Miroslav Fiedler

Numerické řešení algebraických rovnic, které mají kořeny o skoro stejné absolutní hodnotě

Aplikace matematiky, Vol. 1 (1956), No. 1, 4–22

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102512`

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÝCH ROVNIC, KTERÉ MAJÍ KOŘENY O SKORO STEJNÉ ABSOLUTNÍ HODNOTĚ

MIROSLAV FIEDLER

(Došlo dne 8. listopadu 1955.) DT:512.37

V článku se navrhuje methoda řešení algebraické rovnice, jejíž všechny kořeny mají skoro stejnou absolutní hodnotu. Této vlastnosti se přitom podstatně užívá. Jsou uvedeny numerické příklady.

1. V praxi se dosti často stává, že algebraická rovnice, jejíž kořeny hledáme, má tu vlastnost, že absolutní hodnoty kořenů se navzájem příliš neliší. Tyto **rovnice odolávají** většině užívaných method, na př. Graeffeho nebo Bernoulli-Whittakerově. Obvykle se užívá toho způsobu řešení, že se zavede substituce $x = y + a$ za neznámou x, kde a je vhodně volené reálné číslo (na př. $a = 1$), a řeší se získaná rovnice v y. Tento způsob však nijak nevyužívá toho, že rovnice má kořeny o skoro stejné absolutní hodnotě. V tomto článku se navrhuje metoda, která tohoto faktu užívá k zjednodušení rovnice.

2. Budiž nejprve dána algebraická rovnice n-tého stupně ($n > 2$)

$$f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0\,, \tag{1}$$

kde koeficienty a_i jsou reálné, $a_0 \neq 0$, která má všechny kořeny o téže absolutní hodnotě $r > 0$. Protože rovnice (1) může mít za reálné kořeny (v jistých násobnostech k_1 a k_2) jen čísla $+ r$ a $- r$, což se dosazením snadno zjistí, a protože dělením faktory $(x - r)^{k_1}\,(x + r)^{k_2}$ se reálné kořeny odstraní, budeme předpokládat, že všechny kořeny rovnice (1) jsou komplexní (ne reálné). Je tedy n sudé, $n = 2s$.

Substitucí $x = ry$ se z $f(x) = 0$ dostane rovnice

$$g(y) \equiv b_0y^{2s} + b_1y^{2s-1} + \ldots + b_{2s} = 0\,, \tag{2}$$

která má za kořeny komplexní čísla o absolutní hodnotě 1, různá od $+ 1$ a $- 1$. Je-li tedy α kořenem (2), pak $\frac{1}{\alpha} = \bar{\alpha}$ ($\bar{\alpha}$ značí jako obvykle číslo komplexně sdružené s α) je také kořenem (1), a to *různým* od α. Poněvadž však čísla $\frac{1}{\alpha}$ (a právě jen tato čísla) vyhovují rovnici

$$y^{2s}g\left(\frac{1}{y}\right) \equiv b_{2s}y^{2s} + b_{2s-1}y^{2s-1} + \ldots + b_1y + b_0 = 0\,, \tag{3}$$

liší se levé strany rovnic (2) a (3) jen konstantním faktorem c, různým od nuly:

$$g(y) \equiv cy^{2s}g\left(\frac{1}{y}\right).$$

Dosadíme-li do této identity $y = 1$, pak vzhledem ke $g(1) \neq 0$ (číslo 1 není kořenem (2)) platí $c = 1$, takže

$$g(y) \equiv y^{2s}g\left(\frac{1}{y}\right)$$

a

$$b_0 = b_{2s},\ b_1 = b_{2s-1},\ \ldots,\ b_{s-1} = b_{s+1}\,.$$

Taková rovnice se, jak známo, nazývá *reciproká* a lze ji zjednodušit takto: Jsou-li $\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \alpha_2, \bar{\alpha}_2, \ldots, \alpha_s, \bar{\alpha}_s$ kořeny (2), takže $\alpha_i\bar{\alpha}_i = 1$, platí

$$g(y) \equiv b_0(y^2 - (\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)\,y + \alpha_1\bar{\alpha}_1)(y^2 - (\alpha_2 + \bar{\alpha}_2)\,y + \alpha_2\bar{\alpha}_2)\ldots$$
$$\ldots(y^2 - (\alpha_s + \bar{\alpha}_s)\,y + \alpha_s\bar{\alpha}_s)$$

čili, označíme-li pro $i = 1, \ldots, s$

$$\alpha_i + \bar{\alpha}_i = \sigma_i\,, \tag{5}$$

$$g(y) \equiv b_0\prod_{i=1}^{s}(y^2 - \sigma_iy + 1)\,.$$

Odtud

$$\frac{1}{y^s}\,g(y) \equiv b_0(z - \sigma_1)(z - \sigma_2)\ldots(z - \sigma_s)\,, \tag{6}$$

kde jsme položili

$$y + \frac{1}{y} = z\,. \tag{7}$$

Avšak pravou stranu (6) lze snadno sestrojit: je totiž

$$\frac{1}{y^s}\,g(y) = b_0\left(y^s + \frac{1}{y^s}\right) + b_1\left(y^{s-1} + \frac{1}{y^{s-1}}\right) + \ldots + b_{s-1}\left(y + \frac{1}{y}\right) + b_s$$

a postupným umocňováním (7) na druhou, třetí, až na s-tou lze členy $y^k + \frac{1}{y^k}$ snadno vyjádřit jako polynomy v z (příslušné vzorce pro několik prvních členů jsou uvedeny v odst. 4).

Tím dostaneme z $\frac{1}{y^s} g(y)$ polynom $u(z)$, který má stupeň rovný s [t. j. poloviční vzhledem k stupni $g(y)$] a který má kořeny vesměs reálné [podle (5) a (6) rovné σ_i] v intervalu $(-2, 2)$. Rozřešíme-li $u(z) = 0$, pak ke každému kořenu σ (tyto kořeny ovšem nemusí být navzájem různé) dostaneme řešením rovnice

$$y^2 - \sigma y + 1 = 0 \tag{8}$$

dva komplexně sdružené kořeny rovnice $g(y) = 0$. Kořeny $f(x) = 0$ se pak získají znásobením kořenů y číslem r.

Tím lze převést řešení rovnice $f(x) = 0$ (nehledíme-li na odstranění kořenů reálných) na řešení rovnice polovičního stupně s vesměs reálnými kořeny a na řešení kvadratických rovnic.

3. V tomto odstavci se budeme zabývat rovnicemi, které podmínku, aby všechny jejich kořeny měly stejnou absolutní hodnotu, nesplňují *přesně*, ale jen *přibližně*. Budeme jako v předešlém odstavci předpokládat, že jsme už odstranili kořeny, které jsou reálné anebo přibližně reálné.

Nechť je tedy dána algebraická rovnice $2s$-tého stupně $(s > 1)$

$$f(x) = a_0 x^{2s} + a_1 x^{2s-1} + \ldots + a_{2s} = 0 \tag{9}$$

o reálných koeficientech a_i $(a_0 \neq 0)$, která má vesměs jen komplexní kořeny, v absolutní hodnotě přibližně rovné $r > 0$. Podrobněji nechť existuje malé $\varepsilon > 0$ (prakticky $\varepsilon < 0{,}1$) tak, že pro všechny kořeny ξ rovnice $f(x) = 0$ platí

$$r(1 - \varepsilon) < |\xi| < r(1 + \varepsilon)\,. \tag{10}$$

Předně vhodné číslo r snadno najdeme z faktu, že číslo a_{2s}/a_0 je rovno součinu všech kořenů (9), t. j. můžeme položit

$$\frac{a_{2s}}{a_0} = r^{2s}\,,$$

$$r = \sqrt[2s]{\frac{a_{2s}}{a_0}}\,. \tag{11}$$

Jako v odst. 2 zavedeme substituci

$$x = ry\,, \tag{12}$$

kterou $f(x) = 0$ přejde v

$$g(y) = b_0 y^{2s} + b_1 y^{2s-1} + \ldots + b_{2s} = 0\,. \tag{13}$$

Zde je vzhledem k (11) a (12)

$$b_0 = b_{2s}\,. \tag{14}$$

Rovnice (13) má opět vesměs komplexní kořeny $\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \alpha_2, \bar{\alpha}_2, \ldots, \alpha_s, \bar{\alpha}_s$, které podle (10) a (12) splňují nerovnosti

$$1 - \varepsilon < |\alpha_i| < 1 + \varepsilon\,. \tag{15}$$

Odtud $1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 < \alpha_i\bar{\alpha}_i < 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2$; je-li ε dost malé, můžeme považovat ε^2 za přibližně rovné nule. Označíme-li tedy

$$\alpha_i\bar{\alpha}_i = 1 + 2\varepsilon_i\,, \tag{16}$$

je pak

$$|\varepsilon_i| < \varepsilon \tag{17}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, s$.

Definujme ještě reálná čísla σ_i, $i = 1, 2, \ldots, s$ vztahy

$$\sigma_i = \frac{\alpha_i + \bar{\alpha}_i}{1 + \varepsilon_i}\,, \tag{18}$$

takže

$$\alpha_i + \bar{\alpha}_i = (1 + \varepsilon_i)\,\sigma_i\,. \tag{19}$$

Nyní můžeme psát

$$\begin{aligned} g(y) &= b_0 \prod_{i=1}^{s} (y^2 - (\alpha_i + \bar{\alpha}_i)\,y + \alpha_i\bar{\alpha}_i) = \\ &= b_0 \prod_{i=1}^{s} (y^2 - (1 + \varepsilon_i)\,\sigma_i y + 1 + 2\varepsilon_i) = \\ &= b_0 \prod_{i=1}^{s} [y^2 - \sigma_i y + 1 - \varepsilon_i(\sigma_i y - 2)]\,. \end{aligned} \tag{20}$$

Naším úkolem bude, za jistých předpokladů najít přibližně čísla σ_i a ε_i; tím budeme schopni (přibližně) řešit rovnici $g(y) = 0$ (a $f(x) = 0$), neboť pak stačí řešit kvadratické rovnice

$$y^2 - (1 + \varepsilon_i)\,\sigma_i y + 1 + 2\varepsilon_i = 0\,. \tag{21}$$

První předpoklad, který učiníme, je, že platí

$$\varepsilon_i\varepsilon_j \doteq 0 \tag{22}$$

s dostatečnou přesností. To je ospravedlněno nerovností (17), je-li ε dostatečně malé. Musíme se ovšem smířit s tím, že naše další rovnice nebudou přesné, nýbrž jen přibližné (s nepřesností „řádu“ ε^2). Budeme proto místo $=$ psát $\doteq$.

Ze vztahů (14) a (16) platí

$$\prod_{i=1}^{s} (1 + 2\varepsilon_i) = 1\,; \tag{23}$$

Vynásobením na levé straně vzhledem k (22) dostáváme

$$\sum_{i=1}^{s} \varepsilon_i \doteq 0\,. \tag{24}$$

Odtud plyne také přibližná rovnost, kterou budeme potřebovat:

$$\prod_{i=1}^{s} (1 - 2\varepsilon_i) \doteq 0\,. \tag{25}$$

Z rovnice (20) dostaneme další identitu

$$y^{2s} g\left(\frac{1}{y}\right) \equiv b_0 \prod_{i=1}^{s} [(1 + 2\varepsilon_i)\, y^2 - (1 + \varepsilon_i)\, \sigma_i y + 1]\,,$$

z níž vynásobením i-tého členu číslem $1 - 2\varepsilon_i$ plyne vzhledem k (25) a (22) přibližná rovnost

$$y^{2s} g\left(\frac{1}{y}\right) \doteq b_0 \prod_{i=1}^{s} [y^2 - (1 - \varepsilon_i)\, \sigma_i y + 1 - 2\varepsilon_i] \equiv$$

$$\equiv b_0 \prod_{i=1}^{s} [y^2 - \sigma_i y + 1 + \varepsilon_i(\sigma_i y - 2)]\,. \tag{26}$$

Sečtením (20) a (26) máme přibližně

$$g(y) + y^{2s} g\left(\frac{1}{y}\right) \doteq b_0 \prod_{i=1}^{s} [y^2 - \sigma_i y + 1 - \varepsilon_i(\sigma_i y - 2)] +$$

$$+ b_0 \prod_{i=1}^{s} [y^2 - \sigma_i y + 1 + \varepsilon_i(\sigma_i y - 2)]\,.$$

Vzhledem k tomu, že výraz vpravo se nezmění, zaměníme-li současně všechna ε_i čísly $- \varepsilon_i$, neobsahuje tento výraz lineární členy v ε_i a podle (22) nezávisí na ε_i vůbec. Platí tedy

$$g(y) + y^{2s} g\left(\frac{1}{y}\right) \doteq 2b_0 \prod_{i=1}^{s} (y^2 - \sigma_i y + 1)\,,$$

čili jako v odst. 2 pro

$$y + \frac{1}{y} = z\,,$$

$$\frac{1}{y^s}\, g(y) + y^s g\left(\frac{1}{y}\right) \doteq 2b_0 \prod_{i=1}^{s} (z - \sigma_i)\,. \tag{27}$$

Přitom levou stranu v (27) lze skutečně vyjádřit jako polynom v z, neboť $g(y) + y^{2s} g\left(\frac{1}{y}\right)$ je polynom reciproký [splňuje podmínku (4)]. Označíme-li tedy po dosazení

$$\frac{1}{y^s}\, g(y) + y^s g\left(\frac{1}{y}\right) = u(z)\,, \tag{28}$$

jsou čísla $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ přibližně rovna kořenům $z_1, \ldots, z_s$ rovnice s-tého stupně

$$u(z) = 0: \tag{29}$$

$$\sigma_i \doteq z_i\,, \tag{30}$$

které jsou vesměs reálné[1]) za předpokladu, že kořeny α_i nejsou příliš blízko

[1]) Nebo skoro reálné, t. j. s malou imaginární částí. O tomto případě se zmíníme na konci odstavce.

u $+1$ nebo -1. Tím je umožněno najít přibližně čísla $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ řešením rovnice polovičního stupně, která má vesměs reálné kořeny.

Abychom mohli najít čísla ε_i, učiníme další předpoklad, že kořeny $z_1, \ldots, z_s$ rovnice (29) jsou „dostatečně různé" asi v tom smyslu, že se liší navzájem vesměs víc než řádově o ε. Potom budou i čísla $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ navzájem různá.

Sestrojme nyní polynom $h(y) \equiv g(y) - y^{2s} g\left(\frac{1}{y}\right)$. Vzhledem k (14) je $h(0) = 0$, dále $h(1) = h(-1) = 0$. Je tedy polynom $h(y)$ dělitelný $y(y^2 - 1)$ a existuje tedy polynom $k(y)$, pro který

$$g(y) - y^{2s} g\left(\frac{1}{y}\right) \equiv y(y^2 - 1)\, k(y)\,. \tag{31}$$

Polynom $k(y)$ je stupně nejvýše $2(s-2)$ a je reciproký: je totiž

$$\left[\frac{1}{y}\left(\frac{1}{y^2} - 1\right)\right] y^{2s-4} k\left(\frac{1}{y}\right) \equiv y^{2s-4} g\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{1}{y^4}\, g(y) \equiv$$

$$\equiv -\frac{1}{y^4}\left[g(y) - y^{2s} g\left(\frac{1}{y}\right)\right] \equiv \left[\frac{1}{y}\left(\frac{1}{y^2} - 1\right)\right] k(y)\,,$$

tedy

$$y^{2s-4}\, k\left(\frac{1}{y}\right) \equiv k(y)\,.$$

Lze proto vyjádřit pomocí substituce (7) $\frac{1}{y^{s-2}}\, k(y)$ jako polynom v z:

$$\frac{1}{y^{s-2}}\, k(y) = v(z)\,. \tag{32}$$

Z rovnic (20) a (26) dostáváme po dosazení do (30) přibližné rovnosti

$$\frac{1}{y^s}\, g(y) - y^s g\left(\frac{1}{y}\right) \equiv \left(y - \frac{1}{y}\right) \frac{1}{y^{s-2}}\, k(y) \doteqdot \tag{33}$$

$$\doteqdot b_0 \prod_{i=1}^{s} \left[y + \frac{1}{y} - \sigma_i - \varepsilon_i\left(\sigma_i - \frac{2}{y}\right)\right] - b_0 \prod_{i=1}^{s} \left[y + \frac{1}{y} - \sigma_i + \varepsilon_i\left(\sigma_i - \frac{2}{y}\right)\right].$$

Zvolme index i (z $i = 1, \ldots, s$) a dosaďme sem za y takové komplexní β_i, že

$$\beta_i + \frac{1}{\beta_i} = \sigma_i\,.$$

Dostaneme vzhledem k (32) a (22)

$$\left(\beta_i - \frac{1}{\beta_i}\right) v(\sigma_i) \doteq -b_0\varepsilon_i\left(\sigma_i - \frac{2}{\beta_i}\right)\left\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s}\left[\sigma_i - \sigma_j - \varepsilon_j\left(\sigma_j - \frac{2}{\beta_j}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s}\left[\sigma_i - \sigma_j + \varepsilon_j\left(\sigma_j - \frac{2}{\beta_j}\right)\right]\right\} \doteq -2b_0\varepsilon_i\left(\sigma_i - \frac{2}{\beta_i}\right)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s}(\sigma_i - \sigma_j) =$$

$$= -2b_0\varepsilon_i\left(\beta_i - \frac{1}{\beta_i}\right)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s}(\sigma_i - \sigma_j)\,.$$

Protože $\beta_i - \frac{1}{\beta_i}$ je dostatečně různé od nuly [jinak by $\sigma_i \doteq \pm 1$ a z (28) by $g(1)$ nebo $g(-1)$ bylo přibližně rovno nule proti předpokladu], plyne odtud

$$v(\sigma_i) \doteq -2\varepsilon_i b_0 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s} (\sigma_i - \sigma_j) .$$

Protože však $\sigma_i \doteq z_i$, kde z_i jsou dostatečně jednoduché kořeny rovnice (29), je také

$$v(z_i) \doteq -2\varepsilon_i b_0 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s} (z_i - z_j) . \tag{34}$$

Platí

$$u(z) = 2b_0 \prod_{i=1}^{s} (z - z_i) ;$$

odtud derivováním

$$u'(z) = 2b_0 \sum_{i=1}^{s} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s} (z - z_j) ,$$

takže po dosazení $z = z_i$ platí

$$u'(z_i) = 2b_0 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s} (z_i - z_j) .$$

Je tedy z (34) přibližně (vzhledem k dostatečné jednoduchosti z_i)

$$\varepsilon_i \doteq -\frac{v(z_i)}{u'(z_i)} . \tag{35}$$

Tím jsou nalezena přibližně i čísla ε_i. Přitom součet pravých stran má být vzhledem k (24) přibližně roven nule. Platí však, že tento součet je roven nule přesně:

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{v(z_i)}{u'(z_i)} = 0 . \tag{36}$$

Označme totiž pro $k = 1, \ldots, s$ na okamžik

$$u_k(z) \equiv \frac{u(z)}{z - z_k} ,$$

takže $u_k(z)$ jsou polynomy stupně $s - 1$ s koeficientem u nejvyšší mocniny z^{s-1} rovným $2b_0$. Každý polynom $v(z)$ nejvýše $(s - 1)$-ho stupně lze podle Lagrangeova interpolačního vzorce[2]) vyjádřit ve tvaru

$$v(z) \equiv \sum_{i=1}^{s} \frac{v(z_i)}{u'(z_i)} u_i(z) . \tag{37}$$

---

[2]) Viz na př. LÁSKA-HRUŠKA: Theorie a prakse numerického počítání, Praha 1934, str. 124.

Nyní v (31) je $k(y)$ stupně nejvýše $2(s - 2)$, takže $v(z)$ podle (32) je stupně nejvýše $s - 2$. To znamená, že vyjádříme-li $v(z)$ vzorcem (37), je koeficient u z^{s-1} na pravé straně, který je roven

$$2b_0 \sum_{i=1}^{s} \frac{v(z_i)}{u'(z_i)},$$

roven nule; tím je vztah (36) dokázán.

Závěrem tohoto odstavce je vhodné upozornit na to, že není nutné předpokládat od začátku, že rovnice $f(x) = 0$ [resp. $g(y) = 0$] nemá už reálné kořeny nebo kořeny o malé imaginární části. Stačí, aby: (1) stupeň $f(x)$ byl sudý a (2), aby absolutní člen u $f(x)$ měl stejné znaménko jako koeficient u nejvyšší mocniny x. Tím se už zajistí, že rovnice $f(x) = 0$ nemá lichý počet kořenů u $+r$, ani u $-r$, t. j. lze pak $g(y)$ opět rozložit ve kvadratické faktory jako v (20) při malých ε_i. Vzorec (35) platí pak i v tomto případě. Důkaz plyne snadno odtud, že místo dosazení β_i za y do rovnice (33) se v identitě (33) nejprve dělí obě strany výrazem $y - \frac{1}{y}$ a teprve pak dosazuje za y číslo β_i, případně rovné ± 1.

Dále se někdy může stát, že rovnice (29) má některé kořeny imaginární (s malou imaginární částí). V tomto případě má rovnice $g(y) = 0$ čtyři kořeny v blízkosti čísel tvaru $re^{i\varphi}$, $re^{-i\varphi}$, $\frac{1}{r}e^{i\varphi}$, $\frac{1}{r}e^{-i\varphi}$, kde $r \doteq 1$. Lze pak postupovat jako dříve, t. j. můžeme vypočíst ještě ε_i (zde imaginární) a dosadit do (21). Vyžaduje to však řešení rovnice (29) s velkou přesností, neboť příslušné kořeny z_i jsou velmi blízké, a dále řešení kvadratické rovnice (21) s komplexními koeficienty.

4. V tomto odstavci shrneme výsledky předchozího odstavce v návod, jak řešit rovnice uvedeného typu. Předně poznamenáváme, že v praxi nebudeme pracně zjišťovat, zda nějaká rovnice je tohoto typu. Naopak, při řešení rovnice nějakou methodou, nejčastěji Graeffeho nebo Bernoulli-Whittakerovou, se to právě automaticky ukáže.

Je-li tedy dána rovnice tvaru (1), o níž víme, že absolutní hodnoty kořenů se navzájem příliš neliší, postupujeme nejvhodněji takto:

Podle toho, je-li n sudé nebo liché a podle znamének u a_0 a a_n zjistíme, je-li v okolí $+r$ a $-r$ $\left(\text{zde } r = \sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{a_0}\right|}\right)$ lichý počet kořenů (tedy alespoň jeden): je-li n liché a znaménka a_0 a a_n stejná, je v okolí $-r$ lichý počet kořenů; je-li n sudé a znaménka a_0 a a_n opačná, je jak v okolí $+r$, tak v okolí $-r$ lichý počet kořenů. Odstraněním alespoň jednoho reálného kořene z okolí $+r$, případně $-r$, případně $+r$ i $-r$,[3]) se každý z uvedených případů převede na zbylý případ, kdy

1. *n je sudé,*

2. *znaménka u a_0 a a_n jsou stejná.*

Budeme se tedy už zabývat jen tímto případem, t. j. budeme předpokládat, že $f(x)$ má tvar (9) s $a_0 a_{2s} > 0$ a $s > 1$:

$$f(x) \equiv a_0 x^{2s} + a_1 x^{2s-1} + \ldots + a_{2s} = 0 \,, \tag{9'}$$

$$a_0 a_{2s} > 0 \,.$$

Substitucí $x = ry$ pro $r = \sqrt[2s]{\dfrac{a_{2s}}{a_0}}$ se $f(x) = 0$ převede v

$$g(y) \equiv f(ry) \equiv b_0 y^{2s} + b_1 y^{2s-1} + \ldots + b_{2s} = 0 \,, \tag{13'}$$

kde $b_0 = b_{2s}$ a dále přibližně $b_1 \doteq b_{2s-1}$, $b_2 \doteq b_{2s-2}$, ..., $b_{s-1} \doteq b_{s+1}$ (to je zároveň kontrola, zda daná rovnice má skutečně kořeny o skoro stejné absolutní hodnotě). Zde je většinou výhodné dělit všechny koeficienty číslem b_0 a považovat teprve takto vzniklý polynom za $g(y)$.

Nyní sestrojíme výraz

$$\begin{aligned} &\frac{1}{y^s}\, g(y) + y^s g\left(\frac{1}{y}\right) \equiv \\ &\equiv (b_0 + b_{2s})\left(y^s + \frac{1}{y^s}\right) + (b_1 + b_{2s-1})\left(y^{s-1} + \frac{1}{y^{s-1}}\right) + \\ &\quad + \ldots + (b_{s-1} + b_{s+1})\left(y + \frac{1}{y}\right) + 2b_s \,, \end{aligned} \tag{38}$$

který pomocí substituce

$$y + \frac{1}{y} = z \tag{7'}$$

převedeme na polynom $u(z)$. K rychlému převádění zde uvádíme tabulku, která se snadno odvodí postupným umocňováním $\left(y + \dfrac{1}{y}\right)^k = z^k$:

$$\begin{aligned} y + \frac{1}{y} &= z \,, \\ y^2 + \frac{1}{y^2} &= z^2 - 2 \,, \\ y^3 + \frac{1}{y^3} &= z^3 - 3z \,, \end{aligned} \tag{39}$$

[3]) To se provede výpočtem kořene α a dělením $f(x)$ polynomem $x - \alpha$.

$$y^4 + \frac{1}{y^4} = z^4 - 4z^2 + 2\,,$$
$$y^5 + \frac{1}{y^5} = z^5 - 5z^3 + 5z\,, \tag{39}$$
$$y^6 + \frac{1}{y^6} = z^6 - 6z^4 + 9z^2 - 2\,.$$

S touto tabulkou vystačíme pro rovnice do 12. stupně.

Získanou rovnici $u(z) = 0$ řešíme některou ze známých method asi s takovou relativní přesností (raději větší), s jakou chceme řešit rovnici $f(x) = 0$.

Jsou-li všechny kořeny $u(z) = 0$ různé a reálné, pak pokračujeme takto: Vyjádříme výraz

$$\frac{1}{y^s}\,g(y) - y^s g\left(\frac{1}{y}\right) = (b_1 - b_{2s-1})\left(y^{s-1} - \frac{1}{y^{s-1}}\right) + \\ + (b_2 - b_{2s-2})\left(y^{s-2} + \frac{1}{y^{s-2}}\right) + \ldots + (b_{s-1} - b_{s+1})\left(y - \frac{1}{y}\right) \tag{40}$$

jako součin $y - \frac{1}{y}$ a polynomu $v(z)$, kde opět $z = y + \frac{1}{y}$. Uvedeme zde opět tabulku k rychlému převádění:

$$y^2 - \frac{1}{y^2} = \left(y - \frac{1}{y}\right) z\,,$$
$$y^3 - \frac{1}{y^3} = \left(y - \frac{1}{y}\right)(z^2 - 1)\,,$$
$$y^4 - \frac{1}{y^4} = \left(y - \frac{1}{y}\right)(z^3 - 2z)\,, \tag{41}$$
$$y^5 - \frac{1}{y^5} = \left(y - \frac{1}{y}\right)(z^4 - 3z^2 + 1)\,,$$

s kterou rovněž vystačíme pro rovnice do 12. stupně.

Vypočteme ještě derivaci $u'(z)$ a ke každému kořenu z_i rovnice $u(z) = 0$ vypočteme číslo

$$\varepsilon_i = -\frac{v(z_i)}{u'(z_i)}\,.$$

Za kontrolu správnosti nám může sloužit, že součet

$$\sum_{i=1}^{s} \varepsilon_i = 0\,.$$

Řešením kvadratických rovnic

$$x^2 - (1 + \varepsilon_i)\, z_i r x + (1 + 2\varepsilon_i)\, r^2 = 0 \tag{42}$$

dostaneme pak přibližné hodnoty kořenů $f(x) = 0$.

Pokud se týče přesnosti, s jakou kořeny rovnic (42) aproximují kořeny $f(x) = 0$, lze říci asi toto:

Řešíme-li jen rovnice

$$x^2 - z_i rx + r^2 = 0 , \tag{43}$$

pak tyto kořeny leží u příslušných kořenů $f(x) = 0$ ve vzdálenosti nejvýše εr. Kořeny rovnic (42) leží u příslušných kořenů již ve vzdálenostech řádu $\varepsilon^2 r$.

Jestliže tedy rovnice $u(z) = 0$ má některé kořeny vícenásobné, je možné užít jen rovnic (43) místo (42) a hledat kořeny $f(x) = 0$ v blízkosti kořenů (43). Hledání vícenásobných kořenů nebo kořenů navzájem velmi blízkých však překračuje rámec tohoto článku.

O výpočtu kořenů v tomto případě, jakož i o odhadu chyby a o zpřesnění hodnot kořenů, kterého je někdy třeba pro dokončení řešení i u této methody, bude pojednáno v souborném článku „O numerickém řešení algebraických rovnic", který vyjde v tomto časopise v některém z dalších čísel.

Závěrem tohoto odstavce upozorníme ještě na jednu modifikaci tohoto postupu, která je výhodná při rovnicích malých stupňů.

Při této modifikaci neprovádíme do rovnice (9') substituci $x = ry$, ale najdeme jen číslo (místo r)

$$q = \sqrt[s]{\frac{a_{2s}}{a_0}} .$$

Pro $f(x)$ ve tvaru (9') najdeme takový polynom s-tého stupně $U(t)$, že

$$\frac{1}{x^s} f(x) + \frac{a_0}{a_{2s}} x^s f\left(\frac{1}{x}\right) = U(t) ,$$

kde

$$t = x + \frac{q}{x} .$$

Je totiž

$$\frac{1}{x^s} f(x) + \frac{a_0}{a_{2s}} x^s f\left(\frac{1}{x}\right) = 2a_0\left(x^s + \frac{q^s}{x^s}\right) + \left(a_1 + \frac{a_{2s-1}}{q^{s-1}}\right)\left(x^{s-1} + \frac{q^{s-1}}{x^{s-1}}\right) +$$
$$+ \ldots + \left(a_{s-1} + \frac{a_{s+1}}{q}\right)\left(x + \frac{q}{x}\right) + 2a_s ,$$

a přitom platí obdobné vzorce jako (39):

$$\begin{aligned} x + \frac{q}{x} &= t , \\ x^2 + \frac{q^2}{x^2} &= t - 2q , \\ x^3 + \frac{q^3}{x^3} &= t^3 - 3qt \quad \text{atd.} \end{aligned} \tag{44}$$

Dále najdeme takový polynom $V(t)$, že

$$\frac{1}{x^s} f(x) - \frac{a_0}{a_{2s}} x^s f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(x - \frac{q}{x}\right) V(t) .$$

Platí totiž

$$\frac{1}{x^s} f(x) - \frac{a_0}{a_{2s}} x^s f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(a_1 - \frac{a_{2s-1}}{q^{s-1}}\right)\left(x^{s-1} - \frac{q^{s-1}}{x^{s-1}}\right) +$$

$$+ \ldots + \left(a_2 - \frac{a_{2s-2}}{q^{s-2}}\right)\left(x^{s-2} - \frac{q^{s-2}}{x^{s-2}}\right) + \ldots + \left(a_{s-1} - \frac{a_{s+1}}{q}\right)\left(x - \frac{q}{x}\right),$$

a přitom

$$x^2 - \frac{q^2}{x^2} = \left(x - \frac{q}{x}\right) t ,$$

$$x^3 - \frac{q^3}{x^3} = \left(x - \frac{q}{x}\right) (t^2 - q) , \quad \text{atd.}$$

Stejně jako dříve platí, že jsou-li $t_1, t_2, \ldots, t_s$ kořeny rovnice $U(t) = 0$, pak kořeny rovnic

$$x^2 - t_i x + q = 0$$

aproximují kořeny rovnice $f(x) = 0$ s přesností εr. Jsou-li $t_1, \ldots, t_s$ vesměs navzájem různé, pak pro

$$\varepsilon_i = - \frac{V(t_i)}{U'(t_i)} \text{ [4]}$$

kořeny rovnic

$$x^2 - (1 + \varepsilon_i) t_i x + (1 + 2\varepsilon_i) q = 0$$

aproximují kořeny $f(x) = 0$ s přesností řádu $\varepsilon^2 r$. Přitom za ε lze považovat číslo

$$\varepsilon = \max_{i=1,\ldots,s} |\varepsilon_i| .$$

Při této modifikaci je počet násobení nebo dělení pro malá s ($s = 2$ nebo $s = 3$) menší. Speciálně pro $s = 2$ je

$$U(t) \equiv 2a_0 t^2 + \left(a_1 + \frac{a_3}{q}\right) t + 2a_2 - 4a_0 q ,$$

$$V(t) \equiv a_1 - \frac{a_3}{q} .$$

Kontrolou toho, že $f(x) = 0$ má skutečně kořeny o skoro stejné absolutní hodnotě, je, že

1. polynom $V(t)$ má malé koeficienty (řádu εr),
2. rovnice $U(t) = 0$ má kořeny vesměs reálné (případně skoro reálné) a v intervalu $\langle -2, 2\rangle$ (nebo blízko něho).

---

[4]) Zde opět $\sum_{i=1}^{s} \varepsilon_i = 0$.

Přitom podmínky 1. a 2. jsou i postačující, aby rovnice $f(x) = 0$ měla kořeny uvedené vlastnosti.

5. V tomto odstavci uvedeme několik příkladů.

Příklad 1. Je dána rovnice

$$f(x) \equiv x^4 - 1{,}006x^3 + 2{,}046368x^2 - 1{,}54536x + 2{,}3256 = 0\,,$$

o níž víme, že splňuje předpoklady naší methody. Je pak

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[4]{2{,}3256} = 1{,}23491\,, \\ r^2 &= 1{,}52500\,, \\ r^3 &= 1{,}88322\,. \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} f(ry) \equiv 2{,}3256y^4 &- 1{,}006\,.\,1{,}88322y^3 + 2{,}046368\,.\,1{,}52500y^2 - \\ &- 1{,}54536\,.\,1{,}23491y + 2{,}3256\,; \end{aligned}$$

po provedení násobení a dělení všech koeficientů číslem 2,3256 je

$$g(y) \equiv y^4 - 0{,}814637y^3 + 1{,}341895y^2 - 0{,}820594y + 1\,.$$

Potom

$$\frac{1}{y^2}\,g(y) + y^2 g\left(\frac{1}{y}\right) \equiv 2\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) - 1{,}635231\left(y + \frac{1}{y}\right) + 2{,}68379;$$

podle tabulky (39) je tedy

$$u(z) \equiv 2z^2 - 1{,}635231z - 1{,}31621\,.$$

Kořeny $u(z) = 0$ jsou

$$z_{1,2} = 0{,}408808 \pm 0{,}908421 \quad \text{čili} \quad z_1 = 1{,}317229,\ z_2 = -0{,}499613\,.$$

Dále

$$\frac{1}{y^2}\,g(y) - y^2 g\left(\frac{1}{y}\right) \equiv \left(y - \frac{1}{y}\right).\,0{,}005957\,,$$

takže

$$v(z) \equiv 0{,}005957\,.$$

Poněvadž $u'(z_1) = -u'(z_2) = 3{,}6337$, je

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = -\frac{0{,}005957}{3{,}6337} = -0{,}00164\,.$$

Podle rovnice (42) jsou kořeny rovnice $f(x) = 0$ přibližně rovny kořenům rovnic

$$\begin{aligned} x^2 - 1{,}62399x + 1{,}51999 &= 0\,, \\ x^2 + 0{,}61799x + 1{,}53000 &= 0\,, \end{aligned}$$

jejichž řešení lze už snadno najít.

Pro srovnání uvádíme, že přesné kořeny $f(x) = 0$ vyhovují kvadratickým rovnicím (s přesnými koeficienty)

$$x^2 - 1{,}624x + 1{,}52 = 0\,,$$
$$x^2 + 0{,}618x + 1{,}53 = 0\,.$$

Příklad 2.

$$f(x) \equiv x^6 - 2{,}872x^5 - 1{,}60384x^4 + 0{,}850824x^3 + 5{,}9181824x^4 - - 41{,}50194x + 55{,}30596 = 0\,.$$

Zde

$$r = \sqrt[6]{55{,}30596} = 1{,}95192\,,$$
$$r^2 = 3{,}80999\,,$$
$$r^3 = 7{,}43680\,,$$
$$r^4 = 14{,}51603\,,$$
$$r^5 = 28{,}33414\,.$$

$$f(ry) \equiv 55{,}30596y^6 - 81{,}37565y^5 + 23{,}28139y^4 + 6{,}327408y^3 + + 22{,}548216y^2 - 81{,}008467y + 55{,}30596\,;$$

po dělení 55,30596 je

$$g(y) \equiv y^6 - 1{,}471372y^5 - 0{,}420956y^4 + 0{,}114407y^3 + 0{,}407700y^2 - - 1{,}464733y + 1\,;$$

$$\frac{1}{y^3}\,g(y) + y^3g\left(\frac{1}{y}\right) \equiv 2\left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right) - 2{,}936105\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + + 0{,}828656\left(y + \frac{1}{y}\right) + 0{,}228814\,,$$

$$u(z) \equiv 2z^3 - 2{,}936105z^2 - 5{,}171344z + 6{,}101024\,.$$

Je vidět, že rovnice $u(z) = 0$ má dva kořeny v okolí $1+$ a $+2$; Newtonovou methodou (nebo transformací $\tilde{y} = y - 1$ resp. $\tilde{y} = y - 2$) vypočteme

$$z_1 = 0{,}998727\,,$$
$$z_2 = 1{,}998031\,.$$

Třetí kořen je (ze známého součtu)

$$z_3 = -1{,}528705\,.$$

Dále

$$\frac{1}{y^3}\,g(y) - y^3g\left(\frac{1}{y}\right) \equiv -0{,}006639\left(y^2 - \frac{1}{y^2}\right) + 0{,}013256\left(y - \frac{1}{y}\right),$$

takže

$$v(z) \equiv -0{,}006639z + 0{,}013256\,.$$

Poněvadž

$$u'(z_1) = -5{,}051345\,,$$
$$u'(z_2) = 7{,}048566\,,$$
$$u'(z_3) = 17{,}82717\,,$$

je

$$\varepsilon_1 = 0{,}0013115\,,$$
$$\varepsilon_2 = 0{,}0000013\,,$$
$$\varepsilon_3 = -0{,}0013129\,.$$

Součet $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = -0{,}0000001 \doteq 0$.

Dosazením do (42) jsou kořeny $f(x) = 0$ přibližně rovny kořenům rovnic

$$x^2 - 1{,}951992x + 3{,}819984 = 0\,,$$
$$x^2 - 3{,}900002x + 3{,}810000 = 0\,,$$
$$x^2 + 2{,}979992x + 3{,}799986 = 0\,,$$

zatím co přesné kořeny vyhovují rovnicím s přesnými koeficienty

$$x^2 - 1{,}952x + 3{,}82 = 0\,,$$
$$x^2 - 3{,}9x + 3{,}81 = 0\,,$$
$$x^2 + 2{,}98x + 3{,}8 = 0\,.$$

Přitom druhá rovnice má kořeny

$$1{,}95 \pm 0{,}0866i\,,$$

které jsou dosti blízko $+ r$.

Příklad 3.[5])

$$f(x) \equiv x^4 - 1{,}73x^3 + 2{,}129x^2 - 3{,}684x + 4{,}452 = 0\,.$$

Zde

$$q = \sqrt{4{,}452} = 2{,}1100\,, \quad \frac{a_3}{q} = -\frac{3{,}684}{2{,}11} = -1{,}74600\,.$$

Podle (46)

$$U(t) \equiv 2t^2 - 3{,}47600t - 4{,}1820\,,$$

takže

$$t_{1,2} = 0{,}86900 \pm 1{,}68705\,,$$
$$t_1 = 2{,}55605\,,$$
$$t_2 = -0{,}81805\,.$$

Dále $V(t) = -1{,}73 + 1{,}74600 = 0{,}01600$ a vzhledem k $U'(t_1) = -U'(t_2) = 6{,}7482$

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = -\frac{0{,}016}{6{,}7482} = -0{,}002387\,.$$

Kořeny rovnice $f(x) = 0$ jsou tedy přibližně rovny kořenům rovnic

$$x^2 + 0{,}81999x + 2{,}12000 = 0\,,$$
$$x^2 - 2{,}54999x + 2{,}10000 = 0\,;$$

[5]) V příkladě 3 a 4 užíváme modifikace, uvedené na konci odst. 4.

přitom přesné kořeny vyhovují rovnicím s přesnými koeficienty

$$x^2 + 0{,}82x + 2{,}12 = 0\,,$$
$$x^2 - 2{,}55x + 2{,}10 = 0\,.$$

Příklad 4.

$$f(x) \equiv x^4 + 2{,}1x^3 - 0{,}5x^2 + 5{,}4x + 6 = 0\,.$$

Zde

$$q = \sqrt{6} = 2{,}4495\,, \quad \frac{a_3}{q} = 2{,}2046\,,$$

$$U(t) \equiv 2t^2 + 4{,}3046t - 10{,}7980\,.$$

Kořeny $U(t) = 0$ jsou

$$t_{1,2} = -1{,}0762 \pm 2{,}5607\,,$$
$$t_1 = 1{,}4845\,, \quad t_2 = -3{,}6369\,.$$

Poněvadž $V(t) \equiv -0{,}1046$, $U'(t_1) = -U'(t_2) = 10{,}2426$, je

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \frac{0{,}1046}{10{,}2426} = 0{,}01021\,.$$

Odtud kořeny $f(x) = 0$ jsou přibližně rovny kořenům

$$x^2 - 1{,}4997x + 2{,}4995 = 0\,,$$
$$x^2 + 3{,}5998x + 2{,}3995 = 0\,;$$

přesné kořeny vyhovují rovnicím (s přesnými koeficienty)

$$x^2 - 1{,}5x + 2{,}5 = 0\,,$$
$$x^2 + 3{,}6x + 2{,}4 = 0\,.$$

LITERATURA

Láska-Hruška: Theorie a praxe numerického počítání, Praha 1934.

Резюме

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, КОРНИ КОТОРЫХ ПОЧТИ ОДИНАКОВЫ ПО АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНЕ

МИРОСЛАВ ФИДЛЕР (Miroslav Fiedler)

(Поступило в редакцию 8/XI 1955 г.)

В работе предлагается метод решения алгебраического уравнения, о котором заранее известно, что все его корни почти одинаковы по абсолютной величине. Ход решения таков:

Прежде всего мы позаботимся о том, чтобы данное уравнение имело при приблизительной абсолютной величине корней $r > 0$ в окрестности r и $-r$ четное число вещественных корней (воспользовавшись, если нужно, делением). Тогда данное уравнение примет вид

$$f(x) \equiv a_0 x^{2s} + a_1 x^{2s-1} + \ldots + a_{2s} = 0\,, \quad a_0 a_{2s} > 0\,. \tag{1}$$

Для $s > 1$ обозначим $r = \sqrt[2s]{\frac{a_{2s}}{a_0}}$ и произведем подстановку $x = ry$, так что новое уравнение относительно y будет

$$f(ry) \equiv g(y) = 0\,.$$

Пользуясь подстановкой $y + \frac{1}{y} = z$, вычислим многочлены $u(z)$, $v(z)$, для которых

$$\frac{1}{y^s} g(y) + y^s g\left(\frac{1}{y}\right) = u(z)\,,$$

$$\frac{1}{y^s} g(y) - y^s g\left(\frac{1}{y}\right) = \left(y - \frac{1}{y}\right) v(z)\,.$$

Если $u(z) = 0$ (степени s) имеет только простые корни $z_1, z_2, \ldots, z_s$ и если вычислить для $i = 1, 2, \ldots, s$ числа

$$\varepsilon_i = -\frac{v(z_i)}{u'(z_i)}\,,$$

где $u'(z)$ — производная от $u(z)$, то корни $f(x) = 0$ будут приблизительно (с точностью порядка $\varepsilon^2 r$, где $\varepsilon = \max\limits_i |\varepsilon_i|$) равны корням уравнений

$$x^2 - (1 + \varepsilon_i)\, z_i r x + (1 + 2\varepsilon_i)\, r^2 = 0\,.$$

Далее приводится следующее видоизменение этого метода, более удобное для численных расчетов в случае $s = 2$ или $s = 3$:

Для уравнения (1) обозначим $q = \sqrt[s]{\frac{a_{2s}}{a_0}}$. При помощи подстановки $x + \frac{q}{x} = t$ (соответствующие формулы приведены в тексте) вычислим многочлены $U(t)$, $V(t)$, для которых

$$\frac{1}{x^s} f(x) + \frac{a_0}{a_{2s}} x^s f\left(\frac{1}{x}\right) = U(t)\,,$$

$$\frac{1}{x^s} f(x) - \frac{a_0}{a_{2s}} x^s f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(x - \frac{q}{x}\right) V(t)\,.$$

Если все корни $t_1, t_2, \ldots, t_s$ уравнения $U(t) = 0$ простые, то для

$$\varepsilon_i = -\frac{V(t_i)}{U'(t_i)}, \quad i = 1, \ldots, s,$$

корни $f(x) = 0$ будут приблизительно (с точностью порядка $\varepsilon^2 \sqrt{q}$, $\varepsilon = \max_i |\varepsilon_i|$) равны корням уравнений

$$x^2 - (1 + \varepsilon_i) t_i x + (1 + 2\varepsilon_i) q = 0 .$$

В последнем параграфе работы приводятся численные примеры.

Zusammenfassung

NUMERISCHE LÖSUNG ALGEBRAISCHER GLEICHUNGEN MIT SÄMTLICHEN WURZELN VON FAST DEMSELBEN ABSOLUTEN BETRAG

MIROSLAV FIEDLER

(Eingegangen am 8. November 1955.)

Es sei eine algebraische Gleichung $f(x) = 0$ mit reellen Koeffizienten gegeben, von der bekannt ist, dass ihre sämtliche Wurzeln fast denselben absoluten Betrag $r > 0$ besitzen. Man kann voraussetzen, dass $f(x)$ die Form

$$f(x) \equiv a_0 x^{2s} + a_1 x^{2s-1} + \ldots + a_{2s} = 0 \tag{1}$$

mit $a_0 a_{2s} > 0$ hat, denn sonst würde die Gleichung $f(x) = 0$ eine ungerade Anzahl von (reellen) Wurzeln in der Umgebung von $+r$ bzw. $-r$ besitzen. Das kann man aber durch eventuelles Dividieren durch $x - r_1$ bzw. $x + r_2 (r_1 \doteq r, r_2 \doteq r)$ vermeiden.

Für $s > 1$ bezeichnen wir

$$r = \sqrt[2s]{\frac{a_{2s}}{a_0}}$$

und führen den Ansatz $x = ry$ ein, wodurch die neue Gleichung die Form

$$f(ry) \equiv g(y) = 0$$

annimmt.

Es gibt jetzt Polynome $u(z)$ und $v(z)$ derart, dass für

$$y + \frac{1}{y} = z$$

die Gleichheiten

$$\frac{1}{y^s} g(y) + y^s g\left(\frac{1}{y}\right) = u(z) ,$$

$$\frac{1}{y^s} g(y) - y^s g\left(\frac{1}{y}\right) = \left(y - \frac{1}{y}\right) v(z)$$

bestehen.

Im Falle, dass alle Wurzeln $z_1, \ldots, z_s$ der Gleichung $u(z) = 0$ (vom Grade s) einfach sind, können die Zahlen (für $i = 1, \ldots, s$)

$$\varepsilon_i = - \frac{v(z_i)}{u'(z_i)}$$

definiert werden [mit $u'(z)$ wird die Ableitung von $u(z)$ bezeichnet]. Dann sind die Wurzeln von $f(x) = 0$ angenähert gleich (mit der Genauigkeit vom Grade $\varepsilon^2 r$ mit $\varepsilon = \max\limits_i |\varepsilon_i|$) den Wurzeln der Gleichungen

$$x^2 - (1 + \varepsilon_i)\, z_i r x + (1 + 2\varepsilon_i)\, r^2 = 0 .$$

Es wird noch eine für $s = 2$ oder $s = 3$ numerisch vorteilhaftere Modifikation dieses Verfahrens angegeben:

Für die Gleichung (1) bezeichnen wir

$$q = \sqrt[s]{\frac{a_{2s}}{a_0}} .$$

Mittels des Ansatzes

$$x + \frac{q}{x} = t$$

(die zugehörigen Gleichungen sind in (44) gegeben) werden Polynome $U(t)$, $V(t)$ gefunden, für die

$$\frac{1}{x^s} f(x) + \frac{a_0}{a_{2s}} x^s f\left(\frac{1}{x}\right) = U(t) ,$$

$$\frac{1}{x^s} f(x) - \frac{a_0}{a_{2s}} x^s f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(x - \frac{q}{x}\right) V(t)$$

gilt.

Im Falle, dass wieder alle Wurzeln $t_1, \ldots, t_s$ der Gleichung $U(t) = 0$ einfach sind, sind bei der Bezeichnung

$$\varepsilon_i = - \frac{V(t_i)}{U'(t_i)} , \quad i = 1, \ldots, s ,$$

die Wurzeln von $f(x) = 0$ angenähert gleich (mit der Genauigkeit vom Grade $\varepsilon^2 \sqrt{q}$, wo $\varepsilon = \max\limits_i |\varepsilon_i|$ ist) den Wurzeln der Gleichungen

$$x^2 - (1 + \varepsilon_i)\, t_i x + (1 + 2\varepsilon_i)\, q = 0 .$$

Im letzten Abschnitt des Artikels werden numerische Beispiele angegeben.