Aplikace matematiky

Václav Vodička

# Explicitní tvar mocnin čtvercových dvouřádkových matic

*Aplikace matematiky*, Vol. 8 (1963), No. 4, 286–291

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102861

# EXPLICITNÍ TVAR MOCNIN ČTVERCOVÝCH DVOUŘÁDKOVÝCH MATIC

VÁCLAV VODIČKA

(Došlo dne 31. května 1962.)

Problém umocnit čtvercovou dvouřádkovou matici libovolným celým nezáporným exponentem souvisí jednoduše s úvahami z našeho dřívějšího článku [1]. Podrobnější zkoumání a použití této souvislosti je předmětem nynější práce.

## 1. FORMULACE ÚLOHY A ODVOZENÍ ZÁKLADNÍCH REKURENTNÍCH VZTAHŮ

a) Jde o výpočet mocniny $M^n$ dané matice

$$M = \begin{bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{bmatrix} \tag{1}$$

při libovolném celém $n \geqq 0$. Jako obvykle ovšem klademe

$$M^0 = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix} = E\,, \quad M^1 = M\,, \tag{2}$$

a proto stačí určit mocninu $M^n$ pro $n = 2, 3, 4, \ldots$

b) Přímým umocněním dostaneme

$$M^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc, & (a+d)\,b \\ (a+d)\,c, & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap - q, & bp \\ cp, & dp - q \end{bmatrix} = pM - qE\,,$$

tj. Cayleyův vztah

$$M^2 - pM + qM^0 = 0\,; \tag{3}$$

přitom jsme použili označení

$$p = a + d\,, \quad q = ad - bc\,. \tag{4}$$

Z formule (3) dospějeme znásobením mocninou $M^n$ k nové, která je východiskem našich dalších úvah, a proto ji vyjádříme větou 1:

**Věta 1.** *Mezi třemi po sobě následujícími mocninami $M^n$, $M^{n+1}$, $M^{n+2}$ matice* (1) *platí při označení* (4) *rekurentní vztahy*

$$M^{n+2} - pM^{n+1} + qM^n = 0\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

S pomocí tohoto výsledku lze ze základních hodnot (2) postupně vyjádřit mocniny $M^2, M^3, M^4, \ldots$ ve tvaru lineárních kombinací matic $E$, $M$. Úkol napsat přímo (tedy bez postupného počítání) obecný tvar mocniny $M^n$ při libovolném celém $n \geqq 2$ rozřešíme používajíce výsledků zmíněného už článku [1].

## 2. POMOCNÝ DIFERENČNÍ PROBLÉM

a) Věta 1 z předešlého odstavce ukazuje těsný vztah mezi výpočtem mocniny $M^n$ při jakémkoli celém $n \geqq 2$ a mezi řešením diferenčního problému

$$y_{n+2} - py_{n+1} + qy_n = 0\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

při daných hodnotách $y_0$, $y_1$.

Zavedeme-li označení

$$\alpha = \tfrac{1}{2}[p + \sqrt{(p^2 - 4q)}]\,, \quad \beta = \tfrac{1}{2}[p - \sqrt{(p^2 - 4q)}] \tag{7}$$

je možno při

$$\alpha - \beta = \sqrt{(p^2 - 4q)} \neq 0 \tag{8}$$

psát pro každé celé $n \geqq 2$ podle věty 3 z odst. 4 článku [1] $y_n$ ve tvaru

$$y_n = -\,qy_0L_{n-1} + y_1L_n\,, \quad n = 2, 3, 4, \ldots \tag{9}$$

Lucasova čísla $L_r$, jež tu figurují, jsou určena předpisem

$$L_r = \frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha - \beta}\,, \quad r = 1, 2, 3, \ldots \tag{9.1}$$

a dají se — opět podle výsledků zmíněné práce [1] — psát též ve formě

$$L_r = \sum_{\kappa=0}^{[(r-1)/2]} (-1)^\kappa \binom{r - \kappa - 1}{\kappa} p^{r-2\kappa-1}\, q^\kappa, \quad r = 1, 2, 3, \ldots\ ; \tag{9.2}$$

symbol $[a]$ znamená celistvou část čísla $a$.

b) Při dalších úvahách budeme potřebovat řešení $y_n$ rovnice (6) také ve výjimečném případě

$$\alpha - \beta = \sqrt{(p^2 - 4q)} = 0\,, \tag{10}$$

který jsme v předešlé úvaze vyloučili a který nebyl pro svou jednoduchost vzat v úvahu ani v citovaném článku [1].

I za těchto výjimečných poměrů dává formule (9) správné řešení, když v ní nahradíme Lucasova čísla $L_r$ jejich mezními hodnotami

$$L_r = \frac{1}{2^{r-1}}\, rp^{r-1}\,, \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

Vychází

$$(11)\qquad y_n = \frac{1}{2^n}\, p^{n-1}[-(n-1)\, py_0 + 2ny_1]\,, \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

a čtenář se snadno přesvědčí, že dává tento vzorec správný výsledek i pro $n = 0$, $n = 1$.

c) Výsledky, k nimž jsme právě dospěli, mají přímý vztah k určení mocniny $M^n$, jak jsme o tom mluvili v odst. 1. Proto je shrneme ve větě 2:

**Věta 2.** *Při označení* (7) *plynou z rekurentních vztahů* (6) *za předpokladu* (8) *formule* (9) *a v případě* (10) *vzorce* (11); *Lucasova čísla* $L_r$ *z formulí* (9) *lze počítat buď podle předpisu* (9.1) *nebo s pomocí vzorců* (9.2).

## 3. ŘEŠENÍ ZÁKLADNÍ ÚLOHY

a) Vrátíme se znovu ke svému původnímu problému, tj. k určení mocnin $M^n$, $n = 2, 3, 4, \ldots$ matice (1). Srovnáme-li spolu vztahy (5) a (6), vidíme, že lze tento úkol rozřešit přímo s pomocí věty 2.

Veličiny $p$, $q$ jsou v našem případě určeny vzorci (4) a proto vychází

$$(12)\qquad p^2 - 4q = (a-d)^2 + 4bc\,.$$

Ve smyslu věty 2 pak dospějeme k různým výsledkům podle toho, zda má výraz (12) nulovou hodnotu či nikoli.

b) V případě

$$(13)\qquad (a-d)^2 + 4bc = 0$$

má problém (5) podle formule (11) řešení

$$M^n = \frac{1}{2^n}\, p^{n-1}[2nM - (n-1)\, pE]\,, \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Dosadíme-li sem za $E$, $M$ podle (2), klademe-li dále $p = a + d$ a provedeme-li podle pravidel o počítání s maticemi naznačené výkony, dospíváme k výsledku, který lze vyjádřit větou 3:

**Věta 3.** *Za předpokladu* (13) *platí*

$$(14)\qquad \begin{bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{bmatrix}^n = \frac{1}{2^n}(a+d)^{n-1} \begin{bmatrix} (n+1)\, a - (n-1)\, d, & 2nb \\ 2nc, & -(n-1)\, a + (n+1)\, d \end{bmatrix},$$

$$n = 2, 3, 4, \ldots$$

Poznámky. Formule (14) dává zřejmě správný výsledek i pro $n = 1$ a při $a + d \neq 0$ také pro $n = 0$.

Některé případy se řeší v literatuře dosti pracně s pomocí poznatků o podobnosti matic, kdežto náš vzorec (14) dává výsledek téměř bez počítání. To platí třeba o vztahu

$$\begin{bmatrix} 7, & 4 \\ -9, & -5 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 6n + 1, & 4n \\ -9n, & -6n + 1 \end{bmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

uvedeném na str. 34 knihy [2].

c) Zbývá ještě pojednat o případě

$$(a - d)^2 + 4bc \neq 0 . \tag{15}$$

Poměry jsou tu složitější a dají se podle věty 2 a úvah z odst. 2 vyslovit větou 4:

**Věta 4.** *Za předpokladu* (15) *platí*

$$\begin{bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} aL_n - qL_{n-1}, & bL_n \\ cL_n, & dL_n - qL_{n-1} \end{bmatrix}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots ; \tag{16}$$

*Lucasova čísla $L_r$ přitom počítáme s pomocí hodnot* (4) *a charakteristických konstant* (7) *dané matice* (1) *podle kteréhokoli z předpisů* (9.1), (9.2).

## 4. PŘÍKLADY

Věty 3 a 4 předešlého odstavce řeší naši původní úlohu, tj. umožňují určit mocninu $M^n$ matice (1) pro každé celé $n \geqq 2$. Příslušné výpočty jsou zcela snadné s výjimkou obecného případu, kdy není výraz (15) úplnou dvojmocí.

Ukážeme si nyní na několika konkrétních příkladech použití zmíněných základních vět 3 a 4 z odst. 3.

Příklad 1. V případě matice $\begin{bmatrix} 2, & 3 \\ 1, & 4 \end{bmatrix}$ máme

$$p = 6, \quad q = 5, \quad p^2 - 4q = 16, \quad \alpha = 5, \quad \beta = 1$$

a podle vzorců (9.1) vychází

$$L_r = \tfrac{1}{4}(5^r - 1), \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

S těmito hodnotami pak vede předpis (16) k formuli

$$\begin{bmatrix} 2, & 3 \\ 1, & 4 \end{bmatrix}^n = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5^n + 3, & 3(5^n - 1) \\ 5^n - 1, & 3 \cdot 5^n + 1 \end{bmatrix}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots,$$

která dává správné výsledky i pro $n = 0, 1$.

Příklad 2. Jde-li o matici $\begin{bmatrix} 2, & 4 \\ 1, & 3 \end{bmatrix}$, platí

$$p = 5, \quad q = 2, \quad p^2 - 4q = 17, \quad \alpha, \beta = \tfrac{1}{2}(5 \pm \sqrt{17})$$

a předpis (9.1) dává Lucasova čísla, která potřebujeme pro napsání vzorců (16), v iracionálním tvaru. Formule (9.2) zase dávají zmíněná Lucasova čísla $L_r$ ve tvaru součtů, které je nutno zvláště počítat.

Tak třeba vyjde $L_4 = 105$, $L_5 = 479$ a předpis (16) dává

$$\begin{bmatrix} 2, & 4 \\ 1, & 3 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 748, & 1916 \\ 479, & 1227 \end{bmatrix}.$$

Příklad 3. K libovolné permutaci $(a, b, c, d)$ čtyř po sobě jdoucích celých čísel $m - 1$, $m$, $m + 1$, $m + 2$ přiřaďme matici typu (1). Je tedy dohromady 24 matic, jichž prvky jsou zmíněná celá čísla, a z nich je 8 takových, že je pro ně výraz $(a - d)^2 + 4bc$ kladným čtvercem při všech celých hodnotách $m$. U dalších 8 z uvedených matic je onen výraz jen pro jednu hodnotu $m$ roven nule, pro všechna ostatní celá $m$ je opět kladným čtvercem. A konečně ve zbývajících 8 případech je hodnota $(a - d)^2 + 4bc$ jen pro některé zvláštní hodnoty celého čísla $m$ úplnou dvojmocí.

Matice našeho speciálního typu se zřejmě dělí na skupiny, z nichž každá vykazuje při umocňování řadu společných rysů. Tak dospějeme např. ke společným výrazům

$$q = -2(2m + 1), \quad L_r = \frac{1}{2m + 3} \left[(2m + 1)^r + (-1)^{r+1} 2^r\right], \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

pro matice

$$\begin{bmatrix} m - 1, & m + 1 \\ m + 2, & m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} m - 1, & m + 2 \\ m + 1, & m, \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} m, & m + 1 \\ m + 2, & m - 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} m, & m + 2 \\ m + 1, & m - 1 \end{bmatrix},$$

jichž mocniny se z těch výrazů počítají podle vzorce (16). Je tudíž třeba

$$\begin{bmatrix} m, & m + 1 \\ m + 2, & m - 1 \end{bmatrix}^n =$$

$$= \frac{1}{2m + 3} \begin{bmatrix} (m + 2)(2m + 1)^n + (-2)^n (m + 1), & (m + 1)\left[(2m + 1)^n + (-1)^{n+1} 2^n\right] \\ (m + 2)\left[(2m + 1)^n - (-2)^n\right], & (m + 1)(2m + 1)^n + (-2)^n (m + 2) \end{bmatrix},$$

a to pro všechna celá $m$ a pro všechna $n = 0, 1, 2, \ldots$

## 5. ZÁVĚR

Je řada možností, jak použít výsledků předešlých úvah a jak je dále zobecnit. Uvádíme tu alespoň některé z takových dalších otázek.

**5.1.** Cenné služby prokazují naše věty 3 a 4 v teoretické elektrotechnice (zejména v teorii řetězových vodičů), dále v některých problémech o postupu mechanických a tepelných procesů ve vrstevnatých kontinuích.

**5.2.** Předešlých výsledků lze použít ke studiu funkcí dvouřádkových čtvercových matic. Mimo jiné lze s jejich pomocí řešit i základní otázku, tj. provést skutečnou konstrukci třeba exponenciely $e^M$, výrazů $\cos M$, $\sin M$, Besselovy funkce $J_0(M)$ atd. při obecně dané matici $M$ tvaru (1).

**5.3.** Základní myšlenky předešlých odstavců se současným přihlédnutím k některým skutečnostem ze spektrální teorie matic umožňují řešit principiálně problém konstrukce přirozené mocniny $M^n$ čtverečné matice $M$ s obecným počtem řádků a sloupců.

Právě uvedené i různé jiné teoretické a praktické otázky budou předmětem dalších prací. Dospějeme v nich mimo jiné elementární cestou k některým důležitým klasickým výsledkům Cayleyovým a Sylvesterovým.

## Literatura


[1] *Vodička:* O použití výrazu $\alpha^n + \beta^n$, Aplikace metamatiky, sv. 7, 1962, čís. 4, str. 272–281.

[2] *Мальцев:* Основы линейной алгебры, Гос. Изд. Техн.-Теор. Лит., Москва-Ленинград, 1948.


## Резюме

## ЯВНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ СТЕПЕНЕЙ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА


ВАЦЛАВ ВОДИЧКА (Václav Vodička)



Вычисление неотрицательной целочисленной степени $M^n$ двухстрочной матрицы $M$ находится в связи с решением однородной задачи разностных уравнений. Доказательство этого обстоятельства и его использование при возвышении в степень матриц является содержанием настоящей работы. Несколько примеров служит к пояснению общих рассуждений; в конце работы вкратце отмечаются различные возможности расширения и приложений.


## Zusammenfassung

## EXPLIZITE FORM VON POTENZEN EINER QUADRATISCHEN ZWEIREIHIGEN MATRIX


Václav Vodička



Die Berechnung der nichtnegativen ganzzahligen Potenz $M^n$ einer zweireihigen Matrix $M$ hängt mit der Lösung eines homogenen Differenzengleichungsproblems zusammen. Der Beweis dieser Tatsache und ihre Benützung beim Potenzieren von Matrizen bilden den Inhalt unseres Aufsatzes. Einige Beispiele dienen zur Erläuterung der allgemeinen Ausführungen und am Ende der Arbeit wird kurz auf verschiedene Erweiterungs- und Anwendungsmöglichkeiten hingewiesen.



Adresa autora: Dr. *Václav Vodička*, Moskevská 52, Plzeň.