Emanuel Ondráček

Příspěvek k teorii plastického potenciálu

Aplikace matematiky, Vol. 8 (1963), No. 3, 163–179

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102850`

PŘÍSPĚVEK K TEORII PLASTICKÉHO POTENCIÁLU

EMANUEL ONDRÁČEK

(Došlo dne 9. června 1962.)

V práci je odvozena teorie plastického tečení pro singulární podmínku plasticity.

1. ÚVOD

Pro isothermické závislosti deformace na napětí pružně plastického materiálu se zpevněním existují tři typy teorií. Velmi rozšířená pro svoji matematickou jednoduchost je teorie deformační (teorie pružně plastických deformací), která předpokládá, že existuje jednoznačná závislost mezi napětími a deformacemi. Bylo však mnoha autory teoreticky i experimentálně dokázáno, že deformační teorie vyhovuje pouze při prostém zatěžování. Při zatěžování obecném neplatí.

Velmi rozpracovaná je teorie plastického tečení, budovaná na koncepci plastického potenciálu. MELANEM bylo ukázáno, že pro isotropní materiál je možno v dostatečně obecné formě přírůstky plastických deformací vyjádřit vztahem

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{p} = h \frac{\partial g(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \mathrm{d}f, \tag{1}$$

kde je $f(\sigma_{ij}) = 0$ podmínka plasticity,

$g(\sigma_{ij}) = 0$ plastický potenciál,

a h kladná funkce zpevnění, o níž se předpokládá, že nezávisí na rychlosti změny napětí. Jako podmínka plasticity bývá nejčastěji používána podmínka MISESOVA nebo TRESCOVA, které jsou zvláštními případy zobecněné podmínky plasticity odvozené v práci [7]. Tyto podmínky dobře souhlasí s výsledky pokusů.

Pro plastický potenciál však obecný vztah nebyl dosud nalezen. V případě, že $f(\sigma_{ij})$ je regulární, je předpokládána platnost identity

$$f(\sigma_{ij}) \equiv g(\sigma_{ij}) .$$

Pro přírůstek plastických deformací pak platí

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{p} = h \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \mathrm{d}f .$$

V tomto tvaru byla závislost navržena bez důkazu Misesem. V posledních letech však byla odvozena za předpokladu platnosti známého postulátu zpevnění zavedeného DRUCKEREM. Z tohoto postulátu také vyplývá, že mezní plocha plasticity je vypuklá a leží na jedné straně tečné roviny v libovolném bodě. Jak ukázal ILJUŠIN [2], Druckerův postulát zpevnění nebyl prokázán experimentálně při dostatečně složitém zatěžování a je pouze nutnou, nikoliv postačující podmínkou platnosti obecnějšího postulátu plasticity. Pokud jde o vypuklost mezní plochy plasticity je tato otázka podle Iljušina zatím otevřená. Iljušin také ukázal, že při uvažování pružných deformací a deformační anisotropie může být pro přírůstek plastických deformací psán vztah

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{p} + \mathrm{d}(\mathscr{E})\,\sigma_{ij} = G\,\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\,\mathrm{d}f\,, \tag{2}$$

kde $\mathrm{d}(\mathscr{E})$ je přírůstek tensoru modulů pružné anisotropie. Vzhledem k podmínce jednoznačnosti je i zde vyžadována regulárnost podmínky plasticity. Také je předpokládána platnost identity

$$f(\sigma_{ij}) \equiv g(\sigma_{ij})\,,$$

která vzhledem k zobecnění Druckerova postulátu je pouze zvláštním případem závislosti obecnější. Vztah pro přírůstek plastických deformací je tedy možno psát v obecnějším tvaru

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij} + \mathrm{d}(\mathscr{E})\,\sigma_{ij} = G\,\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}\,\mathrm{d}f\,. \tag{3}$$

Pro podmínku plasticity $f(\sigma_{ij}) = 0$, která má singulární body, byla teorie Misesova zobecněna KOITEREM. Jestliže v okolí singulárního bodu je podmínka plasticity dána rovnicemi

$$f_n(\sigma_{ij}) = 0\,, \quad n = 1, 2, \ldots, N\,,$$

pak pro přírůstek plastických deformací podle Koitera platí

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{p} = \sum_{n=1}^{N} h_n\,\frac{\partial f_n}{\partial \sigma_{ij}}\,\mathrm{d}f_n\,. \tag{4}$$

V bodech, kde $f(\sigma_{ij})$ je regulární, je teorie Koiterova totožná s teorií Misesovou, neboť $N = 1$. Vektor přírůstku plastických deformací je kolmý k mezní ploše plasticity a v regulárním bodě je tedy určen jednoznačně. V singulárním bodě však vektor přírůstku plastických deformací jednoznačný není.

Třetím typem jsou teorie, vycházející z původní teorie kluzu BATDORFA-BUDIANSKÉHO, která je budována na základě dvou předpokladů:

1. Kov je isotropní kontinuum a proto roviny kluzu a směry kluzu jsou v každém bodě tělesa rozloženy spojitě.

2. Kluz nastává, když smykové napětí τ_{ab} ve směru n_i^b v rovině n_i^a převyšuje mez

kluzu ve smyku τ_k. Mírou kluzu je funkce $F(\tau_{ab})$, která pro daný materiál nezávisí na napjatosti.

Pro celkovou deformaci pak platí

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \int_H \mathrm{d}\Omega \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} F(\tau_{ab}) \left(n_i^b n_j^a + n_j^b n_i^a\right) \mathrm{d}\beta \,.$$

Funkce $F(\tau_{ab})$ může být stanovena na základě pokusu při prostém tahu rozvinutím funkce F v řadu a numerickou integrací. Experimentálnímu ověření nezávislosti $F(\tau_{ab})$ na napjatosti je věnována práce [3], kde je funkce $F(\tau_{ab})$ stanovena pro prostý tah a prostý smyk. Podle předpokladu funkce měly být stejné, zatím co ve skutečnosti vychází značně rozdílné. Z toho je zřejmé, že předpoklad o nezávislosti $F(\tau_{ab})$ na napjatosti není správný.

Koiterem bylo také ukázáno, že teorie kluzu Batdorfa-Budianského je zvláštním případem Koiterovy teorie plastického potenciálu a odpovídá nekonečnému počtu podmínek plasticity.

Z uvedeného je zřejmé, že nejobecnější je teorie plastického tečení. Její nevýhodou kromě některých odchylek od experimentálních výsledků je, že nevychází z fyzikální představy kluzu v polykrystalickém materiálu.

V tomto článku ukážeme nejprve k jaké závislosti $f(\mu, \nu)$ vede Mises-Koiterova teorie při zobecněné podmínce plasticity. Potom odvodíme rovnici plastického potenciálu a závislost $f(\mu, \nu)$, vycházejíce z fyzikální představy polykrystalického materiálu, jakožto souboru libovolně orientovaných krystalů.

2. ZOBECNĚNÁ PODMÍNKA PLASTICITY

Zobecněná podmínka plasticity byla odvozena v práci [7] z tohoto předpokladu:

Kluz v polykrystalickém materiálu nastane, když smykové napětí τ_ϱ v rovině ϱ, která je střední rovinou možných kluzových rovin jednotlivých krystalů, dosáhne mezné hodnoty.

Zvolíme-li označení tak, že

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \,,$$

může být zobecněná podmínka psána ve tvaru

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2\sigma_k}{\sqrt{(a(3 \operatorname{tg}^2 \varphi - 1) + 4)}} = \frac{2\sigma_k}{\sqrt{(a(\mu^2 - 1) + 4)}} \,, \tag{5}$$

kde

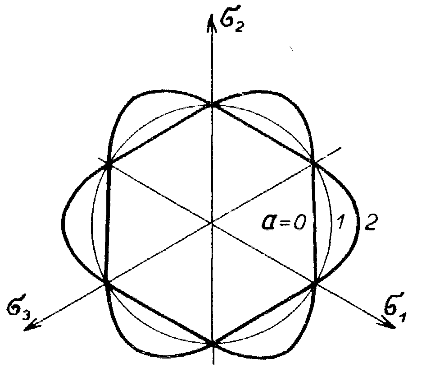
$$\mu = -\sqrt{(3)} \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \tag{6}$$

je parametr LODEHO a a je parametr určující rovinu ϱ. Platí pro něj omezení

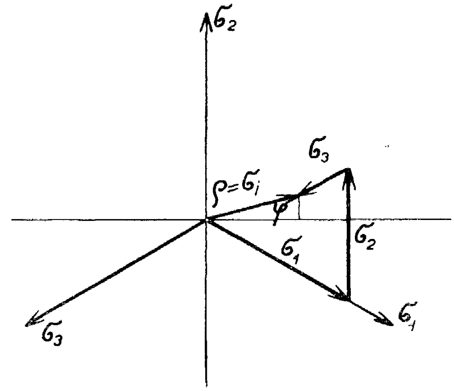
$$0 \leqq a \leqq 2 \,.$$

V napětích má tato podmínka tvar

$$\sigma_1 \gtreqless \sigma_2 \gtreqless \sigma_3 ,$$
$$\sigma_1^2 + a\sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (2 - a)\,\sigma_1\sigma_3 - a\sigma_1\sigma_2 - a\sigma_2\sigma_3 = \sigma_k^2 ,$$
$$\sigma_2 \gtreqless \sigma_1 \gtreqless \sigma_3 ,$$
$$\sigma_2^2 + a\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - (2 - a)\,\sigma_2\sigma_3 - a\sigma_1\sigma_2 - a\sigma_1\sigma_3 = \sigma_k^2 ,$$
$$\sigma_2 \gtreqless \sigma_3 \gtreqless \sigma_1 ,$$
$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + a\sigma_3^2 - (2 - a)\,\sigma_1\sigma_2 - a\sigma_2\sigma_3 - a\sigma_1\sigma_3 = \sigma_k^2 .$$



Obr. 1. Křivky plasticity podle zobecněné podmínky plasticity pro $a = 0$ (Tresca), $a = 1$ (Mises) a $a = 2$.



Obr. 2. Znázornění napjatosti v deviátorové rovině.

Je zřejmé, že podmínky Trescova a Misesova jsou zvláštním případem zobecněné podmínky plasticity pro $a = 0$ a $a = 1$. Rovnice představují v Highově prostoru jednoparametrickou soustavu válcových ploch s osou $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. To znamená, že vznik plastických deformací závisí pouze na deviátoru napětí

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \tfrac{1}{3}\sigma_{ii}\delta_{ij} .$$

To souhlasí s výsledky pokusů jak bylo prověřeno CROSSLANDEM [4] srovnáním výsledků pokusů BRIDGMANA a dalších autorů. Místo mezní plochy stačí proto uvažovat průsečnici mezní plochy s deviátorovou rovinou $\sigma_{ii} = 0$, kterou budeme nazývat křivka plasticity (P). Na obr. 1 jsou křivky plasticity nakresleny pro $a = 0, 1, 2$. Protože křivka plasticity je symetrická k osám $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, stačí vyšetřovat segment s úhlem 30°. Napjatost je dána bodem, jehož průvodič svírá s osou $\varphi = 0$ úhel φ, který souvisí s Lodeho parametrem μ známým vztahem (6). Délka průvodiče je podle obr. 2

$$\varrho^2 = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}(2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)\right]^2 = \sigma_i^2$$

a po úpravě

$$(7) \qquad \varrho = \sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\sqrt{(\mathrm{tg}^2\,\varphi + 1)} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\sqrt{(\mu^2 + 3)}\,,$$

kde

$$(8) \qquad \sigma_i = \sqrt{(\tfrac{3}{2}s_{ij}s_{ij})} = \sqrt{(\tfrac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2])}$$

je intensita smykových napětí. Na základě vztahu (7) můžeme snadno stanovit rovnici křivky plasticity v polárních souřadnicích ϱ, φ resp. ϱ, μ. Dosazením za $\sigma_1 - \sigma_3$ z (5) do (7) je

$$(9) \qquad \varrho = \sqrt{(3)}\,\sigma_k \sqrt{\left(\frac{\mathrm{tg}^2\,\varphi + 1}{a(3\,\mathrm{tg}^2\,\varphi - 1) + 4}\right)} = \sigma_k \sqrt{\left(\frac{\mu^2 + 3}{a(\mu^2 - 1) + 4}\right)}.$$

Pro $a = 1$ je $\varrho = \sigma_k$, takže křivkou plasticity je kružnice, což odpovídá podmínce Misesově. Křivka plasticity je u zobecněné podmínky pro $|\varphi| \neq 30°$, tj. $|\mu| \neq 1$ regulární, v bodech $|\varphi| = 30°$, tj. $|\mu| = 1$ je singulární při $a \neq 1$, při $a = 1$ (kružnice) je i v těchto bodech regulární.

3. PLASTICKÝ POTENCIÁL

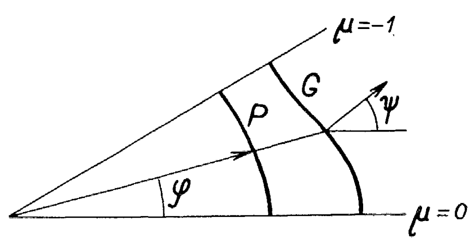
Funkce $g(\sigma_{ij}) = 0$, která určuje přírůstek plastických deformací vztahem (1) nebo (3), se nazývá plastický potenciál a v Highově prostoru představuje opět válcovou plochu s osou $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Válcová plocha protíná deviátorovou rovinu v křivce, kterou budeme nazývat křivka potenciální (G). Přírůstek plastických deformací může být v Highově prostoru znázorněn pomocí volného vektoru

$$2G(\mathrm{d}\varepsilon_1^p, \mathrm{d}\varepsilon_2^p, \mathrm{d}\varepsilon_3^p)\,.$$

Protože v plastickém stavu je možno objem pokládat za konstantní a tedy

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ii}^p = 0\,,$$

leží vektor přírůstku plastických deformací opět v deviátorové rovině. Ze vztahu (1) vyplývá, že je rovnoběžný s normálou k potenciální křivce v průsečíku potenciální křivky s vektorem napětí. Dá se ukázat [5], že potenciální křivka je opět symetrická, takže stačí vyšetřovat jen segment $0 \leqq \varphi \leqq 30°$. Vektor přírůstku plastických deformací svírá s osou $\varphi = 0$ úhel ψ (obr. 3), který souvisí s parametrem Lodeho ν vztahem



Obr. 3. Znázornění napjatosti a přírůstku plastických deformací v deviátorové rovině.

$$(10) \qquad \nu = -\sqrt{(3)}\,\mathrm{tg}\,\psi = \frac{2\mathrm{d}\varepsilon_2^p - \mathrm{d}\varepsilon_1^p - \mathrm{d}\varepsilon_3^p}{\mathrm{d}\varepsilon_1^p - \mathrm{d}\varepsilon_3^p}\,.$$

Jsou-li $\varrho = \varrho(\varphi)$ a $r = r(\varphi)$ rovnice křivky plasticity P a potenciální křivky G, pak podle obr. 3 je

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = \operatorname{tg}(\varphi - \psi) = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi}{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi}. \tag{11}$$

Požadujeme-li splnění podmínky jednoznačnosti [2], musí být potenciální křivka všude regulární a normály ve všech bodech jednoho segmentu musí být různoběžné. Vzhledem k jednoznačnosti a souměrnosti musí potenciální křivka protínat kolmo poloměry ohraničující 30° segmenty, tj. musí být

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)_{|\varphi|=0,\pi/6} = 0.$$

4. TEORIE PLASTICKÉHO POTENCIÁLU MISES-KOITEROVA

V této teorii, jak již bylo řečeno v úvodu, je předpokládáno, že

$$f(\sigma_{ij}) \equiv g(\sigma_{ij})$$

a tedy i $P \equiv G$. Pro přírůstek plastických deformací platí vztah (4). Z něho vyplývá, že v regulárním bodě křivky plasticity je vektor přírůstku plastických deformací kolmý ke křivce plasticity. V singulárním bodě leží vektor přírůstku plastických deformací v úhlu, který svírají normály v tomto bodě a není tedy jednoznačný.

Odvoďme nyní závislost $f(\mu, \nu)$, která z této teorie vyplývá, pro zobecněnou podmínku plasticity. Jak bylo ukázáno, je křivka plasticity a tedy i křivka potenciální dána vztahem

$$r \equiv \varrho = \sqrt{(3)}\sigma_k \sqrt{\left(\frac{\operatorname{tg}^2\varphi + 1}{a(3\operatorname{tg}^2\varphi - 1) + 4}\right)}.$$

Derivací a po úpravě je

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\varphi} \equiv \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{4(1-a)\operatorname{tg}\varphi}{a(3\operatorname{tg}^2\varphi - 1) + 4}.$$

Po dosazení do (11) dostáváme

$$4(1-a)\frac{\operatorname{tg}\varphi}{a(3\operatorname{tg}^2\varphi - 1) + 4} = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi}{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi}.$$

Dosadíme-li ještě za $\operatorname{tg}\varphi$ a $\operatorname{tg}\psi$ ze vztahů (6) a (10), po jednoduchých úpravách obdržíme závislost $f(\mu, \nu)$ v jednoduchém tvaru

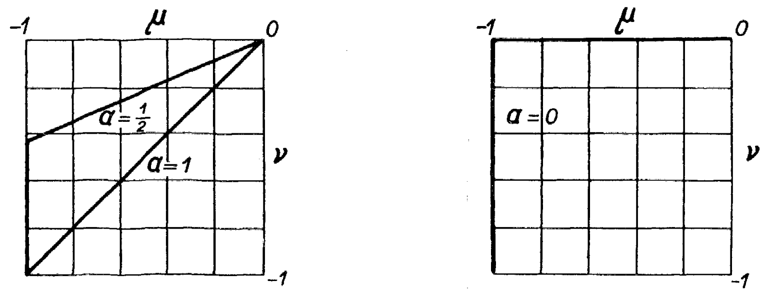
$$\begin{aligned} &\mu \neq \pm 1, \quad \nu = \frac{3a}{4-a}\mu, \\ &\mu = 1, \quad \frac{3a}{4-a} \leqq \nu \leqq 1, \\ &\mu = -1, \quad -1 \leqq \nu \leqq -\frac{3a}{4-a}. \end{aligned} \tag{12}$$

Volba parametru a, který byl v odst. 2 omezen nerovností

$$0 \leqq a \leqq 2\,,$$

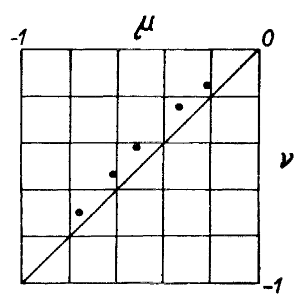
je v tomto případě dále omezena. Druckerův postulát, ze kterého byla v podstatě podmínka $f \equiv g$ odvozena, vyžaduje, aby křivka plasticity ležela na jedné straně tečny v libovolném bodě. Z této podmínky vyplývá omezení $a \leqq 1$, takže

$$0 \leqq a \leqq 1\,.$$



Obr. 4. Závislost $\nu = \nu(\mu)$, vyplývající z teorie Koiterovy pro zobecněnou podmínku plasticity ($a = 0, \frac{1}{2}, 1$).

Závislost $\nu = \nu(\mu)$ daná vztahy (12) je naznačena na obr. 4. Srovnáme-li tyto závislosti se známými experimentálními výsledky LODEHO a TAYLORA-QUINNEYE nebo novějšími výsledky podle [6], jež jsou nakresleny na obr. 5, vidíme, že rozdíl teoretické závislosti a experimentálních výsledků je značný, i když podmínka plasticity, na základě které závislost byla odvozena, dobře souhlasí s výsledky pokusů. Z toho vyplývá, že podmínka $f \equiv g$ je pouze prvním přiblížením ke skutečnosti.



Obr. 5. Experimentální výsledky podle [6], získané zkouškami tenkostěnných trubek z mosazi.

5. ZÁVISLOST PODMÍNKY PLASTICITY A PLASTICKÉHO POTENCIÁLU

V této kapitole odvodíme závislost mezi podmínkou plasticity a plastickým potenciálem na základě těchto předpokladů:

1. Kluz v polykrystalickém materiálu nastane, když smykové napětí τ_ϱ v rovině ϱ, která je střední rovinou možných kluzových rovin jednotlivých krystalů, dosáhne mezné hodnoty. Kluz se děje v rovině ϱ', která je střední rovinou skutečných kluzových rovin jednotlivých krystalů.

2. Závislost

$$\sigma_z = \sigma_z\left(\int \mathrm{d}\varepsilon_z\right),$$

kde

$$\sigma_z = k_1 \tau_\varrho\,, \quad \mathrm{d}\varepsilon_z = k_2\, \mathrm{d}\gamma_\varrho,$$

(k_1, k_2 jsou konstanty), nezávisí na napjatosti.

3. Platí koncepce plastického potenciálu.

Předpoklad 1 vyplývá z toho, že polykrystalický materiál je možno považovat za soubor libovolně orientovaných krystalů s jistým rozdělením orientace. V každém krystalu existuje několik rovin (podle druhu krystalické mřížky), v nichž smykové napětí dosahuje mezné hodnoty, kluz však nastane pouze v některých z těchto možných rovin. Vyšetřujeme-li kluz v celém souboru krystalů a ne kluzy lokální, musíme vycházet ze středních hodnot náhodně proměnných veličin jednotlivých krystalů. Toto pravděpodobnostní pojetí je jistým zobecněním předpokladu teorie kluzu. Místo nezávislosti $F(\tau_{nb})$ na napjatosti je předpokládáno, že platí 2. To je zobecněním předpokladu teorie tečení a teorie deformační, podle nichž

$$\sigma_i = \sigma_i\left(\int \mathrm{d}\varepsilon_i\right)$$

nezávisí na napjatosti, což až na některé odchylky dobře souhlasí s výsledky pokusů [2]. Předpoklad 3. vyplývá z toho, že koncepce plastického potenciálu, která je podstatná v teorii plastického tečení, je splněna i v teorii kluzu. Podmínkou plasticity, která vyhovuje předpokladu 1. je zřejmě zobecněná podmínka plasticity, odvozená v [7] (odst. 2).

Obecně by bylo třeba vycházet ze vztahu (3), který uvažuje deformační anisotropii. Pro jednoduchost se v této práci omezíme na tuho-plastický, isotropní materiál, takže budeme předpokládat platnost vztahu (1). Nejprve odvodíme závislost $f(\nu, \mu)$. Přírůstek práce plastických deformací může být podle [5] psán ve tvaru

$$\mathrm{d}W_p = \sigma_i\, \mathrm{d}\varepsilon_i \cos(\varphi - \psi)\,, \tag{13}$$

kde

$$\mathrm{d}\varepsilon_i = \sqrt{\left(\tfrac{2}{3}\, \mathrm{d}\varepsilon^p_{ij}\, \mathrm{d}\varepsilon^p_{ij}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left[(\mathrm{d}\varepsilon^p_1 - \mathrm{d}\varepsilon^p_3)^2 + (\mathrm{d}\varepsilon^p_1 - \mathrm{d}\varepsilon^p_2)^2 + (\mathrm{d}\varepsilon_2 - \mathrm{d}\varepsilon_3)^2\right]} \tag{14}$$

je intensita plastických deformací. Po dosazení z (10) je

$$\mathrm{d}\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(\mathrm{d}\varepsilon^p_1 - \mathrm{d}\varepsilon^p_3)\sqrt{(\mathrm{tg}^2\,\psi + 1)} = \tfrac{1}{3}(\mathrm{d}\varepsilon^p_1 - \mathrm{d}\varepsilon^p_3)\sqrt{(\nu^2 + 3)}\,. \tag{15}$$

Dosadíme-li do (13) z (15) a (7) a rozepíšeme-li $\cos(\varphi - \psi)$, po úpravě dostaneme

$$\mathrm{d}W_p = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)(\mathrm{d}\varepsilon^p_1 - \mathrm{d}\varepsilon^p_3)(1 + \mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\psi)\,. \tag{16}$$

Vzhledem k předpokladu 2 je přírůstek plastické práce dán obecně také vztahem

$$dW_p = \sigma_z \, d\varepsilon_z = k_1 k_2 \tau_\varrho \, d\gamma_{\varrho'} \, .$$

Smykové napětí τ_ϱ v rovině ϱ určené směrovým kosinem l je podle [7]

$$\tau_\varrho = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sqrt{[2l^2(1 - 2l^2)(3 \operatorname{tg}^2 \varphi - 1) + 4l^2(1 - l^2)]} \, . \tag{17}$$

Protože roviny ϱ a ϱ' nejsou obecně totožné, vzniká zkos v rovině ϱ', určené směrovými kosiny L, M, N, a platí pro něj

$$d\gamma_{\varrho'} = (d\varepsilon_1^p - d\varepsilon_3^p) \, . \tag{18}$$
$$. \sqrt{[M^2(1 - M^2)(1 + \sqrt{(3)} \operatorname{tg} \psi)^2 - 4L^2M^2(1 + \sqrt{(3)} \operatorname{tg} \psi) + 4L^2(1 - L^2)]} \, .$$

Přírůstek plastické práce je podle toho dán také vztahem

(19)

$$dW_p = \frac{k_1 k_2}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)(d\varepsilon_1^p - d\varepsilon_3^p) \sqrt{[2l^2(1 - 2l^2)(3 \operatorname{tg}^2 \varphi - 1) + 4l^2(1 - l^2)]} \, .$$
$$. \sqrt{[M^2(1 - M^2)(1 + \sqrt{(3)} \operatorname{tg} \psi)^2 - 4L^2M^2(1 + \sqrt{(3)} \operatorname{tg} \psi) + 4L^2(1 - L^2)]} \, .$$

Srovnáním tohoto vztahu se vztahem (16) dostáváme po jednoduchých úpravách závislost

$$(1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi)^2 = k^2[2l^2(1 - 2l^2)(3 \operatorname{tg}^2 \varphi - 1) + 4l^2(1 - l^2)] \, . \tag{20}$$
$$. [M^2(1 - M^2)(1 + \sqrt{(3)} \operatorname{tg} \psi)^2 - 4L^2M^2(1 + \sqrt{(3)} \operatorname{tg} \psi) + 4L^2(1 - L^2)] \, ,$$
$$k = k_1 k_2 \, ,$$

což je hledaná závislost mezi φ a ψ a tedy i mezi μ a ν. Parametr l v tomto vztahu určuje podmínku plasticity a podle [7] souvisí s parametrem a vztahem

$$l^2 = \frac{2 - a}{4 - a} \, .$$

Je to tedy další konstanta materiálu, určující v podstatě rozložení orientace krystalů. Konstantu k a parametry L a M určíme z podmínky jednoznačnosti, podle které jak již bylo uvedeno musí platit

$$\operatorname{tg} \varphi = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \psi = 0 \, ,$$
$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{tg} \psi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \, .$$

Dosazením těchto podmínek do (20) dostáváme tři rovnice pro tři neznámé k, L, M ve tvaru

$$1 = k^2[4l^2(1 - l^2) - 2l^2(1 - 2l^2][M^2(1 - M^2) - 4L^2M^2 + 4L^2(1 - L^2)] \, , \tag{21}$$
$$\tfrac{16}{9} = 4k^2l^2(1 - l^2)[4M^2(1 - M^2) - 8L^2M^2 + 4L^2(1 - L^2)] \, ,$$
$$\tfrac{16}{9} = 4k^2l^2(1 - l^2) 4L^2(1 - L^2) \, .$$

Z posledních dvou vyplývá

$$4M^2(1 - M^2 - 2L^2) = 0 .$$

Aby soustava (21) měla jednoznačné řešení musí být $M^2 > 0$, takže

$$M^2 = 1 - 2L^2 > 0 ,$$

z čehož vyplývá

$$L^2 < \tfrac{1}{2} .$$

Dalším řešením rovnic (21) dostaneme

$$L^2 = 1 - \frac{4}{9(1 - l^2)}, \quad M^2 = \frac{8}{9(1 - l^2)} - 1 , \tag{22}$$

$$k^2 = \frac{9(1 - l^2)}{4l^2(5 - 9l^2)} .$$

Protože musí být $L^2 \geqq 0$, $M^2 \geqq 0$, vyplývá z předcházejících vztahů

$$\tfrac{1}{9} \leqq l^2 \leqq \tfrac{5}{9}$$

a tedy

$$-\tfrac{1}{2} \leqq a \leqq \tfrac{7}{4} .$$

Vzhledem k nerovnosti

$$0 \leqq a \leqq 2$$

dostáváme konečně

$$0 \leqq a \leqq \tfrac{7}{4} .$$

Dosazením za k, L, M z (22) do (20), dostáváme po jednoduchých úpravách

$$(1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi)^2 = \frac{1}{9} \left[a(3 \operatorname{tg}^2 \varphi - 1) + 4\right] \left[\frac{7 - 4a}{4 - a} (3 \operatorname{tg}^2 \psi - 1) + 4\right]$$

a dosadíme-li ještě za $\operatorname{tg} \varphi$ a $\operatorname{tg} \psi$ z (6) a (10), dostáváme konečně závislost $f(\mu, \nu) = 0$ ve tvaru

$$(3 + \mu\nu)^2 - \left[a(\mu^2 - 1) + 4\right] \left[\frac{7 - 4a}{4 - a} (\nu^2 - 1) + 4\right] = 0 . \tag{23}$$

Známe-li tuto závislost, můžeme stanovit rovnici potenciální křivky, pro kterou máme diferenciální rovnici (11). Z ní po separaci proměnných, integraci a úpravách vyplývá

$$r = C \,.\, \exp 3 \int \frac{\mu - \nu}{(3 + \mu\nu)(3 + \mu^2)} \, \mathrm{d}\mu . \tag{24}$$

Pro závislost danou vztahem (23) by při obecném a byla integrace příliš složitá. V následujícím odstavci probereme proto některé zvláštní případy.

Dosadíme-li do (17) a (18) za L^2 a M^2 z (22), dostáváme pro zobecněné napětí a zobecněnou deformaci výrazy

$$(25) \qquad \sigma_z = k_1 \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sqrt{[2l^2(1 - 2l^2)(3 \operatorname{tg}^2 \varphi - 1) + 4l^2(1 - l^2)]},$$

$$d\varepsilon_z = k_2 \frac{d\varepsilon_1^p - d\varepsilon_3^p}{9(1 - l^2)} \sqrt{(2(5 - 9l^2)[(9l^2 - 1)(3 \operatorname{tg}^2 \psi - 1) + 8])}.$$

Pro stanovení konstant k_1 a k_2 máme vztah

$$k = k_1 k_2 = \frac{3}{2l} \sqrt{\left(\frac{1 - l^2}{5 - 9l^2}\right)}.$$

Další rovnici pro stanovení k_1 dostaneme z podmínky, že při prostém tahu, tj. pro $\varphi = 30°$, je $\sigma_3 = 0$ a $\sigma_z = \sigma_1$. Z (25) tedy vyplývá

$$1 = k_1 \sqrt{[l^2(1 - l^2)]},$$

takže

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{[l^2(1 - l^2)]}}$$

a konečně

$$k_2 = \frac{k}{k_1} = \frac{9}{4} \frac{1 - l^2}{\sqrt{(5 - 9l^2)}}.$$

Výrazy pro zobecněné napětí a zobecněnou deformaci dostávají po dosazení za k_1 a k_2 a po zavedení parametru a tvar

$$(26) \qquad \sigma_z = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sqrt{(a(\mu^2 - 1) + 4)},$$

$$d\varepsilon_z = \frac{d\varepsilon_1^p - d\varepsilon_3^p}{3} \sqrt{\left(\frac{7 - 4a}{4 - a}(\nu^2 - 1) + 4\right)}.$$

Pro prostý tah dostáváme

$$\sigma_z = \sigma_1, \quad d\varepsilon_z = d\varepsilon_1.$$

Z toho vyplývá, že závislost

$$\sigma_z = \sigma_z\left(\int d\varepsilon_z\right)$$

odpovídá závislosti

$$\sigma_1 = \sigma_1\left(\int d\varepsilon_1\right),$$

získané zkouškou při prostém tahu.

Z uvedeného je zřejmé, že přijmeme-li předpoklady 1, 2 a 3, existuje vzájemná souvislost mezi podmínkou plasticity, plastickým potenciálem, zobecněným napětím a zobecněnou deformací. Dosud se předpokládá, že existuje souvislost mezi podmínkou plasticity a plastickým potenciálem, která se brává ve velmi jednoduchém tvaru $f \equiv g$.

6.1. $a = 1$.

Tento případ odpovídá nejčastěji používané Misesově podmínce plasticity

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2\sigma_k}{\sqrt{(\mu^2 + 3)}}$$

nebo v napětích

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3 = \sigma_k^2 .$$

Rovnice křivky plasticity v polárních souřadnicích podle (9) je

$$\varrho = \sigma_k$$

a je to jak známo kružnice (obr. 6). Dosadíme-li $a = 1$ do (23) dostáváme

$$(3 + \mu\nu)^2 = (\mu^2 + 3)(\nu^2 + 3),$$

z čehož po úpravě vyplývá

$$\mu = \nu .$$

Vzhledem k tomu je potenciální křivkou opět kružnice. V tomto případě tedy platí vztah

$$f(\sigma_{ij}) \equiv g(\sigma_{ij}),$$

který předpokládá teorie Misesova. Pro přírůstek plastických deformací platí

$$d\varepsilon_{ij}^p = h \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} df = s_{ij} \, d\lambda ,$$

což je známá rovnice Reussova. Zobecněné napětí a zobecněná deformace jsou pro $a = 1$ podle (26) dány vztahy

$$\sigma_z = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\sqrt{(\mathrm{tg}^2 \varphi + 1)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\sqrt{(\mu^2 + 3)},$$

$$d\varepsilon_z = \frac{1}{\sqrt{3}}(d\varepsilon_1^p - d\varepsilon_3^p)\sqrt{(\mathrm{tg}^2 \psi +)\, 1} = \frac{1}{3}(d\varepsilon_1^p - d\varepsilon_3^p)\sqrt{(\nu^2 + 3)} .$$

Srovnáním těchto výrazů s výrazy (7) a (15) vidíme, že zobecněné napětí a zobecněná deformace se v tomto případě rovnají intensitě smykových napětí a intensitě plastických deformací, tj. platí

$$\sigma_z = \sigma_i , \quad d\varepsilon_z = d\varepsilon_i .$$

Uvedená teorie se tedy pro $a = 1$ přesně shoduje se známými vztahy teorie plastického tečení.

6.2. $a = 0$.

Podmínka plasticity je

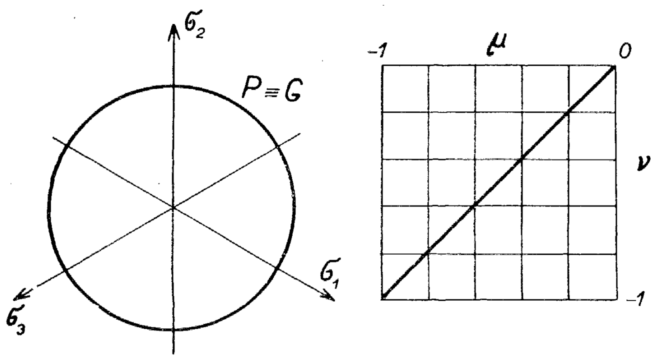
$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_k ,$$

což je známá podmínka Trescova. Křivka plasticity je podle (9) dána rovnicí

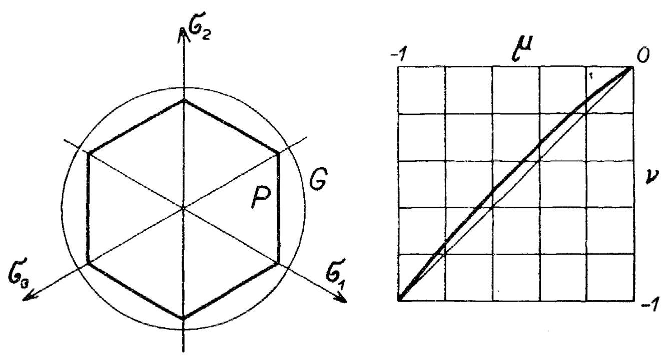
$$\varrho = \frac{\sigma_k}{2} \sqrt{(3 + \mu^2)}$$

a představuje známý šestiúhelník (obr. 7). Dosazením za $a = 0$ do (23) dostáváme

$$(3 + \mu\nu)^2 = 4\left[\tfrac{7}{4}(\nu^2 - 1) + 4\right]$$



Obr. 6. Křivka plasticity, křivka potenciální a závislost $\nu = \nu(\mu)$ podle odvozené teorie pro $a = 1$.



Obr. 7. Křivka plasticity, křivka potenciální a závislost $\nu = \nu(\mu)$ podle odvozené teorie pro $a = 0$. Křivka G je nakreslena přibližně jako kružnice.

a po úpravě

$$\nu = \frac{6\mu}{7 - \mu^2}.$$

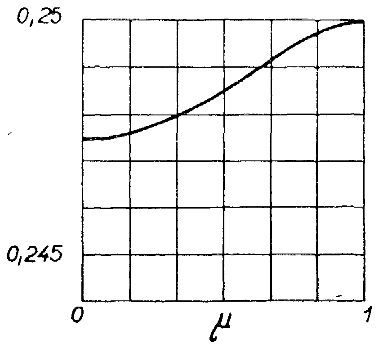
Tato závislost je nakreslena na obr. 7. Rovnice potenciální křivky podle (24) po dosazení za ν je

$$r = c_1 \exp \int \frac{\mu - \mu^3}{(7 + \mu^2)(3 + \mu^2)} \, d\mu = C \frac{\sqrt{(3 + \mu^2)}}{7 + \mu^2}.$$

Potenciální křivka se velmi nepatrně liší od kružnice, neboť funkce

$$\frac{\sqrt{(3+\mu^2)}}{7+\mu^2},$$

měnící se monotonně v rozmezí $0{,}25 \div 0{,}24743\ldots$, se jen velmi málo liší od konstanty (obr. 8). Dosazením $a = 0$ do (26) dostáváme pro zobecněné napětí a zobecněnou deformaci vztahy



Obr. 8. Průběh funkce $\sqrt{(3+\mu^2)}/(7+\mu^2)$ v intervalu $0 \leqq \mu \leqq 1$.

$$\sigma_z = \sigma_1 - \sigma_3\,,$$
$$d\varepsilon_z = \tfrac{1}{6}(d\varepsilon_1^p - d\varepsilon_3^p)\sqrt{(7\nu^2+9)}\,.$$

6.3. $a = \frac{7}{4}$.

V tomto druhém mezním případě je podmínka plasticity dána vztahem

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{4\sigma_k}{\sqrt{(7\mu^2+9)}}\,.$$

Křivka plasticity je dána rovnicí

$$\varrho = 2\sqrt{(3)}\sigma_k \sqrt{\left(\frac{\operatorname{tg}^2\varphi + 1}{21\operatorname{tg}^2\varphi + 9}\right)}$$

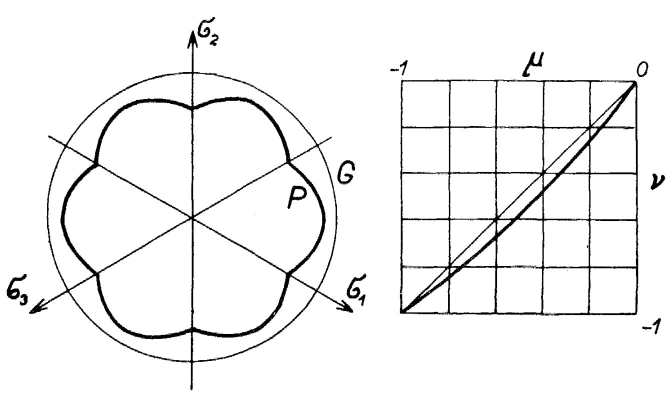
a je nakreslena na obr. 9. Dosazením za $a = \frac{7}{4}$ do (23) dostáváme

$$(3+\mu\nu)^2 = 7\mu^2 + 9$$

a po úpravě

$$\mu = \frac{6\nu}{7-\nu^2}\,.$$

Graf této funkce je zřejmě symetrický kolem přímky $\nu = \mu$ s grafem pro $a = 0$ a je



Obr. 9. Křivka plasticity, křivka potenciální a závislost $\nu = \nu(\mu)$ podle odvozené teorie pro $a = \frac{7}{4}$. Křivka G je nakreslena přibližně jako kružnice.

nakreslen na obr. 9. Pro potenciální křivku, stejným postupem jako v případě $a = 0$, dostaneme vztah

$$r = C \frac{\sqrt{(3 + \mu^2)}}{3 + \sqrt{(7\mu^2 + 9)}} .$$

Potenciální křivka se opět liší jen velmi nepatrně od kružnice. Pro zobecněné napětí a zobecněnou deformaci z (26) vyplývá

$$\sigma_z = \tfrac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_3) \sqrt{(7\mu^2 + 9)} ,$$
$$d\varepsilon_z = \tfrac{2}{3}(d\varepsilon_1^p - d\varepsilon_3^p) .$$

7. ZÁVĚR

Z teorie odvozené v této práci vyplývá:

1. Identita podmínky plasticity a plastického potenciálu dosud předpokládaná je zvláštním případem závislosti obecnější.

2. Existuje jednoznačná závislost mezi podmínkou plasticity, plastickým potenciálem a výrazy pro zobecněné napětí a zobecněnou deformaci.

3. Zobecněné napětí a zobecněná deformace se jen ve zvláštním případě rovná intensitě smykových napětí a intensitě plastických deformací.

4. Odvozená teorie plastického tečení je zobecněním Misesovy teorie pro podmínku plasticity se singulárními body. Misesova teorie je zvláštním případem teorie odvozené

5. Pro zobecněnou podmínku plasticity závislost $f(\mu, \nu)$, vyplývající z odvozené teorie, lépe odpovídá experimentálním výsledkům, než závislost vyplývající z teorie Koiterovy.

Literatura

[1] *Naghdi P. M.*,: Stress-strain relations in plasticity and thermoplasticity, Proc. of the Sec. Symp. on Naval Structural Mechanics, 1960, p. 121—167. Ruský překlad: Механика, № 1, 71, 1962, str. 87—133.

[2] Вопросы теории пластичности, Изд. АН СССР, Moskva 1961.

[3] *Yoshimura Y.*: Comment on the slip theory of Batdorf and Budiansky, Bulletin of JSME 1, No 2, 1958, 109—113. Ruský překlad: Механика, No 2, 60, 1960, str. 109—116.

[4] *Crossland B.*: The effect of fluid pressure on the shear properties of metals, Proc. Inst. Mech. Engrs, 169, 1954, p. 935—944.

[5] *Hill R.*: Mathematical theory of plasticity, Oxford 1950. Ruský překlad: Математическая теория пластичности, Moskva 1956.

[6] *Fujio N.*, *Yasuo S.*: Strain ratio relationship in plastic deformation, Bulletin of JSME 4, No 15, 1961, p. 437—442.

[7] *Ondráček E.*: Příspěvek k rozboru podmínek plasticity, sborník Aplikovaná mechanika a pružnost, NČSAV, Praha 1960.

[8] *Клюшников В. Д.*: О законах пластичности для материала с упрочнением. Прикл. мат. и мех. t. XXII, в. 1, 1958, 97—118.

Резюме

ВКЛАД В ТЕОРИЮ ПЛАСТИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

ЭМАНУИЛ ОНДРАЧЕК (Emanuel Ondráček)

В статье выведена теория пластического течения для сингулярной поверхности текучести, принципально отличающаяся от теории Койтера, а именно по следующим предположениям:

1. Скольжение в поликристаллическом материале начинается тогда, когда касательное напряжение τ_ϱ в плоскости ϱ, которая является средней плоскостью возможных плоскостей скольжения отдельных кристаллов, достигает предельного значения, причем скольжение протекает в плоскости ϱ', которая является средней плоскостью действительных плоскостей скольжения отдельных кристаллов.

2. Зависимость

$$\sigma_z = \sigma_z\left(\int \mathrm{d}\varepsilon_z\right), \quad \text{где} \quad \sigma_z = k_1\tau_\varrho\,, \quad \mathrm{d}\varepsilon_z = k_2 \,.\, \mathrm{d}\gamma_{\varrho'}\,,$$

(k_1, k_2 — постоянные) не зависит от напряженного состояния.

3. Считается правильной концепция пластического потенциала.

Выведенная теория является обобщением теории Мизеса, которая является ее частным случаем. Показано, что зависимость $f(\mu, \nu)$, вытекающая из приведенной теории, лучше соответствует экспериментальным результатам, чем зависимость, вытекающая из теории Койтера.

Zusammenfassung

BEITRAG ZUR THEORIE DES PLASTIZITÄTSPOTENZIALS

EMANUEL ONDRÁČEK

In diesem Artikel wird die Theorie der Plastizität für die singuläre Plastizitätsbedingung grundsätzlich verschieden von der Koiters Theorie abgeleitet, und zwar aus folgenden Voraussetzungen:

1. Der Schub in polykristallischen Material entsteht, wenn die Schubspannung τ_ϱ in der Ebene ϱ, welche die mittlere Ebene der möglichen Schubebenen in einzelnen Kristallen ist, den Grenzwert erreicht, wobei der Schub in der Ebene ϱ' entsteht, welche die mittlere Ebene der wirklichen Schubebenen bei einzelnen Kristallen ist.

2. Abhängigkeit

$$\sigma_z = \sigma_z\left(\int d\varepsilon_z\right),$$

in welcher $\sigma_z = k_1\tau_\varrho$, $d\varepsilon_z = k_2\, d\gamma_\varrho$, gilt ($k_1$, k_2 sind Konstanten) ist nicht von dem Spannungszustand abhängig.

3. Es gilt die Konzeption des Plastizitätspotenzials.

Die abgeleitete Theorie ist eine Verallgemeinerung der Theorie von Mises, welche ihr besonderer Fall ist. Es wird gezeigt, dass die aus der angeführten Theorie erfolgte Abhängigkeit $f(\mu, \nu)$ den experimentellen Ergebnissen besser entspricht als die Abhängigkeit, welche aus der Koiters Theorie erfolgt.

Adresa autora: Inž. *Emanuel Ondráček*, Žďár n. Sázavou III - 36/13.