)| \leqq 1 \text{ pour } k = 1, 2, \dots, n,\ x \in G\}$$

($\gamma_k \in \Gamma_{p_k}$) sur lequel la forme F est bornée. Associons à la distribution F la forme linéaire $\tilde{F}$ sur l'espace

$$X = \{\{\gamma_k \, \mathrm{D}^{p_k}\varphi\}_{k=1,2,\ldots,n};\ \varphi \in \mathscr{D}(G)\} \subset [\mathscr{D}_0(G)]^n$$

(produit de n espaces isomorphes à l'espace de Banach $\mathscr{D}_0$ des fonctions continues à support compact dans G, muni de la norme $\|f\| = \sup_x |f(x)|$), définie

$$\langle \tilde{F}, \{\gamma_k \, \mathrm{D}^{p_k}\varphi\}_{k=1,2,\ldots,n} \rangle = \langle F, \varphi \rangle$$

et prolongeons la forme $\tilde{F}$ en une forme linéaire continue sur l'espace $[\mathscr{D}_0(G)]^n$, d'après le théorème de Hahn-Banach. On obtient ainsi les mesures μ_k exigées.

$2 \Rightarrow 3$: Comme $\mathbf{1} \in \mathscr{B}$, la suite semi-bornée $\{\beta_n\} = \{\mathbf{1} \, . \, \beta_n\}$ est bornée en vertu de la proposition 9.2 et le résultat est une conséquence facile du théorème de Lebesgue.

$3 \Rightarrow 1$: Soit $\{\beta_n\}$ une unité approximative spéciale. Si $F \notin \mathscr{B}^{\bullet\prime}$, F ne possède pas la propriété 15.1. Ça veut dire qu'il y a une suite v-bornée $\{\varphi_n\}$ et $\varepsilon > 0$ de sorte que

$$\operatorname{Supp} \varphi_n \cap \operatorname{Supp} \beta_n = \emptyset$$

et que

$$\langle F, \varphi_n \rangle = \varepsilon \, . \, (-1)^n \, . \tag{2}$$

$\{\beta_n + \varphi_n\}$ est une unité approximative spéciale aussi. S'il existe $\lim \langle F, \beta_n \rangle$, à cause de (2) $\lim \langle F, \beta_n + \varphi_n \rangle$ ne peut pas exister.

38. Rappelons que pour l'espace $\mathscr{B}(\mathbf{R}^N)$ de Schwartz, les mesures μ_k de 37.2 peuvent être remplacer par des fonctions continues et intégrables ([1], théorème XXV). Nous ne le savons pas dans le cas géneral, supposant $v = b$ et $\mathbf{1} \in \mathscr{B}$. Toutefois c'est vrai pour l'espace de l'exemple 10 ou 11.

Théorème. *Si $F \in \mathscr{B}^{\bullet\prime}_{\{\gamma_p\}_p}(G)$ avec γ_p de l'exemple 10, il y a un nombre fini de fonctions continues et intégrables f_p sur G de sorte que*

$$F = \sum_p \mathrm{D}^p(\gamma_p f_p) \, .$$

et réciproquement. Il en est de même si l'on remplace les γ_p par γ'_p de l'exemple 11.

Démonstration. La réciproque découle de 37.2. Démontrons d'abord le théorème pour les fonctions γ_p de l'exemple 10 et pour $G \subsetneqq \mathbf{R}^N$. Parfois les fonctions γ_p définies par 10 (2) seront notées par $\gamma_{|p|}$, car elles ne dépendent que de $|p|$. On a alors $\gamma_1(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbf{R}^N \setminus G)$, $\gamma_p = \gamma^{|p|}$. En vertu des formules 10 (9), si l'on désigne

$$\psi_j = \beta_{2^{-j+1}} - \beta_{2^{-j+2}} \tag{1}$$

$(j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, on a $\psi_j \in \mathscr{E}(G)$,

$$\operatorname{Supp} \psi_j \subset \{x \in G;\ 2^{-j+1} \leqq \operatorname{dist}(x, \mathbf{R}^N \setminus G) \leqq 3 \, . \, 2^{-j+2}\} \, , \tag{2}$$

$$0 \leqq \psi_j \leqq 1 \, , \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j(x) = 1 \tag{3}$$

quel que soit $x \in G$. Faisons intervenir la solution élémentaire de l'équation de

Laplace itérée

$$(4) \qquad \Delta^k(E) = \delta$$

pour un nombre naturel fixe $k > N/2$. D'après [1], formule II,3,19, il y a une fonction E continue et remplissant (4), notemment

$$(5) \qquad E(x) = A|x|^{2k-N}$$

pour la dimension N impaire ($|x| = \sqrt{(x_1^2 + \ldots + x_N^2)}$, le nombre A dépend de k, N)

$$E(x) = A|x|^{2k-N} \ln |x|$$

pour N paire. Comme dans ce cas-là $\Delta^k|x|^{2k-N} = 0$, alors la fonction

$$(6) \qquad E_j(x) = A|x|^{2k-N} \ln 2^j|x|$$

remplit (4) aussi (quel que soit j; A ne dépend pas de j). Il convient de noter $E_j = E$ pour N impair. On a, pour N pair ou impair,

$$(7) \qquad E_j(x) = E_0(2^j x) \,.\, 2^{-j(2k-N)} \,.$$

Considérons les fonctions $\alpha_{2^{-j}}(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^N)$ définies par 10 (3), (4), (6):

$$(8) \qquad \operatorname{Supp} \alpha_{2^{-j}} \subset \{x;\ |x| \leqq 2^{-j}\}$$

$$\alpha_{2^{-j}}(x) = 1 \quad \text{pour} \quad |x| \leqq 2^{-j-1} \,.$$

Tenant compte de (4), il en résulte

$$(9) \qquad \Delta^k(\alpha_{2^{-j}} E_j) = \delta + \zeta_j$$

où la fonction $\zeta_j \in \mathscr{D}$ est le lapalacien itéré classique,

$$(10) \qquad \zeta_j(x) = \Delta^k(\alpha_{2^{-j}}(x)\, E_j(x))$$

pour $x \neq 0$, $\zeta_j(0) = 0$. On déduit de (7) et de 10 (4) que

$$\zeta_j(x) = \zeta_0(2^j x) \,.\, 2^{jN} \,,$$

donc (la norme dans $\mathscr{L}_1$)

$$(11) \qquad \|\zeta_j\| = \|\zeta_0\| \,.$$

Egalement on obtient

$$(12) \qquad \|\alpha_{2^{-j}} E_j\| = \|\alpha_{2^0} E_0\| \,.\, 2^{-2jk} \,.$$

Grâce à 37.2, il suffit de trouver les fonctions f_p, pour $F = \mathrm{D}^p(\gamma_p \mu)$ seulement, où μ est une mesure à variation bornée sur G. Désignons $\|\mu\| = |\mu|\,(G)$ (la variation). On voit de (3) que

$$(13) \qquad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \|\psi_j \mu\| < \infty$$

et

$$(14) \qquad F = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathrm{D}^p \gamma_p \psi_j \mu$$

dans $\mathscr{E}'(G)$, la somme étant finie sur tout compact, en vertu de (2). En vertu de (2) et

(8), on a

(15) $$\operatorname{Supp} \gamma_p \psi_j \mu * E_j \alpha_{2-j} \subset \{x \in G;\ 2^{-j} \leqq \operatorname{dist}(x, \mathbf{R}^N \setminus G) < 2^{-j+4}\}.$$

De la même raison (cf. (10))

(16) $$\operatorname{Supp} \gamma_p \psi_j \mu * \zeta_j \subset \{x \in G;\ 2^{-j} \leqq \operatorname{dist}(x, \mathbf{R}^N \setminus G) < 2^{-j+4}\}.$$

(9) entraine

$$\Delta^k(\gamma_p \psi_j \mu * E_j \alpha_{2-j}) = \gamma_p \psi_j \mu * \Delta^k E_j \alpha_{2-j} = \gamma_p \psi_j \mu + \gamma_p \psi_j \mu * \zeta_j$$

d'où, en vertu de (14),

$$F = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathrm{D}^p \Delta^k(\gamma_p \psi_j \mu * E_j \alpha_{2-j}) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathrm{D}^p(\gamma_p \psi_j \mu * \zeta_j),$$

les sommes étant finies sur tout compact, grâce à (15), (16). En désignant

$$f_j = \frac{\gamma_p \psi_j \mu * E_j \alpha_{2-j}}{\gamma_{|p|+2k}}, \quad g_j = \frac{\gamma_p \psi_j \mu * \zeta_j}{\gamma_{|p|}},$$

on en obtient

$$F = \mathrm{D}^p \Delta^k(\gamma_{|p|+2k} \textstyle\sum f_j) - \mathrm{D}^p(\gamma_{|p|} \textstyle\sum g_j).$$

Evidement les fonctions f_j et g_j sont continues. Comme les sommes sont finies sur tout compact, aussi les fonctions $\sum_j f_j$ et $\sum_j g_j$ sont-elles continues. Pour achever la démonstration, il reste à montrer qu'elles sont intégrables. En vertu de 10 (2), (2) et (15), on a

(17) $$\gamma_p \leqq 2^{(-j+4)|p|} \quad \text{sur le} \quad \operatorname{Supp} \psi_j$$

et

(18) $$\gamma_{|p|+2k} \geqq 2^{-j(|p|+2k)} \quad \text{sur le} \quad \operatorname{Supp} f_j.$$

Tenant compte de (12), on en déduit

$$\|f_j\| \leqq 2^{j(|p|+2k)} \|\gamma_p \psi_j \mu\| \|E_j \alpha_{2-j}\| \leqq$$
$$\leqq 2^{j(|p|+2k)} \cdot 2^{(-j+4)\cdot|p|} \|\psi_j \mu\| \|\alpha_1 E_0\| \cdot 2^{-2jk},$$

alors, en vertu de (13), $\sum \|f_j\| < \infty$. Du même raisonnement, il résulte de (11) que $\sum \|g_j\| < \infty$, et le théorème est démontré pour l'exemple 10 avec $G \subsetneqq \mathbf{R}^N$.

Les autres cas n'exigeront que des modifications de détail. Pour l'espace $\mathscr{B}'^{\bullet}_{\{\gamma_p\}}(\mathbf{R}^N)$ défini par 10 (1), on considère $j = 0, -1, -2, \dots$ et on définit $\psi_0 = \alpha_2$ (voir 10 (3)), $\psi_j = \alpha_{2-j+3} - \alpha_{2-j+2}$ $(j = -1, -2, \dots)$. Quant à l'exemple 11 avec $G \subsetneqq \mathbf{R}^N$, on considère $j = 0, 1, 2, \dots$ et on définit ψ_j par (1) pour $j = 1, 2, \dots$ $\psi_0 = \beta_2$. Enfin, pour l'espace des distributions intégrables de [1], le résultat est conu.

Références

[1] *L. Schwartz:* Théorie des distributions, Hermann, Paris, 1957.

[2] *L. Schwartz:* Théorie des distributions à valeurs vectorielles, Ann. Inst. Fourier VII, 1957.

[3] *L. Schwartz:* Espaces de functions différentiable à valeurs vectorielles, J. Anal. Math. Jérusalem *IV*, 1954, 88—148.

[4] *J Diestl, J. Uhl:* Vector Measures, Math. Surveys *15*, 1977.

[5] *J Robertson, S. Robertson:* Topological vector spaces, Cambridge Univ. press, 1964.

[6] *P. Dierolf:* On the existence of convolution for measures, Funct. Approx. Comment. Math. *32*, 1981, no 1, 13—35.

Adresse des auteurs: J. Jelínek, 186 00 Praha 8, Sokolovská 83, Tchécoslovaquie (Matematicko-fyzikální fakulta UK); Z. Krtouš, 461 17 Liberec, Hálkova 6, Tchécoslovaquie (VŠST).