

Aplikace matematiky

Petr Mandl

Rozložení doby prvního překročení jedné hranice procesem Uhlenbecka

Aplikace matematiky, Vol. 7 (1962), No. 2, 141–148

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102795>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1962

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ROZLOŽENÍ DOBY PRVÉHO PŘEKROČENÍ JEDNÉ HRANICE
 PROCESEM UHLENBECKA

PETR MANDL

(Došlo dne 16. prosince 1960.)

V práci je studováno rozložení pravděpodobnosti doby, kterou potřebuje systém, jehož pohyb je popsán procesem Uhlenbecka k výstupu z intervalu (a, ∞) .

Proces Uhlenbecka, jehož jednorozměrným případem se budeme zabývat, je spojitý náhodový proces Markovova typu. Proces je homogenní v čase. Jeho základní vlastnosti jsou tedy jednoznačně určeny, udáme-li pro každé $t > 0$ a pro každé reálné $x \in (-\infty, \infty)$ hustotu rozložení pravděpodobností po uplynutí doby t za podmínky, že proces nabyl v čase $t = 0$ hodnoty x . Tato hustota je pro Uhlenbeckův proces

$$f^{(t)}(x, y) = [2\pi\sigma^2(1 - \varrho^2(t))]^{-\frac{1}{2}} \exp - \frac{[y - \mu - (x - \mu)\varrho(t)]^2}{2\sigma^2(1 - \varrho^2(t))},$$

kde $\varrho(t) = e^{-\beta t}$, β, σ, μ jsou parametry, $\beta > 0, \sigma > 0$. V dalším budeme klásti $\beta = \sigma = 1, \mu = 0$. Pouze v závěru ukážeme, jak se přejde nazpět k původním parametrům. Když $g(x)$ je hustota počátečního rozložení pravděpodobností, potom hustota rozložení v čase t

$$v(t, y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f^{(t)}(x, y) dx$$

vyhovuje diferenciální rovnici

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} v = \frac{\partial^2}{\partial y^2} v + y \frac{\partial}{\partial y} v + v$$

s počáteční podmínkou $g(y)$. Hustota počátečního rozložení $g(y) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp -\frac{1}{2}y^2$ určuje stacionární proces s korelační funkcí $\exp -|t|$. V tomto případě jsou všechna konečně rozměrná rozložení procesu vícerozměrná normální rozložení.

Uhlenbeckův proces je modelem řady reálných náhodových procesů. U některých procesů je možno vhodnost tohoto modelu vysouditi přímo z vlastností studovaného

jevu. Je to v tom případě, kdy se jedná o náhodný jednorozměrný pohyb systému, na který vedle ryze náhodové složky působí elastická síla, jejíž velikost je úměrná výchylce a má směr opačný. (Takovým systémem je např. torsní zrcátko měřicích přístrojů, viz [3].) Jindy, zejména ve stacionárním případě, je vhodnost Uhlenbeckova modelu dána jeho základními vlastnostmi (normálním rozložením, tvarem korelační funkce), které u reálného procesu můžeme ověřit empiricky.

Budeme se zabývat pravděpodobnostmi, že hodnota procesu neklesne po dobu délky t pod danou hladinu aneb, což je totéž, budeme studovati distribuční funkci $F(t, a)$ doby prvního výstupu z intervalu (a, ∞) . Ze symetrie procesu vidíme, že tím bude také vyšetřena doba prvního překročení hranice $-a$.

Znalost takových pravděpodobností může být užitečnou v řadě konkrétních úloh. Nechť na příklad okamžité zatížení nějaké soustavy je nahodilé a je uspokojivým způsobem popsáno Uhlenbeckovým procesem. Překročení zatížení přes určitou hranici nechť znamená poškození soustavy. Rozložení doby prvního překročení je tedy rozložením doby, po kterou soustava je bez poruchy. V tomto případě parametrem procesu je skutečný čas.

V poslední době byl dr. J. HÁJKEM Uhlenbeckův proces doporučen jako model rozložení jakostního znaku v protáhlém materiálu. (To bylo také hlavním popudem pro tuto práci o dobách prvního překročení.) Zde parametrem procesu je délkový rozměr, hodnotou procesu je hodnota znaku v daném místě (tloušťka, odolnost proti namáhání atd.). V takovém případě pokles hodnoty znaku pod určitou mez může znamenat, že výrobek je nevyhovující.

Přejdeme nyní k matematické stránce úlohy určení distribuční funkce $F(t, a)$ doby prvního výstupu z intervalu (a, ∞) . Budiž $u(t, y; a)$ řešení rovnice (1) s počáteční podmínkou $g(y)$ a okrajovou podmínkou

$$u(t, a; a) = 0.$$

Potom, jak známo, $u(t, y; a) dy$ značí (pro počáteční rozložení dané hustotou $g(y)$) pravděpodobnost jevu, že proces v čase t nabude hodnoty z intervalu $(y, y + dy)$ a že do téže doby hodnota procesu neklesne pod hladinu a .

Distribuční funkce $F(t, a)$ je tedy určena vztahem

$$1 - F(t, a) = \int_a^{\infty} u(t, y; a) dy.$$

Položme $w(t, y) = u(t, y; a) \exp y^2/4$. Potom $w(t, y)$ vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} w + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}y^2\right) w$$

s počáteční podmínkou $g(y) \exp y^2/4$ a okrajovou podmínkou $w(t, a) = 0$.

Budeme předpokládati, že $\varphi(y) = g(y) \exp y^2/4$ je integrovatelná s kvadrátem na (a, ∞) (patří do L^2) a vyjádříme $w(t, y)$ pomocí rozvoje ve vlastní funkce. Vlastní funkce $h_k(y)$ jsou řešení rovnice

$$(2) \quad \frac{d^2}{dy^2} h + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}y^2\right) h = 0,$$

která patří do L^2 a splňují vztah $h(a) = 0$. Jak známo (viz na př. [1]), existuje ortonormální systém $\{h_k\}_{k=0}^{\infty}$ vlastních funkcí, úplný v L^2 . Vlastním funkcím odpovídají vlastní čísla n_k , splňující $0 < n_k < n_{k+1}$.

Máme tedy

$$\varphi(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^{\infty} \varphi(x) h_k(x) dx h_k(y), \quad w(t, y) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-n_k t} \int_a^{\infty} \varphi(x) h_k(x) dx h_k(y).$$

Jestliže $g(y) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp -\frac{1}{2}y^2$, tj. $\varphi(y) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp -\frac{1}{4}y^2$, máme

$$\begin{aligned} u(t, y; a) &= e^{-y^2/4} w(t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/4} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-n_k t} \int_a^{\infty} e^{-x^2/4} h_k(x) dx h_k(y) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-n_k t} \int_a^{\infty} z_k(x) dx z_k(y). \end{aligned}$$

Zde jsme položili $z_k(y) = h_k(y) \exp -y^2/4$. Dále

$$(3) \quad 1 - F(t, a) = \int_a^{\infty} u(t, y; a) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-n_k t} \left(\int_a^{\infty} z_k(y) dy \right)^2 = \\ = e^{-n_0 t} \frac{\left(\int_a^{\infty} z_0(y) dy \right)^2}{\sqrt{2\pi}} + R_t.$$

Pro zbytek R_t platí

$$(4) \quad 0 < R_t < e^{-n_1 t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_a^{\infty} z_k(y) dy \right)^2 = \\ = e^{-n_1 t} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left(\int_a^{\infty} e^{-y^2/2} dy - \left(\int_a^{\infty} z_0(y) dy \right)^2 \right).$$

Rovnice (2) je rovnice Weberova. Weberovy funkce, funkce parabolického válce, jsou řešení této rovnice, která patří do L^2 (pro každý interval (a, ∞)). Jsou dány vztahem (viz [4])

$$\begin{aligned} D_n(y) &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) 2^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n)} e^{-\frac{1}{4}y^2} {}_1F_1\left\{-\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}y^2\right\} + \\ &+ \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}) 2^{\frac{1}{2}n-1}}{\Gamma(-\frac{1}{2}n)} y e^{-\frac{1}{4}y^2} {}_1F_1\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n, \frac{3}{2}; \frac{1}{2}y^2\right\}, \end{aligned}$$

kde

$${}_1F_1\{\alpha, \gamma; x\} = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha \dots (\alpha+n-1)}{\gamma \dots (\gamma+n-1)} \frac{x^n}{n!} + \dots$$

je konfluentní hypergeometrická funkce. Pro k celá, nezáporná jsou Weberovy funkce svázány s Hermiteovými polynomy vztahem

$$(5) \quad D_k(y) = H_k(y) e^{-\frac{1}{2}y^2}.$$

Každé řešení rovnice (2) patří do L^2 je lineárně závislé na $D_n(y)$, tedy

$$h_k(y) = \text{konst } D_{n_k}(y).$$

Odtud plyne, že vlastní čísla n_k jsou řešení rovnice

$$(6) \quad D_{n_k}(a) = 0.$$

Tímto způsobem bylo také charakteristické číslo n_0 , jakožto nejmenší kořen rovnice (6), počítáno.

Platí $n_k(a) < n_k(a')$ pro $a < a'$. Vztahem (5) jsou určeny vlastní funkce pro interval $(-\infty, \infty)$. Máme tedy nerovnost

$$(7) \quad k = n_k(-\infty) < n_k(a),$$

kteřá nám poslouží při odhadu zbytku.

Zabývali jsme se numerickým rozбором případu $-2 \geq a \geq -5$. Tento obor byl zvolen proto, aby při počátečním rozložení odpovídajícím stacionárnímu stavu byla dostatečně velká pravděpodobnost, že systém na počátku bude v mezích (a, ∞) . Udáme přibližné vyjádření, jak je určeno vztahem (3) a oceníme chybu. K tomu je třeba určit veličinu

$$Z = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left(\int_a^\infty z_0(y) dy \right)^2.$$

Klademe-li

$$I = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_a^\infty e^{-y^2/2} dy,$$

máme ze vztahu (3) a nerovností (4) a (7)

$$(8) \quad e^{-n_0 t} Z < 1 - F(t, a) < e^{-n_0 t} Z + e^{-t}(I - Z).$$

Integraci této nerovnosti vzhledem k t v oboru $(0, \infty)$ dostáváme

$$(9) \quad n_0^{-1} Z < E = \int_0^\infty t dF(t, a) < n_0^{-1} Z + I - Z.$$

Zde E je střední doba, potřebná k překročení hranice a . Střední doba, potřebná k dosažení hranice a systémem, vycházejícím z polohy $x > a$ je rovna $\int_a^\infty \exp \frac{1}{2} y^2 \cdot \int_y^\infty \exp -\frac{1}{2} s^2 ds dy$. (Viz též [2].) Abychom získali veličinu E , musíme tento výraz

integrovaní přes počáteční polohy v intervalu (a, ∞) , které se vyskytují s hustotou $(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp -\frac{1}{2}x^2$. Po záměně pořadí integrace dostáváme

$$E = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{y^2/2} \left(\int_y^\infty e^{-s^2/2} ds \right)^2 dy.$$

Podle tohoto vztahu byly veličiny E počítány. Ze vztahu (9) vyplývá

$$\frac{n_0}{1 - n_0} (E - I) < Z < n_0 E,$$

Tab. 1.

$-a$	n_0	E	$Z \sim n_0 E$	$-a$	n_0	E	$Z \sim n_0 E$
2,00	0,097 274	9,69	0,942	3,55	0,002 347 67	425,74	0,999 5
2,05	0,089 280	10,62	0,948	3,60	0,001 997 08	500,52	0,999 6
2,10	0,081 787	11,66	0,953	3,65	0,001 694 16	590,06	0,999 7
2,15	0,074 777	12,82	0,958	3,70	0,001 433 21	697,54	0,999 7
2,20	0,068 233	14,11	0,963	3,75	0,001 209 10	826,87	0,999 8
2,25	0,062 134	15,57	0,967	3,80	0,001 017 22	982,89	0,999 82
2,30	0,056 463	17,19	0,971	3,85	0,000 853 44	1 171,56	0,999 85
2,35	0,051 201	19,03	0,974	3,90	0,000 714 05	1 400,30	0,999 88
2,40	0,046 328	21,10	0,977	3,95	0,000 595 78	1 678,30	0,999 90
2,45	0,041 826	23,43	0,980	4,00	0,000 495 74	2 017,03	0,999 92
2,50	0,037 677	26,08	0,983	4,05	0,000 411 36	2 430,78	0,999 94
2,55	0,033 861	29,09	0,985	4,10	0,000 340 42	2 937,42	0,999 95
2,60	0,030 361	32,51	0,987	4,15	0,000 280 94	3 559,37	0,999 96
2,65	0,027 157	36,40	0,989	4,20	0,000 231 22	4 324,78	0,999 97
2,70	0,024 233	40,86	0,990	4,25	0,000 189 78	5 269,10	0,999 97
2,75	0,021 571	45,97	0,992	4,30	0,000 155 35	6 437,04	0,999 98
2,80	0,019 153	51,83	0,993	4,35	0,000 126 82	7 885,21	0,999 98
2,85	0,016 964	58,58	0,994	4,40	0,000 103 25	9 685,32	0,999 987
2,90	0,014 987	66,37	0,995	4,45	0,000 083 83	11 928,51	0,999 990
2,95	0,013 205	75,39	0,996	4,50	0,000 067 88	14 730,82	0,999 992
3,00	0,011 605 70	85,84	0,996 2	4,55	0,000 054 82	18 240,39	0,999 994
3,05	0,010 172 95	97,98	0,996 8	4,60	0,000 044 16	22 646,72	0,999 995
3,10	0,008 893 42	112,14	0,997 3	4,65	0,000 035 47	28 192,80	0,999 996
3,15	0,007 754 06	128,67	0,997 7	4,70	0,000 028 42	35 190,92	0,999 997
3,20	0,006 742 48	148,03	0,998 1	4,75	0,000 022 70	44 043,33	0,999 998
3,25	0,005 847 01	170,76	0,998 4	4,80	0,000 018 09	55 269,41	0,999 998
3,30	0,005 056 67	197,50	0,998 7	4,85	0,000 014 38	69 541,28	0,999 999
3,35	0,004 361 23	229,04	0,998 9	4,90	0,000 011 40	87 730,72	0,999 999
3,40	0,003 751 12	266,34	0,999 1	4,95	0,000 009 01	110 971,12	0,999 999
3,45	0,003 217 50	310,57	0,999 2	5,00	0,000 007 11	140 739,43	0,999 999
3,50	0,002 752 19	363,12	0,999 4				

odkud

$$(10) \quad n_0 E - (I - n_0 E) \sum_{k=1}^m n_0^k - n_0^{m+1} I < Z < n_0 E.$$

Jak je patrné z numerických výsledkú, těmito vztahy je veličina Z určena s postačující přesností.

Hodnoty n_0 , E a $n_0 E$ jsou uvedeny v tabulce 1. Jako veličinu Z by bylo správnější brát místo $n_0 E$ střed intervalu, který je vymezen nerovností (10). Tato úprava by měla vliv pouze na část třímístných hodnot. Čtyř a vícemístné hodnoty $n_0 E$ udávají také veličinu Z na tentýž počet míst.

Odhadneme nyní chybu, které se dopustíme, použijeme-li aproximace $1 - F(t, a) \sim Z e^{-n_0 t}$ při určování kvantilů distribuční funkce $F(t, a)$, tj. nahradíme-li hodnotu \hat{i} , splňující

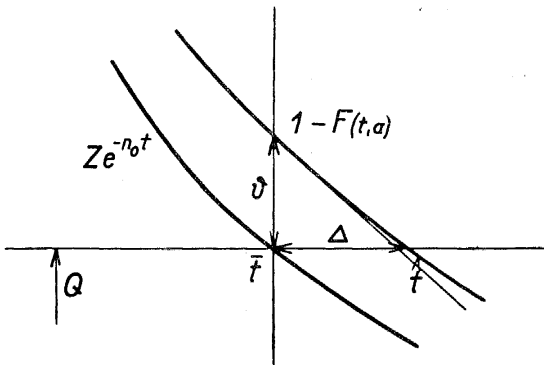
$$1 - F(\hat{i}, a) = Q,$$

hodnotou

$$\hat{i} = -\frac{\log H}{n_0},$$

kde $H = QZ^{-1}$, Q je velikost kvantilu, $Z > Q$.

Budeme používatí označení, zavedeného na obr. 1.



Obr. 1.

Ze vztahu (8) plyne, že je

$$\vartheta < D e^{-\hat{i}}, \quad \text{kde } D = I - Z.$$

Máme přibližně

$$\Delta F'(\hat{i}, a) \sim \vartheta, \quad F'(\hat{i}, a) > n_0 Z e^{-n_0 \hat{i}}.$$

Tedy

$$\Delta < \frac{D e^{-\hat{i}}}{n_0 Z e^{-n_0 \hat{i}}} = \frac{D H^{1/n_0}}{Q n_0}.$$

Pro relativní chybu dostáváme

$$(11) \quad \Theta = \frac{\Delta}{\hat{i}} < \frac{D H^{1/n_0}}{Q |\log H|}.$$

Z nerovnosti (11) je možno např. ověřiti, že použitím aproximace pro $a = -3$ můžeme určit kvantil pro $Q = 0,95$ s relativní chybou menší než 10^{-3} , pro $Q = 0,90$ s relativní chybou menší než $5 \cdot 10^{-6}$. Pro $a = -4$, $Q = 0,998$ je $\Theta < 6 \cdot 10^{-4}$. Tedy aproximace dává uspokojivé hodnoty i pro velká Q . Poznamenejme ještě, že je vždy $\hat{i} < i$.

Pro Uhlenbeckův proces s libovolnými parametry nahlédneme snadno, že aproximace má tvar

$$F(t, a) \sim 1 - e^{-n_0 \beta t} Z,$$

kde veličiny n_0 a Z byly určeny pro hodnotu $a' = (a - \mu) \sigma^{-1}$.

Jsem zavázán dr. M. JIRINOVÍ za podporu a pomoc při řešení této úlohy. Hodnoty n_0 byly vypočteny ve výpočetním středisku Ústavu teorie informace a automatizace ČSAV, ostatní veličiny v Matematickém ústavu ČSAV.

Literatura

- [1] *Coddington E. A., Levinson N.*: Theory of ordinary differential equations. New York 1955.
- [2] *Mandl P.*: Vlastnosti difúzních procesů, určených obecnou laterální podmínkou. Časopis pro přest. mat. (v tisku).
- [3] *Potoček J.*: K Brownovu pohybu torsního zrcátka. Časopis pro přest. mat. 63 (1934), 45 – 51.
- [4] *Whittaker E. T., Watson G. N.*: A course of modern analysis. Cambridge 1940.
- [5] *Davis H. T.*: Tables of the higher mathematical functions I, II. Bloomington 1933, 1935.
- [6] Таблицы вероятностных функций 1,2. Москва 1958.
- [7] *Terril H. M., Sweeny L.*: An extension of Dawson's table of the integral of $\exp x^2$. Journal of the Franklin Institute 237 (1944), 495–497.
- [8] *Terril H. M., Sweeny L.*: Table of the integral of $\exp x^2$. Journal of the Franklin Institute 238 (1944), 220 – 222.

Резюме

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВРЕМЕНИ ПЕРВОГО ПЕРЕХОДА ОДНОЙ ГРАНИЦЫ ПРОЦЕССОМ УЛЕНБЕКА

ПЕТР МАНДЛ (Petr Mandl)

Одномерный процесс Уленбека — это случайный марковский процесс. Для стационарного начального распределения этот процесс распределен нормально с корреляционной функцией $\exp -\beta|t|$. В работе дана таблица, которая может служить для подсчета вероятности $P(t, A)$ явления, что в интервале времени длины t никогда значение процесса не будет меньше заданного значения A .

Имеем с хорошим приближением

$$P(t, A) \sim Ze^{-n_0 \beta t},$$

где значения n_0 и Z взяты в таблице в той строке, которая соответствует $a = (A - \mu) \sigma^{-1}$. Здесь μ — математическое ожидание и σ^2 — дисперсия стационарного распределения. Приближение для вероятности того, что значение процесса будет в течение заданного времени под данной границей получается из симметрии.

Zusammenfassung

ÜBER DIE VERTEILUNG DER ZEIT, WELCHE DER UHLENBECKSCHE PROZESS ZUR ÜBERSCHREITUNG EINER GRENZE BRAUCHT

PETR MANDL

Der eindimensionale Uhlenbecksche Prozeß ist ein zufälliger Markowscher Prozeß. Für die stationäre Anfangsverteilung ist dieser Prozeß normalverteilt mit der Korrelationsfunktion $\exp -\beta|t|$. In der vorgelegten Arbeit wird eine Tafel angegeben, die zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(t, A)$ des Ereignisses, daß im Zeitintervalle der Länge t der Wert des Prozesses niemals unter eine gegebene Grenze A sinkt, benutzt werden kann.

Man hat mit guter Annäherung

$$P(t, A) \sim Z e^{-n_0 \beta t},$$

wobei die Werte n_0 und Z aus der zu $a = (A - \mu)\sigma^{-1}$ entsprechenden Reihe der Tafel genommen sind. Hier ist μ der Erwartungswert und σ^2 die Streuung der stationären Verteilung. Die Annäherung für die Wahrscheinlichkeit, daß der Wert des Prozesses während der gegebenen Zeit ungebrochen unter einer gegebenen Grenze bleibt bekommt man aus der Symmetrie.

Adresa autora: *Petr Mandl* C. Sc., Ústav teorie informace a automatisace ČSAV, Praha 2, Vyšehradská 49.