

# Апликace математикy

---

Ivan Hlaváček

Несимметричный прогиб пологой сферической оболочки с начальной деформацией под действием внешнего давления

*Aplikace matematiky*, Vol. 8 (1963), No. 6, 399–410

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102874>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1963

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## НЕСИММЕТРИЧНЫЙ ПРОГИБ ПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С НАЧАЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИЕЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

ИВАН ГЛАВАЧЕК (Ivan Hlaváček)

(Поступило в редакцию 6/IV 1963 г.)

Составляются алгебраические уравнения для вычисления характеристик нагрузка — деформация шарнирно подкрепленной пологой упругой сферической оболочки, которая подвергается равномерно распределенному внешнему давлению и у которой имеются несимметричные начальные прогибы.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема устойчивости упругой тонкой сферической оболочки под действием внешнего давления является предметом многих исследований уже с начала нашего столетия.

Р. Цоли [1] и Л. С. Лейбензон [2] решили эту задачу посредством интегрирования уравнений безразличного равновесия в теории малых деформаций и получили критическое давление

$$(1) \quad p_k = \frac{2}{\sqrt{[3(1 - \nu^2)]}} E \left( \frac{t}{R} \right)^2 \quad (\text{где } \nu - \text{коэффициент Пуассона})$$

и при этом порядок относительной ошибки —  $t/R$ .

Они предполагали, что произойдет „локальная“ потеря устойчивости безмоментного напряженного состояния. При этом создаются короткие волны, длина которых имеет порядок  $\sqrt{Rt}$  ([3]) и все геометрические параметры в области одной такой волны можно считать постоянными, не сделав ошибку больше чем  $\sqrt{Rt}$  ([4]).

В. З. Власов [5] нашел при помощи точнейшей, моментной теории сферических оболочек критическое давление

$$p_k = \frac{2}{\sqrt{[3(1 - \nu^2)]}} E \left( \left( \frac{t}{R} \right)^2 - \frac{\nu}{6} \left( \frac{t}{R} \right)^3 \right),$$

но эта формула не отличается на практике от формулы (1), если припомнить, что  $(v/6) \cdot (t/R) \ll 1$ .

Реальные оболочки и их модели показывают совершенное несогласие с приведенными значениями, о чем свидетельствуют экспериментальные результаты и опыты многих авторов ([6]–[14]). Критические напряжения при потере устойчивости представляют 5–90% теоретических, вычисленных по формуле (1).

Правильное объяснение этого большого рассеяния является сложным вопросом.

Т. Карман и Г. С. Тзянь [9] первые показали при помощи нелинейной теории больших прогибов, что если величина нагрузки находится с определенном промежутке (который расположен ниже классического критического давления (1)), тогда существуют помимо безмоментного уравновешенного состояния еще уравновешенные состояния с малыми но конечными деформациями изгиба.

Предполагая, что перемещения оболочки представимы как линейная комбинация нескольких подходяще избранных простых функций, мы можем часто в нелинейной теории больших прогибов установить зависимости между нагрузкой (внешним давлением) и коэффициентами приведенной линейной комбинации – т. наз. характеристики нагрузка – деформация. Посредством их можно изучать поведение оболочки, главным образом возможность „хлопка“ или потери устойчивости в большом, т. е. внезапного перехода от одного устойчивого равновесия до другого устойчивого равновесия, соединенного с конечным изменением деформации. За хлопком оболочка должна преодолеть определенный энергетический барьер, что может осуществиться например за счет начальных несовершенств по форме, начальных напряжений колебаний в течение загрузки и т. п.

Далее возможно, что теоретическое значение энергетического барьера понизится, если будем рассматривать тоже другие, в том числе и несимметричные формы перемещений (ср. [15], [16]) и что потом может быть преодолена за счет очень маленьких, в действительности всегда существующих несовершенств оболочки.

Очевидно, что проблему надо толковать не только с точки зрения механики а тоже статистики (ср. [17]). Каждое отклонение от идеальных свойств оболочки является случайной величиной, определяющей условия эксперимента. Согласно статье Л. Г. Донэла и Ц. Ц. Уана [18] можно сосредоточить влияние этих отклонений во влияние толко т. наз. „неизбежных“ начальных прогибов.

Начальные прогибы сферической оболочки рассматривались до сих пор только в предположении осевой симметрии начальных и дополнительных прогибов (ср. [12] – § 58, стр. 374 или [19]), хотя реальные оболочки не обладают точно симметричной формой ([10], [11], [14]).

Нужно разобрать, как следует, также случай несимметричного начального и дополнительного прогиба, и это мы поставили целью настоящей работы.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

У пологого сферического сегмента имеются еще в незагруженном состоянии начальные прогибы

$$w^0 = t \zeta_s^0 P_s(\varrho) + t \zeta_a^0 P_a(\varrho) \cos \beta, \quad \varrho \in \langle 0, 1 \rangle, \quad \beta \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

Здесь  $\varrho = r/a$  отношение отстояния от оси вращения к радиусу опорного кольца,  $t$  толщина оболочки (фиг. 1),  $P_s(\varrho)$ ,  $P_a(\varrho)$  подходяще избранные простые полиномы, удовлетворяющие краевым условиям и соответствующие симметричной, или же „антисимметричной“ деформации,  $\zeta_s^0$  или же  $\zeta_a^0$  безразмерные параметры симметричного, или же „антисимметричного“ начального прогиба,  $\beta$  угол меридиана.

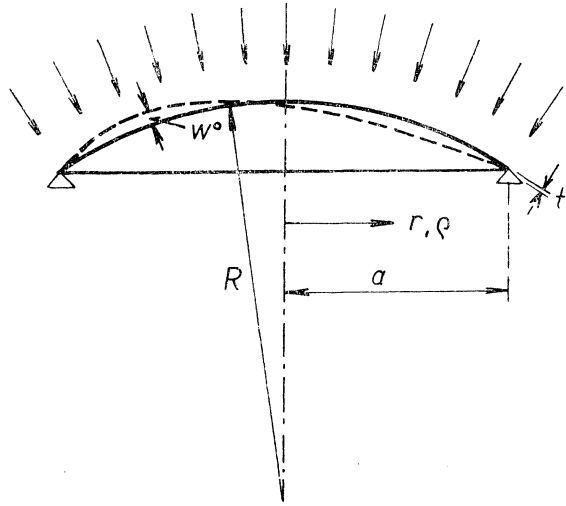


Рис. 1.

Кроме того мы употребили обозначения, предположения и выводы из §§ 20, 25 и 58 книги Х. М. Муштары и К. З. Галимова [12].

Задачу мы будем решать в перемещениях  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Это компоненты упругого смещения в осях сопровождающего триэдра в радиальном, тангенциальном и нормальном направлении недеформированной срединной поверхности оболочки.

Уравнения равновесия мы решим, применяя вариационный метод Бубнова-Галеркина, приблизительно так, что положим (см. [12], (25.23))

(2.1)

$$\iint_{\Omega} \left[ \left( T_1 - T_2 + \varrho \frac{\partial T_1}{\partial \varrho} + \frac{\partial T_{12}}{\partial \beta} \right) \delta u + \left( 2T_{12} + \varrho \frac{\partial T_{12}}{\partial \varrho} + \frac{\partial T_2}{\partial \beta} \right) \delta v \right] d\varrho d\beta = 0,$$

$$(2.2) \quad \iint_{\Omega} \left[ D \cdot \Delta \Delta w + T_2 \left( \kappa_2 + \kappa_2^0 + \frac{1}{R} \right) + 2T_{12} (\kappa_{12} + \kappa_{12}^0) + T_1 \left( \kappa_1 + \kappa_1^0 + \frac{1}{R} \right) + \right. \\ \left. + p - \left( T_1 - T_2 + \varrho \frac{\partial T_1}{\partial \varrho} + \frac{\partial T_{12}}{\partial \beta} \right) \frac{1}{a^2 \varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (w + w^0) - \right. \\ \left. - \left( 2T_{12} + \varrho \frac{\partial T_{12}}{\partial \varrho} + \frac{\partial T_2}{\partial \beta} \right) \frac{1}{a^2 \varrho^2} \frac{\partial}{\partial \beta} (w + w^0) \right] \delta w \cdot \varrho d\varrho d\beta = 0.$$

Здесь  $T_1, T_2, T_{12}$  — нормальные и сдвигающие усилия в резе  $\varrho = \text{конст.}$ , или же  $\beta = \text{конст.}$  деформированной оболочки,  $\kappa_1, \kappa_2$  — изменения нормальной кривизны линий  $\varrho = \text{конст.}$ , или же  $\beta = \text{конст.}$ ,  $\kappa_{12}$  кручение параметрических линий деформированной срединной поверхности,  $\kappa_1^0, \kappa_2^0, \kappa_{12}^0$  аналогические величины, принадлежащие начальным прогибам  $w^0$ ,  $p$  — равномерно распределенное нормальное внешнее давление,  $\Omega$  — область  $\varrho \in (0, 1)$ ;  $\beta \in (-\pi, \pi)$ .

Уравнение (2.1) соответствует условиям равновесия в тангенциальных направлениях, уравнение (2.2) в направлении нормали деформированной срединной поверхности (3-й вариант уравнений Бубнова-Галеркина). Эти уравнения мы легко выведем из (25.23) — [12], незначительно видоизменив их путем подстановки:  $\partial/\partial\alpha = (1/a)(\partial/\partial\varrho)$ ,  $B(\varrho) = a\varrho$ . Оператор Лапласа обозначает здесь  $\Delta = (1/a^2)[(1/\varrho)(\partial/\partial\varrho) + (\partial^2/\partial\varrho^2) + (1/\varrho^2)(\partial^2/\partial\beta^2)]$ .

Примечание: Аналогичную систему уравнений употребил М. С. Корнишин [15] при решении антисимметричных прогибов пологой цилиндрической панели под поперечной нагрузкой.

Систему (2.1), (2.2) переведем постепенно в систему алгебраических уравнений путем развития искомых функций в конечные ряды.

### 3. ШАРНИРНО ПОДКРЕПЛЕННАЯ ОБОЛОЧКА С НЕСМЕЩАЮЩИМИСЯ КРАЯМИ

Дополнительный прогиб мы выберем в той же самой форме, как и начальный  $w^0$

$$(3.1) \quad w = t\zeta_s P_s(\varrho) + t\zeta_a P_a(\varrho) \cos \beta, \quad \varrho \in \langle 0, 1 \rangle, \quad \beta \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

В дальнейшем мы ограничимся тем случаем, в котором края шарнирно подкреплены, но не смещаются.

Следовательно, имеет силу при

$$(3.2) \quad \varrho = 1, \quad u = v = w = 0$$

и дальше изгибающий момент на контуре, т. е. при  $\varrho = 1$ ,  $M_1 = 0$ , откуда следует

$$(3.3) \quad (\kappa_1 + \nu\kappa_2)|_{\varrho=1} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= -\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} = -\frac{t}{a^2} [\zeta_s P_s''(\varrho) + \zeta_a P_a''(\varrho) \cos \beta], \\ \kappa_2 &= -\frac{1}{a^2} \left( \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial \varrho} \right) = -\frac{t}{a^2} \left[ -\frac{1}{\varrho^2} \zeta_a P_a(\varrho) \cos \beta + \frac{\zeta_s}{\varrho} P_s'(\varrho) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\zeta_a}{\varrho} P_a'(\varrho) \cos \beta \right], \end{aligned}$$

где черточками обозначены обыкновенные производные.

Прогиб  $w(\varrho, \beta)$  должен, однако, удовлетворять еще дальнейшему условию

$$(3.4) \quad \Delta \Delta w < \infty$$

в окрестности полюса  $\varrho = 0$ .

Для полиномов  $P_s(\varrho)$ ,  $P_a(\varrho)$  это значит, что должно быть

$$P_s^{IV} + \frac{2}{\varrho} P_s''' - \frac{1}{\varrho^2} P_s'' + \frac{1}{\varrho^3} P_s'$$

(и аналогично для  $P_a(\varrho)$ ) опять полиномом в  $\varrho$ . Выберем

$$(3.5) \quad \begin{aligned} P_s(\varrho) &= \varrho^4 - 2v_1 \varrho^2 + A, \\ P_a(\varrho) &= \varrho^4 + b\varrho^3 - c\varrho, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} v_1 &= (3 + \nu)/(1 + \nu), \quad A = 2v_1 - 1, \\ c &= -(v + 6)/(2v + 6), \quad b = c - 1 \quad ([12], \text{ § 58}). \end{aligned}$$

Это простейшие полиномы, удовлетворяющие условиям (3.2), (3.3), (3.4) и условию  $P_a(0) = 0$ .

Тангенциальные перемещения мы выбираем в форме конечных рядов

$$(3.6) \quad u = \sum_{i=0}^m C_i Q_i(x) + [U_0 u_{10}(x) + \sum_{i=0}^n D_i Q_i(x)] \cos \beta + \sum_{i=0}^k E_i Q_i \cos 2\beta,$$

$$(3.7) \quad v = [-U_0 u_{10}(x) + \sum_{i=0}^l F_i Q_i(x)] \sin \beta + \sum_{i=0}^p G_i Q_i(x) \sin 2\beta.$$

Здесь

$$\begin{aligned} x &= 2\varrho - 1 \quad (x \in \langle -1; 1 \rangle), \\ Q_i(x) &= P_{i+2}(x) - P_i(x), \quad Q_i(-1) = Q_i(+1) = 0; \end{aligned}$$

$u_{10}(x) = P_1(x) - P_0(x)$  подходящий полином, удовлетворяющий условиям

$$u_{10}(-1) \neq 0, \quad u_{10}(1) = 0,$$

$P_i(x)$  полином Лежандра,  $i, m, n, k, l, p$  натуральные числа,  $C_i, D_i, E_i, F_i, G_i, U_0$  неизвестные параметры.

Форму развития (3.6), (3.7) мы установили на основе предварительного вычисления путем применения метода функции напряжений. Этот метод, применяемый, как правило, при решении симметричной деформации пологих оболочек, очерченных по поверхностям вращения, в нашем случае встречается трудности при удовлетворении краевых условий и условий периодичности относительно угла  $\beta$ .

Как видно, приведенные выражения  $u(x, \beta)$  и  $v(x, \beta)$  удовлетворяют краевому условию  $u = v = 0$  при  $\varrho = 1$ , т. е.  $x = 1$ .

Далее удовлетворены также условия совместности деформаций в полюсе  $q = 0$ , т. е.  $x = -1$ ,

$$u(-1, \beta) = u_0 \cos \beta, \quad v(-1, \beta) = -u_0 \sin \beta,$$

где  $u_0 = u(-1, 0)$  является общим тангенциальным перемещением полюса в направлении  $\beta = 0$ . Из (3.6) и (3.7) следует, что  $u_0 = U_0 u_{01}(-1)$ . Вместе с тем мы удовлетворили и условию, что относительные деформации и сдвиг в срединной поверхности являются в полюсе конечными, т. е.

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} (\omega_1^2 + 2\omega_1 \omega_1^0) < \infty, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{a q} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{a q} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} (\omega_2^2 + 2\omega_2 \omega_2^0) < \infty, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial q} + \frac{1}{a q} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} - v \right) + \omega_1 \omega_2 + \omega_1^0 \omega_2 + \omega_1 \omega_2^0 \right] < \infty \end{aligned}$$

при  $q = 0$ .

Здесь мы обозначили через

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial q}, & \omega_1^0 &= \frac{1}{a} \frac{\partial w^0}{\partial q}, \\ \omega_2 &= \frac{1}{a q} \frac{\partial w}{\partial \beta}, & \omega_2^0 &= \frac{1}{a q} \frac{\partial w^0}{\partial \beta} \end{aligned}$$

повороты касательной плоскости, соответствующие дополнительным, или же начальным прогибам.

При вычислении мембранных усилий по формулам

$$T_1 = \frac{Et}{1 - \nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), \quad T_2 = \frac{Et}{1 - \nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1), \quad T_{12} = \frac{Et}{1 + \nu} \varepsilon_{12},$$

(где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$  определим из (3.8)) и при подстановке в (2.1), (2.2) мы выгодно используем дифференциальные свойства полиномов Лежандра. Дело в том, что мы переведем выражения, напр.

$$\frac{1}{q} Q_i, \quad 2Q'_i - \frac{1}{q} Q_i, \quad 4qQ''_i$$

опять в линейные комбинации полиномов Лежандра, что и очень облегчит ортогонализацию.

Как нетрудно убедиться, система координатных функций  $\{Q_i\}_0^\infty$  или же  $\{u_{10}, Q_i\}_0^\infty$  не является, правда, ортогональной, но она образует всегда полную в достаточно широком классе систему линейно независимых функций, как показывает следующая теорема:

Система  $\{Q_i\}_0^\infty$  полна в смысле равномерной сходимости в классе функций, для которых:

а)  $f'''(x)$  абсолютно непрерывна на отрезке  $\langle -1, +1 \rangle$ ,

б)  $f(-1) = f(1) = 0$ .

Приведем доказательство этого утверждения:  
 функцию  $f$  из данного класса можно представить в виде

$$(1) \quad f(x) = \tilde{f}(x) - \frac{1}{2}[\tilde{f}(-1) + \tilde{f}(1)] - \frac{1}{2}[\tilde{f}(1) - \tilde{f}(-1)]x,$$

где  $\tilde{f}(x)$  уже в общем удовлетворяет только условию а).

Построим ряд Фурье по многочленам Лежандра для производной  $\tilde{f}'(x)$

$$(2) \quad \tilde{f}'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i P_i(x).$$

Ряд сходится равномерно на отрезке  $\langle -1, 1 \rangle$ , так как  $f'(x)$  обладает абсолютно непрерывной второй производной (см. [20], стр. 572). Для многочленов Лежандра имеет силу формула

$$(3) \quad Q_i'(x) = P'_{i+2}(x) - P'_i(x) = (2i + 3) P_{i+1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

и разложение (2) можно видоизменить следующим образом

$$(4) \quad \tilde{f}'(x) = a_0 P_0(x) + \sum_{i=0}^{\infty} b_i Q_i'(x),$$

где  $b_i = a_{i+1}/(2i + 3)$ ,  $P_0(x) = 1$ .

Уравнение (4) можем теперь интегрировать почленно с сохранением равномерной сходимости

$$\tilde{f}(x) = a_{00} + a_0 x + \sum_{i=0}^{\infty} b_i Q_i(x).$$

Подставляя сюда краевые значения ( $x = \pm 1$ ) и сравнивая с (1), мы легко проверим, что

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i Q_i(x)$$

и сходимость равномерна.

Примечание: Можно поставить другие достаточные условия равномерной сходимости вместо условия а) — см. напр. [21], стр. 183).

#### 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В рядах (3.6) и (3.7) мы ограничимся шести простейшими членами, выбирая всюду  $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ .



После проведения ортогонализации мы получим следующие три системы линейных уравнений:

6 уравнений для  $C_i$ ,

13 уравнений для  $U_0, D_i, F_i$ ,

12 уравнений для  $E_i, G_i$ .

Правые стороны этих уравнений, и следовательно и решения, являются линейными комбинациями выражений

$$K_{1s} = \frac{t^2}{2a^2} (\zeta_s^2 + 2\zeta_s\zeta_s^0), \quad K_{1a} = \frac{t^2}{2a^2} (\zeta_a^2 + 2\zeta_a\zeta_a^0),$$

$$K_{2s} = \frac{t}{R} \zeta_s, \quad K_{2a} = \frac{t}{R} \zeta_a, \quad K_{as} = \frac{t^2}{a^2} (\zeta_s\zeta_a + \zeta_s\zeta_a^0 + \zeta_s^0\zeta_a).$$

Результаты вычислений (для  $\nu = 0,3$ ) мы приведем в таблице:

Таблица 1.

Параметры тангенциальных перемещений

	$K_{2s}$	$K_{1s}$	$K_{1a}$		$K_{2a}$	$K_{as}$
$C_0/a$	+0,3402	-4,257	+0,001045	$D_0/a$	-0,1294	+0,3825
$C_1/a$	+0,05155	+0,1393	-0,03201	$D_1/a$	+0,01190	-0,4237
$C_2/a$	-0,007737	+0,2380	-0,002778	$D_2/a$	+0,007764	+0,1622
$C_3/a$	-0,0008606	+0,2517	+0,01273	$D_3/a$	-0,008296	+0,05967
$C_4/a$	+44 · 10 <sup>-8</sup>	-0,1389	-0,003296	$D_4/a$	+0,004176	-0,01764
$C_5/a$	-19 · 10 <sup>-8</sup>	+0,05651	+0,001076	$D_5/a$	-0,001805	+0,007118
	$K_{1a}$		$K_{1a}$	$F_0/a$	+0,2059	-0,7649
$E_0/a$	-0,01546	$G_0/a$	-0,01179	$F_1/a$	+0,01472	+0,2751
$E_1/a$	-0,02768	$G_1/a$	+0,01321	$F_2/a$	-0,01125	+0,01572
$E_2/a$	-0,006999	$G_2/a$	+0,006695	$F_3/a$	+0,006725	-0,06917
$E_3/a$	+0,01448	$G_3/a$	-0,01101	$F_4/a$	-0,003053	+0,02363
$E_4/a$	-0,004021	$G_4/a$	+0,005239	$F_5/a$	+0,001278	-0,008693
$E_5/a$	+0,001098	$G_5/a$	-0,002531	$U_0/a$	+0,1627	-1,633

Остается удовлетворить уравнению (2.2), т. е. условию равновесия в направлении нормали.

Если бы мы удовлетворили условиям равновесия в тангенциальных направлениях точно, то отпали бы в (2.2) две последние скобки с мембранными усилиями. Так как мы путем ортогонализации удовлетворили этим условиям только приблизительно, мы на всякий случай сохраним обе скобки и в дальнейшем.

Вариация  $(1/t) \delta w = P_s(\varrho) \delta \zeta_s + P_a(\varrho) \cos \beta \delta \zeta_a$  (по (3.1)), следовательно, мы положим

$$(4.1) \quad \iint_{\Omega} [X] P_s(\varrho) \varrho \, d\varrho \, d\beta = 0,$$

$$(4.2) \quad \iint_{\Omega} [X] P_a(\varrho) \varrho \cos \beta \, d\varrho \, d\beta = 0,$$

где  $[X]$  является символом для выражения в квадратных скобках (2.2). Интегрирование в (4.1) и (4.2) кропотливо, даже если мы используем, точно так же, как при ортогонализации (2.1), дифференциальные свойства полиномов Лежандра и их ортогональность относительно всех полиномов более низкой степени.

Теперь мы введем обозначения

$$\gamma = \frac{a^2}{tR}, \quad x = \zeta_s + \zeta_s^0, \quad y = \zeta_a + \zeta_a^0, \\ x_0 = \zeta_s^0, \quad y_0 = \zeta_a^0,$$

откуда следует

$$K_{1s} = \frac{t^2}{2a^2} (x^2 - x_0^2), \quad K_{2s} = \frac{t}{R} (x - x_0), \quad K_{2a} = \frac{t}{R} (y - y_0), \\ K_{1a} = \frac{t^2}{2a^2} (y^2 - y_0^2), \quad K_{as} = \frac{t^2}{a^2} (xy - x_0y_0).$$

Уравнение (4.1) после подстановки вычисленных коэффициентов из таблицы 1 и после видоизменения дает

$$(4.3) \quad \frac{pa^4}{Et^4} = -x^3 \cdot 98,72 + x^2(x_0 \cdot 0,01007 - \gamma \cdot 70,25) + xy^2 \cdot 3,106 + \\ + xy y_0 \cdot 2,300 + x(x_0^2 \cdot 98,72 + y_0^2 \cdot 1,849 + \gamma x_0 \cdot 46,83 - \gamma^2 \cdot 6,090) + \\ + y^2(-\gamma \cdot 0,0259 + x_0 \cdot 0,01908) + y(-x_0 y_0 \cdot 2,655 - \gamma y_0 \cdot 0,8749) + \\ + \gamma x_0^2 \cdot 23,42 + \gamma y_0^2 \cdot 0,9009 - x_0 y_0^2 \cdot 2,320 - x_0^3 \cdot 0,01007 + \gamma^2 x_0 \cdot 6,090.$$

Уравнение (4.2) дает

$$(4.4) \quad x^2(y \cdot 1,332 - y_0 \cdot 1,130) + x(\gamma y \cdot 1,0792 - \gamma x_0 \cdot 1,999 - \\ - \gamma y_0 \cdot 0,1142 + x_0 y_0 \cdot 3,232) + y^3 \cdot 0,01350 - y^2 y_0 \cdot 0,01175 + \\ + y(\gamma^2 \cdot 0,05139 - \gamma x_0 \cdot 0,5704 - x_0^2 \cdot 4,564 - y_0^2 \cdot 0,01350) - \\ - \gamma x_0 y_0 \cdot 0,3946 - \gamma^2 y_0 \cdot 0,05139 + x_0^2 y_0 \cdot 3,130 + y_0^3 \cdot 0,01175 = 0.$$

Чтобы вычислить характеристики нагрузка—прогиб, можно, как правило, при данных  $\gamma$ ,  $x_0$ ,  $y_0$  применить следующий способ: выбирая определенную последовательность значений  $u$ , вычислим для каждого  $u$  по квадратичному уравнению (4.4) соответствующие значения  $x$ . После подстановки  $x$ ,  $u$  в уравнение (4.3) мы получим соответствующие давление  $p$ .

## 5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ПРИМЕЧАНИЯ О ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Если мы тщательно исследуем влияние последних членов в развитиях (3.6), (3.7) на окончательные коэффициенты уравнений (4.3) и (4.4), то установим следующее:

Интегрируя уравнения (4.1) и (4.2), мы можем пренебречь всеми членами, содержащими полином  $Q_5$ ; ошибка, допущенная этим в окончательных коэффициентах, не превысит 1%, что в виду приближенности всей теории пологих оболочек является допустимой ошибкой. Следовательно, достаточно ограничить ряды (3.6), (3.7) индексами  $i \leq 4$ .

Однако, если мы хотим достаточно точно установить и тангенциальные перемещения  $u$ ,  $v$ , мы должны в (3.6), (3.7) оставить и члены с  $Q_5$ , так как их влияние того же самого порядка, как и предыдущих членов.

### *Literatura*

- [1] R. Zoelly: Über ein Knickungsproblem an der Kugelschale. Promotionsarbeit, 1915.
- [2] Л. С. Лейбензон: О приложении метода гармонических функций Томпсона к вопросу устойчивости сжатых сферических и цилиндрических оболочек. Юрьев, 1917.
- [3] Ю. Н. Работнов: Локальная устойчивость оболочек. ДАН СССР, т. 52, № 2, стр. 111—112.
- [4] Й. Я. Штаерман: Устойчивость оболочек. Сб. трудов Киевского авиац. института. № 1, 1936.
- [5] В. З. Власов: Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949 (гл. X).
- [6] P. Csonka: The buckling of a spheroidal shell curved in two directions. Acta Technica Ac. Sci. Hung. 1956, XIV, 3—4, str. 425.
- [7] E. Schubiger: Die Schalenkuppel in vorgespannten Beton der Kirche Felix und Regula in Zürich. Schweiz. Bauz., Nr. 17, 1950, str. 223.
- [8] Th. Kármán, H. S. Tsien, G. Dunn: The influence of curvature on the buckling characteristics of structures. Journ. of the Aero. Sci, vol. 7, No 7, 1940.
- [9] Th. Kármán, H. S. Tsien: The buckling of spherical shells by external pressure. Journ. of the Aero. Sci, vol. 17, No 2, 1939.
- [10] K. Klöppel, O. Jungbluth: Beitrag zum Durchschlagproblem dünnwandiger Kugelschalen. Stahlbau, 22, H. 6, 1953, str. 121.
- [11] K. Klöppel, E. Roos: Beitrag zum Durchschlagproblem dünnwandiger versteifter und unverteifter Kugelschalen für voll- und halbseitige Belastung. Stahlbau, 1956, H. 3.
- [12] X. M. Муштару, К. З. Галимов: Нелинейная теория упругих оболочек. Казань, 1957.
- [13] A. Kaplan, Y. C. Fung: A nonlinear theory of bending and buckling of thin elastic shallow spherical shells. NASA, TN 3212 (1954).

- [14] *Г. А. Гензев, Н. С. Чаусов*: Экспериментальное исследование устойчивости металлических оболочек. Иссл. по вопросам строительной мех. и т. пластичности, ЦНИПС 1956, стр. 223.
- [15] *М. С. Корнишин*: Влияние несимметричной неправильности на деформацию пологой панели при поперечной нагрузке. Изв. Каз. фил. АН СССР, серия физ.-мат. и тех. наук, вып. 10, 1956.
- [16] *I. Hlaváček*: Einfluss der Form der Anfangskrümmung auf das Ausbeulen der gedrückten rechteckigen Platte. Acta Technica ČSAV, 1962, Nr. 2.
- [17] *В. В. Болотин*: Статистические методы в нелинейной теории оболочек. Изв. АН СССР, отд. тех. наук, 1958, № 3.
- [18] *L. H. Donnell, C. C. Wan*: Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression. Journ. of Appl. Mech., March 1950, str. 73.
- [19] *М. Уетюра*: The buckling of spherical shells by external pressure. 3rd report: Buckling mechanism of spherical shell segments. Proc. of the 3rd Japan Nat. Congr. for Appl. Mech. 1953.
- [20] *V. Jarník*: Integrální počet II, Praha 1955.
- [21] *Я. Л. Герошумс*: Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке, Москва 1958.
- [22] *W. T. Koiter*: Elastic stability and post-buckling behaviour. Proc. Symp. Nonlinear Problems. The University of Wisconsin Press, Madison 1963, 257.
- [23] *Э. И. Григолюк*: Устойчивость сферической оболочки при конечных прогибах и несимметричной деформации. Изд. АН СССР о. т. н. мех. и маш., 1960, Но. 6.
- [24] *A. Gjelsvik, S. R. Bodner*: Nonsymmetrical snap buckling of spherical caps. J. Engng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs., 1962, 88, No. 5, Part I. (135 – 167).

## Souhrn

### NESYMETRICKÝ PRŮHYB PLOCHÉ KULOVÉ SKOŘEPINY S POČÁTEČNÍ DEFORMACÍ, ZATÍŽENÉ VNĚJŠÍM TLAKEM

IVAN HLAVÁČEK

V článku jsou sestaveny algebraické rovnice pro výpočet křivek zatížení – deformace u kloubově uložené ploché kulové skořepiny z pružného materiálu, která je zatížena rovnoměrným vnějším přetlakem a má nesymetrické počáteční průhyby. Úloha je řešena v posuvech na základě nelineárních variačních rovnic rovnováhy. Souřadnicové funkce se skládají z Legendreových polynomů a trigonometrických funkcí.

## Summary

### ASYMMETRICAL DEFLECTIONS OF INITIALLY DEFORMED SPHERICAL SHELL UNDER EXTERNAL PRESSURE

IVAN HLAVÁČEK

In this paper the algebraic equations for the numerical calculation of load-deflection characteristics of a hinge supported shallow spherical elastic shell are derived for the case of asymmetrical initial deflections and external pressure. The solution is based on the non-linear variational equations of equilibrium for the displacements. The coordinate functions are composed of Legendre's polynomials and trigonometric functions.

*Adresa autora:* Inž. *Ivan Hlaváček* C.Sc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, Praha 1.