Ivo Marek

Некоторые математические задачи теории ядерных реакторов на быстрых нейтронах

Aplikace matematiky, Vol. 8 (1963), No. 6, 442–470

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102876

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ НА БЫСТРЫХ НЕЙТРОНАХ

ИВО МАРЕК (Ivo Marek)

(Поступило в редакцию 29/1 1963 г.)

В статье рассматриваются вопросы существования решений так называемых основных уравнений реактора и сопряженных уравнений для ценности нейтронов в многогрупповом приближении кинетической теории. Доказано существование собственного значения с максимальным модулем и положительных собственных векторов однородных систем кинетических уравнений. Непосредственным следствием существования этих собственных элементов является сходимость итерационных процессов типа итерации источника. В статье имеются также сведения о критических параметрах и их однозначности.

ВВЕДЕНИЕ. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧ. ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Содержанием этой работы является исследование существования решений систем уравнений для транспорта нейтронов в многогрупповом приближении. Эти системы вместе с краевыми условиями известны как основные уравнения реактора ([3], стр. 33). Мы сосредоточились на исследование реакторов, работающих на быстрых нейтронах, потому что для тепловых реакторов можно воспользоваться системой многогрупповых диффузионных уравнений, существование решений которой уже доказано в [13]. Следует отметить, что существование решений системы диффузионных уравнений вытекает, подобно как результаты этой статьи, из некоторых общих теорем существования решений одного специального типа линейных уравнений в пространстве Гильберта, доказанных в [8].

Наши исследования тесно примыкают к работам В. С. Владимирова [11], [12]. Но Владимиров рассматривает лишь одногрупповое уравнение для транспорта нейтронов. Использованный им аппарат симметричных и симметризуемых операторов не применим в случае m-группового приближения.

Приведем теперь содержание отдельных глав нашей работы.

В главе 1. введены необходимые определения, обозначения и отмечены некоторые вспомагательные теоремы. Свойства кинетических уравнений многогруппового приближения являются содержанием глав 2. и 3. В главе 2. доказано существование положительного характеристического значения и положительных собственных векторов однородных систем уравнений. Глава 3. содержит теорию систем неоднородных уравнений, а именно необходимые и достаточные условия для существования решений неоднородных систем уравнений для произвольных неоднородных членов.

Глава 4. посвящена итерационным методам построения решений систем уравнений или однородных или неоднородных. Особенно отметим доказательство сходимости итерационных процессов, в частности, широко распространенного метода итерации источника. В этой же главе доказываем, что лишь существование характеристического значения с минимальным модулем системы многогрупповых уравнений для транспорта нейтронов обеспечивает сходимость итерационных процессов типа итерации источника. Это утверждение справедливо также в общем случае непрерывной зависимости кинетического уравнения от энергии. Две проблемы, приведенные в монографии [3], стр. 48, сводятся к единой проблеме, а именно к проблеме существования характеристического значения с минимальным модулем для кинетического уравнения.

В главе 5. мы занимаемся критическими параметрами ядерных реакторов, их существованием и однозначностью. Эти вопросы в литературе почти не рассматриваются несмотря на то, что основной задачей расчета ядерного реактора является определение его критических размеров и критической массы горючего. В главе 5. показано, что проблемы этого рода можно строго математически формулировать и решать.

Помимо результатов, касающихся исключительно систем кинетических уравнений, в работе доказаны теоремы, которые имеют самостоятельное значение и которые находят приложения также в других областях математической физики.

Пусть $\mathfrak{G}$ – открытое ограниченное связное множество в r-мерном евклидовом пространстве $\mathscr{R}_r$. Предположим, что все прямые, которые имеют с множеством $\mathfrak{G}$ непустое пересечение, пересекают его в конечном множестве отрезков. Далее предположим, что граница $\dot{\mathfrak{G}}$ множества $\mathfrak{G}$ является выпуклой и по частям гладкой (это означает, что в каждой точке границы, исключая конечное множество точек, имеется нормаль). Пусть $\Omega \subset \mathscr{R}_r$ – множество векторов вида $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \ldots, \Omega_r)$, $|\boldsymbol{\Omega}| = 1$. Положим $\mathfrak{A} = \mathfrak{G} \times \Omega$. Мера в $\mathfrak{A}$ определена в [11], гл. 1. вместе со способом интегрирования. Пусть m – целое положительное число, и $0 < E_1 < \ldots < E_m < +\infty$ – фиксированные значения энергии.

Системы кинетических уравнений в многогрупповом приближении мы будем исследовать в следующем виде

$$\begin{aligned}(0.1) \qquad \boldsymbol{\Omega} \,.\, \operatorname{grad} x_j + \Sigma_j(\boldsymbol{r})\, x_j = \sum_{k=j}^{m} \int_{\Omega} \Sigma_k^s(\boldsymbol{r})\, w_{jk}^s(\mu)\, x_k(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}')\, \mathrm{d}\Omega' \, + \\ + \lambda \sum_{k=1}^{m} \int_{\Omega} \Sigma_k^f(\boldsymbol{r})\, \nu_k^f(\boldsymbol{r})\, w_{jk}^f(\mu)\, x_k(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}')\, \mathrm{d}\Omega' + z_j(\boldsymbol{r})\,,\end{aligned}$$

$$(0.2) \qquad -\boldsymbol{\Omega} \,.\, \operatorname{grad} x_j^* + \Sigma_j(\boldsymbol{r})\, x_j^* = \sum_{k=1}^{j} \int_{\Omega} \Sigma_j^s(\boldsymbol{r})\, w_{kj}^s(\mu)\, x_k^*(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}')\, \mathrm{d}\Omega' +$$

$$+ \lambda \sum_{k=1}^{m} \int_{\Omega} \Sigma_j^f(\boldsymbol{r})\, \nu_j^f(\boldsymbol{r})\, w_{kj}^f(\mu)\, x_k^*(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}')\, \mathrm{d}\Omega' + z_j^*$$

с граничными условиями

$$(0.3) \qquad x_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}) = 0 \quad \text{для} \quad \boldsymbol{r} \in \dot{\mathfrak{G}} \quad \text{и} \quad (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\Omega}) < 0\,,$$

$$(0.4) \qquad x_j^*(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}) = 0 \quad \text{для} \quad \boldsymbol{r} \in \dot{\mathfrak{G}} \quad \text{и} \quad (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\Omega}) > 0\,,$$

где $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ — нормализованный вектор направления внешней нормали в точке $\boldsymbol{r} \in \dot{\mathfrak{G}}$, $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\Omega})$ — косинус угла векторов $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\Omega}$ и λ-численный, обычно вещественный параметр.

Замечание 1. *Если граница* $\dot{\mathfrak{G}}$ *не является или выпуклой или по частям гладкой, то граничные условия записываются более сложным образом, чем формулами* (0.3), (0.4). *Касающиеся этого вопроса подробности читатель найдет в работе* [11], *гл.* 1. *Потому, что в дальнейшем мы будем несколько раз ссылаться на работу* [11], *где, кроме других определений и результатов, проведена формулировка общих краевых условий, не будем здесь вводить точную формулировку и будем пользоваться простой записью* (0.3), (0.4) *и в случае не выпуклой и не гладкой границы* $\dot{\mathfrak{G}}$, *но будем иметь в виду точную формулировку Владимирова.*

Приведем вкратце значения символов введенных в (0.1)—(0.4). Всюду в дальнейшем j обозначает индекс j-ой энергетической группы;

Σ_j^a — поперечное сечение для поглощения,
Σ_j^f — попереченое сечение для деления,
Σ_j^e — поперечное сечение упругого рассеяния,
Σ_j^i — попереченое сечение для неупругого рассеяния,
Σ_j^s — попереченое сечение для рассеяния: $\Sigma_j^s = \Sigma_j^e + \Sigma_j^i$,
Σ_j — полное попереченое сечение,
ν_j^f — среднее число нейтронов на одно деление,
μ — косинус угла между векторами $\boldsymbol{\Omega} \in \Omega$, $\boldsymbol{\Omega}' \in \Omega$,
w_{jk}^s — плотность вероятности, что нейтрон k-ой группы при рассеянии попадет в j-ую группу,
w_{jk}^f — плотность вероятности, что нейтрон k-ой группы вызовет деление ядра, при котором появится нейтрон j-ой группы,
x_j — поток нейтронов,
x_j^* — ценность нейтронов.

Предположим, что функции $\Sigma_j = \Sigma(E_j)$, $\Sigma_j^s = \Sigma^e(E_j) + \Sigma^i(E_j)$, $\Sigma_j^f = \Sigma^f(E_j)$,

$v_j^f = v^f(E_j)$, $j = 1, \ldots, m$, ограничены, измеримы и неотрицательны в $\mathfrak{A}$ и что имеют место неравенства

$$(0.5) \qquad \alpha_j \leqq \Sigma_j(\mathbf{r}) \leqq \beta_j\,, \quad \gamma_j \leqq v_j^f(\mathbf{r}) \leqq \delta_j\,, \quad j = 1, \ldots, m\,,$$

где α_j, β_j, γ_j, δ_j — положительные постоянные.

Пусть ядра интегральных операторов, стоящих в правых частях системы (0.1), подчиняются следующим ограничениям:

(a) *Функции* $\vartheta_{s,jk} = \Sigma_k^s w_{jk}^s(\mu)$, $\vartheta_{f,jk} = \Sigma_k^f v_k^f w_{jk}^f(\mu)$ *неотрицательны и измеримы в* $\mathfrak{A}$ *и далсе того* $\vartheta_{f,jk} > 0$ *для* $1 \leqq j,\ k \leqq m$ *и* $\vartheta_{s,jk} > 0$ *для* $1 \leqq j < k \leqq m$.

(b) *Функции* $\vartheta_{s,jk}$, $\vartheta_{f,jk}$ *интегрируемы в* Ω *для почти всех пар* $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \in \mathfrak{A}$ *и имеют место соотношения*

$$(0.6) \qquad \int_\Omega \vartheta_{s,jk}(\mathbf{r}, \mu)\, \mathrm{d}\Omega' \leqq \eta\,, \quad \int_\Omega \vartheta_{f,jk}(\mathbf{r}, \mu)\, \mathrm{d}\Omega' \leqq \eta\,, \quad 0 \leqq \eta < +\infty\,.$$

(c) *Для всех функций F интегрируемых с квадратом в* $\mathfrak{A}$ *справедливы соотношения*

$$(0.7) \qquad \int_{\mathfrak{A}} \left\{ \overline{F(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})} \int_\Omega \vartheta_{s,jk}(\mathbf{r}, \mu)\, F(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}')\, \mathrm{d}\Omega' \right\} \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\Omega' \geqq 0\,,$$

$$(0.8) \qquad \int_{\mathfrak{A}} \left\{ \overline{F(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})} \int_\Omega \vartheta_{f,jk}(\mathbf{r}, \mu)\, F(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}')\, \mathrm{d}\Omega' \right\} \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\Omega \ \geqq 0$$

($\overline{F(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})}$ обозначает сопряженное значение к $F(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$. Подобно тому в дальнейшем $\bar{\varrho}$ обозначает сопряженное значение комплексного числа ϱ).

(d) *Для функций* w_{jk}^s, w_{jk}^f *справедливо по крайней мере одно из условий* (d1), (d2):

(d1) *Функции* w_{jk}^s, w_{jk}^f *измеримы в* Ω, *и имеют место неравенства*

$$(0.9) \qquad \int_{-1}^{1} w_{jk}^s(\mu)\, \mathrm{d}\mu < +\infty\,, \quad \int_{-1}^{1} w_{jk}^f(\mu)\, \mathrm{d}\mu < +\infty\,, \quad 1 \leqq j,\ k \leqq m\,.$$

Отметим, что выполнение условий (0.9) обеспечивает выполнение условий (a)–(b).

(d2) *Функции* $\vartheta_{s,jk}$, $\vartheta_{f,jk}$ *итегрируемы вместе с q-ой степенью* $(q > 1)$ *в* Ω *относительно* $\boldsymbol{\Omega}$ *для почти всех пар* $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \in \mathfrak{A}$ *и справедливы неравенства*

$$(0.10) \qquad \int_\Omega \vartheta_{s,jk}^q(\mathbf{r}, \mu)\, \mathrm{d}\Omega' \leqq \zeta_s\,, \quad \int_\Omega \vartheta_{f,jk}^q(\mathbf{r}, \mu)\, \mathrm{d}\Omega' \leqq \zeta_f\,, \quad 1 \leqq j,\ k \leqq m\,,$$

где ζ_s, ζ_f — *положительнае постоянные.*

Из предположений (a)–(d) вытекает справедливость некоторых утверждений статьи [12], которыми мы будем пользоваться.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Символом $\mathscr{L}_2(\mathfrak{A})$ обозначаем комплексное гильбертово пространство функций интегрируемых с квадратом в $\mathfrak{A}$. В $\mathscr{L}_2(\mathfrak{A})$ определено скалярное произведение

$$(1.1) \qquad <x_j, y_j> = \int_{\mathfrak{S}} \int_{\Omega} x_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \overline{y_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\Omega \,,$$

$$x_j \in \mathscr{L}_2(\mathfrak{A}), \ y_j \in \mathscr{L}_2(\mathfrak{A}), \ j = 1, \ldots, m.$$

Пусть $\mathscr{X} = \mathscr{L}_2(\mathfrak{A}) \times \ldots \times \mathscr{L}_2(\mathfrak{A})$ – прямое произведение m пространств $\mathscr{L}_2(\mathfrak{A})$. Пространство $\mathscr{X}$ со скалярным произведением

$$(1.2) \qquad (x, y) = \sum_{j=1}^{m} <x_j, y_j> \,, \quad x \in \mathscr{X} \,, \quad y \in \mathscr{X} \,,$$

$$x = (x_1, \ldots, x_m) \,, \quad y = (y_1, \ldots, y_m) \,, \quad x_j \in L_2(\mathfrak{A}) \,, \quad y_j \in L_2(\mathfrak{A}) \,,$$

является пространством Гильберта.

Символ $[\mathscr{X}]$ обозначает пространство линейных ограниченных отображений пространства $\mathscr{X}$ в $\mathscr{X}$ с обычной нормой [10]

$$\|T\| = \sup_{(x,x)=1} (Tx, Tx)^{\frac{1}{2}} \,.$$

Системы уравнений (0.1) с граничными условиями (0.3) мы будем записывать символически

$$(1.3) \qquad Lx = Bx + \lambda Cx + z \,,$$

где L – диагональная матрица, содержащая операторы $L_j, j = 1, \ldots, m$, определенные с помощью соотношений

$$(1.4) \qquad L_j x_j \equiv \boldsymbol{\Omega} \,.\, \mathrm{grad} \, x_j + \Sigma_j(\mathbf{r}) \, x_j$$

и краевых условий

$$(1.5) \qquad x_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = 0 \quad \text{для} \quad \mathbf{r} \in \dot{\mathfrak{S}}, \ (\mathbf{n}, \boldsymbol{\Omega}) < 0 \,,$$

$j = 1, \ldots, m.$

Элементами матриц (B_{jk}), (C_{jk}) являются операторы B_{jk}, C_{jk}:

$$(1.6) \qquad B_{jk} x_k \equiv \int_{\Omega} \Sigma_k^s(\mathbf{r}) \, w_{jk}^s(\mu) \, x_k(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') \, \mathrm{d}\Omega' \,,$$

$$(1.7) \qquad C_{jk} x_k \equiv \int_{\Omega} \Sigma_k^f(\mathbf{r}) \, v_k^f(\mathbf{r}) \, w_{jk}^f(\mu) \, x_k(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') \, \mathrm{d}\Omega' \,,$$

$1 \leqq j, \ k \leqq m.$

Линейные операторы B_{jk}, C_{jk} отображают пространство $\mathscr{L}_2(\mathfrak{A})$ в $\mathscr{L}_2(\mathfrak{A})$ и являются, очевидно, ограниченными отображениями, т.е. существуют α_{jk}, β_{jk} такие, что

$$\|B_{jk}x_k\| \leqq \alpha_{jk}, \quad \|C_{jk}x_k\| \leqq \beta_{jk} \tag{1.8}$$

для $x_k \in L_2(\mathfrak{A})$, $\|x_k\| = \langle x_k, x_k\rangle^{\frac{1}{2}} = 1$. Отсюда вытекает, что $(B_{jk}) = B \in [\mathscr{X}]$, $(C_{jk}) = C \in [\mathscr{X}]$.

В статье [11] доказано, что операторы M_j, определенные с помощью равенств

$$M_j x_j \equiv \frac{1}{\Sigma_j(\mathbf{r})} L_j x_j, \quad j = 1, \ldots, m,$$

являются линейными и замкнутыми операторами, определенными на множествах плотных в $\mathscr{L}_2(\mathfrak{A})$. Этим свойством тогда обладают также операторы L_j. Отсюда вытекает существование сопряженных операторов L_j^*. В статье [11] доказано также, что существуют обратные для M_j операторы M_j^{-1}. Свойства (0.5) обеспечивают тогда существование операторов L_j^{-1}, обратных к $L_j, j = 1, \ldots, m$.

Систему (0.2), (0.4) мы можем записывать тоже символически

$$L^*x^* = B^*x^* + \bar{\lambda}C^*x^* + z^*, \tag{1.9}$$

где L^*, B^*, C^* – сопряженные с L, B, C операторы. Существование сопряженных операторов B^*, C^* является следствием ограниченности операторов B, C.

Лемма 1.1. ([11]) *Образ y_j при отображении L_j^{-1} произвольной функции $x_j \in L_2(A)$ является ограниченной функцией в $\mathfrak{A}$. Образ y_j при отображении L_j^{-1} неотрицательной в $\mathfrak{A}$ функции $x_j \in \mathscr{L}_2(\mathfrak{A})$ является неотрицательной в $\mathfrak{A}$ функцией.*

Доказательство. Определим оператор S_j:

$$S_j x_j \equiv \frac{1}{\Sigma_j(\mathbf{r})} x_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}).$$

Тогда $M_j = S_j L_j$. Хорошо известно ([11]), что лемма 1.1 справедлива для оператора M_j^{-1}. Отсюда и из (0.5) заключаем, что она справедлива тоже для L_j^{-1} потому что

$$L_j^{-1} = M_j^{-1} S_j, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{1.10}$$

Очевидна следующая

Лемма 1.2. *Существует оператор L^{-1} обратный к оператору L.*

Лемма 1.3. *Операторы $L_j^{-1}B_{jk}$, $L_j^{-1}C_{jk}$ – линейные компактные отображения пространства $\mathscr{L}_2(\mathfrak{A})$ в $\mathscr{L}_2(\mathfrak{A})$.*

Доказательство. Имеют место равенства

$$L_j^{-1}B_{jk} = M_j^{-1}S_jB_{jk}\,,\quad L_j^{-1}C_{jk} = M_j^{-1}S_jC_{jk}\,,\quad 1 \leqq j,\ k \leqq m\,.$$

По лемме 3.2 статьи [12] каждый из операторов $M_j^{-1}S_jB_{jk}$, $M_j^{-1}S_jC_{jk}$ является линейным оператором, действующим в пространстве $L_2(\mathfrak{A}, \Sigma_j)$ функций, интегрируемых в $\mathfrak{A}$ с квадратом с весом Σ_j. Утверждение нашей леммы является тогда следствием эквивалентности норм в пространствах $\mathscr{L}_2(\mathfrak{A})$, $\mathscr{L}_2(\mathfrak{A}, \Sigma_j)$.

В качестве следствия получается

Лемма 1.4. *Операторы $L^{-1}B$, $L^{-1}C$ являются линейными компактными отображениями пространства $\mathscr{X}$ в $\mathscr{X}$.*

Пусть $\mathscr{K} \subset \mathscr{X}$ — конус неотрицательных вектор-функций ([1]). В дальнейшем мы будем пользоваться следующей записью. Для вещественных векторов $x \in \mathscr{X}$, $y \in \mathscr{X}$ соотношение $x < y$ $(y > x)$ обозначает, что $y - x = z \in \mathscr{K}$, или что все координаты вектора $z = y - x$ неотрицательны в $\mathfrak{A}$. Особенно отметим, что $0 < x \Leftrightarrow x_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \geqq 0$, $j = 1, \ldots, m$; символ 0 обозначает нулевой элемент пространства $\mathscr{X}$. Очевидно, что $0 < 0$. Если $x_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \leqq y_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$, $j = 1, \ldots, m$, и строгое неравенство $y_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) - x_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) > 0$ српаведливо на множестве положительной меры по крайней мере для одного индекса j, то пишем $x \ll y$ или $y \gg x$. Очевидно, что $x < y$ следует из $x \ll y$.

Пусть ϱ — комплексносе число. Тогда $\varrho = |\varrho| \,.\, \exp\{i \arg \varrho\}$, где $|\varrho|$ обозначает модуль и $\arg \varrho$ — аргумент числа ϱ: $-\pi \leqq \arg \varrho < \pi$.

Пусть $x \in \mathscr{X}$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$. Символом $|x|$ обозначаем вектор, координаты которого равны $|x_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})| : |x| = (|x_1|, \ldots, |x_m|)$, $|x_j|\,(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = |x_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})|$, $\mathbf{r} \in \mathfrak{G}$, $\boldsymbol{\Omega} \in \Omega$, $j = 1, \ldots, m$. Очевидно, что $|x| \in \mathscr{K}$ для всех $x \in \mathscr{X}$. Если $x \in \mathscr{X}$ — вектор с вещественными координатами x_j, $j = 1, \ldots, m$, то $x < |x|$. Если, кроме того, неравенство

$$\arg x_p(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \neq c \tag{1.11}$$

справедливо по крайней мере для одного индекса p на множестве положительной меры, где c — независимая от $\mathbf{r}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ постоянная, то $x \ll |x|$.

Вектор с координатами $x_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \exp\{i \arg x_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})\}$, $j = 1, \ldots, m$ будем обозначать просто $x \,.\, \exp\{i \arg x\}$.

Оператор $T \in [\mathscr{X}]$ называется $\mathscr{K}$-положительным ([1]), *если $Tx = y \in \mathscr{K}$ для $x \in \mathscr{K}$. $\mathscr{K}$-положительный оператор T называется абсолютно $\mathscr{K}$-положительным, если имеет следующие свойства*:

(α) *Для произвольного $\varepsilon > 0$ и для $x \in \mathscr{K}$, $x \neq 0$ можно поставить в соответствие целое положительное $N = N(x)$ такое, что мера множества нулей вектор-функции $T^n x$ меньше чем ε для $n > N$.* (Нулем вектор-функции $y \in \mathscr{X}$ называется пара $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \in \mathfrak{A}$ такая, что все координаты арифметического вектора $y(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$ равны нулю.)

(β) *Неравенство*

(1.12) $$|T^N x| \ll T^N |x|, \quad N = N(|x|)$$

справедливо для всех векторов $x \in \mathscr{X}$, которые обладают одним или обоими следующими свойствами:

(β1) $\arg x_p(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \neq$ konst. *по крайней мере для одного индекса p на множестве положительной меры.*

(β2) *Имеются два индекса t, s, для которых*

$$\arg x_s(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \neq \arg x_t(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$$

на множестве положительной меры.

Лемма 1.5. *Операторы $L^{-1}B$, $L^{-1}C$ являются $\mathscr{K}$ — положительными операторами.*

Доказательство. Утверждение леммы 1.5 вытекает из леммы 1.1 и из условий (а) вводной главы.

$\mathscr{K}$ — положительность операторов $L^{-1}B$, $L^{-1}C$ имеет особое значение для исследования спектральных свойств системы уравнений (0.1), (0.2) с краевыми условиями (0.3), (0.4). Существование характеристических значений этих систем является следствием абсолютной $\mathscr{K}$ — положительности оператора $T = (L - B)^{-1} C$. Доказательство этого факта является содержанием следующей главы.

Пусть $A \in [\mathscr{X}]$. Хорошо известно, что существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{1/n} = r(A),$$

который носит название спектрального радиуса оператора A ([10], стр. 263).

2. СВОЙСТВА МНОГОГРУППОВЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ

Хорошо известно, что для $\mathscr{K}$ — положительных и для абсолютно $\mathscr{K}$ — положительных операторов справедливы следующие теоремы ([1], теоремы 6.1, 6.2; [8]).

Теорема А. ([1]) *Спектр $\mathscr{K}$ — положительного линейного компактного оператора T с положительным спектральным радиусом $r(T)$ содержит по крайней мере одно положительное собственное значение μ_0. Этому собственному значению соответствует по крайней мере один собственный вектор $x_0 \in \mathscr{K}$ оператора T и по крайней мере один собственный вектор $x_0^* \in \mathscr{K}$ сопряженного оператора T^*, и справедливы соотношения*

(2.1) $$Tx_0 = \mu_0 x_0, \quad T^* x_0^* = \mu_0 x_0^*,$$
$$|\lambda| \leqq \mu_0, \quad |\bar{\lambda}| \leqq \mu_0, \quad \lambda \in \sigma(T), \quad \bar{\lambda} \in \sigma(T^*),$$

где $\sigma(T)$, $\sigma(T^*)$ — спектры операторов T, T^*.

Теорема Б. ([1]) *Пусть T — $\mathcal{K}$—положительный линейный компактный оператор. Предположим, что существуют $u \in K$, $\|u\| = 1$ и $c > 0$ такие, что для некоторого целого положительного p имеет место*

$$T^p u > cu \,. \tag{2.2}$$

Тогда $r(T) \geqq \sqrt[p]{c}$.

Теорема В. ([8]) *В спектре $\sigma(T)$ абсолютно $\mathcal{K}$—положительного компактного оператора $T \in [\mathcal{K}]$, для которого $r(T) > 0$, содержится положительное доминантное собственное значение μ_0, т.е. собственное значение, для которого справедливы неравенства*

$$|\lambda| < \mu_0 \,, \quad |\bar{\lambda}| < \mu_0 \tag{2.3}$$

для $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq \mu_0$, $\bar{\lambda} \in \sigma(T^*)$, $\bar{\lambda} \neq \mu_0$.

Указаное собственное значение является простым полюсом резольвенты $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$. Координаты собственного вектора x_0 ($\|x_0\| = 1$), соответствующего значению μ_0, являются положительными почти всюду в $\mathfrak{A}$, и x_0 — единственный собственный вектор оператора T, принадлежащий конусу $\mathcal{K}$. Собственному значению соответствует собственный вектор $x_0^* \in \mathcal{K}$ сопряженного оператора T^*, координаты которого положительны почти всюду в $\mathfrak{A}$, и кроме x_0^* ($\|x_0^*\| = 1$) других собственных векторов оператора T^* в конусе $\mathcal{K}$ не имеется.

Замечание 2. *В статье* [8] *доказано более общее утверждение, чем показывает* **В**. *Для наших целей хватит приведенное нами упрощение и поэтому мы избегаем общей формулировки результатов статьи* [8].

Лемма 2.1. *Оператор $L^{-1}C$ обладает положительным спектральным радиусом.*

Доказательство. Будем конструировать вектор $u \in \mathcal{K}$, подчиняющийся условию (2.2) теоремы Б.

Хорошо известно явное представление оператора $L_j^{-1} = M_j^{-1} S_j$ ([11], лемма 2.2), из которого можно узнать, что $y_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) > 0$, $y_j = L_j^{-1} x_j$, почти всюду в $\mathfrak{A}$, если $x_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \geqq 0$, $x_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \not\equiv 0$. Здесь нули функции y_j зависят лишь от краевых условий, значит, не зависит от нулей функции x_j. Поэтому существуют множества $\mathfrak{H}_j \subset \mathfrak{G}$, $j = 1, \ldots, m$, такие, что $\operatorname{mes}[\mathfrak{H}_j \times \Omega] > 0$, и мы можем добиться того, что для $\mathfrak{H} = \bigcap_{j=1}^{m} \mathfrak{H}_j$ $\operatorname{mes}[\mathfrak{H} \times \Omega] > 0$.

Определим функцию

$$v(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad \mathbf{r} \in \mathfrak{H}, \ \boldsymbol{\Omega} \in \Omega \,, \\ 0 & \text{для} \quad \mathbf{r} \notin \mathfrak{H}, \ \boldsymbol{\Omega} \in \Omega \,. \end{cases}$$

Пусть $\vartheta_j = \inf\limits_{\mathbf{r} \in H,\, \boldsymbol{\Omega} \in \Omega} w_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$ где $w_j = \sum\limits_{k=1}^{m} L_j^{-1} C_{jk} v$. По условию (a) вводной главы $\vartheta_j > 0$ для $j = 1, \ldots, m$ и

$$w_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \geqq \vartheta_j v(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \,, \quad \mathbf{r} \in \mathfrak{G} \,, \quad \boldsymbol{\Omega} \in \Omega \,.$$

Если мы положим $\vartheta = \min_j \vartheta_j$, $y = (v, \ldots, v)$, $u = y/\|y\|$, то получим соотношение $L^{-1}Cu > \vartheta u$, и тем самым нам удалось построить искомый вектор u, подчиняющийся условию (2.2) с $p = 1$. По теореме Б существует собственное значение ν_0 оператора $L^{-1}C$ и собственные векторы $y_0 \in \mathscr{K}$, $y_0^* \in \mathscr{K}$ операторов $L^{-1}C$, $[L^{-1}C]^*$ такие, что

$$L^{-1}Cy_0 = \nu_0 y_0\,, \quad [L^{-1}C]^*\, y_0^* = \nu_0 y_0^*\,, \quad \nu_0 > 0\,.$$

Лемма 2.2. *Если* $r(L^{-1}B) < 1$, *то*

(2.4) $$T = (L - B)^{-1}\, C$$

— абсолютно $\mathscr{K}$*—положительный линейный компактный оператор. Более того* $r(T) > 0$.

Доказательство. Из условия $r(L^{-1}B) < 1$ вытекает, что в норме пространства $[\mathscr{X}]$ $(L - B)^{-1} = QL^{-1}$, где $Q = \sum_{k=0}^{\infty} [L^{-1}B]^k$, так что

(2.5) $$T = \sum_{k=0}^{\infty} [L^{-1}B]^k\, L^{-1}C = QL^{-1}C\,,$$

откуда вытекает компактность оператора T ввиду леммы 1.4 и положителность $r(T)$.

Пусть $x \in \mathscr{K}$, $x \neq 0$. Тогда $Cx = y \neq 0$ в силу ограничений, наложенных на ядра $\vartheta_{f,jk}$. Далее существует целое положительное M такое, что координаты вектора $z = [L^{-1}C]^M\, x$ положительны на множестве положительной меры. Из условий (a) вводной главы, налагаемых на ядра $\vartheta_{s,jk}$, $\vartheta_{f,jk}$ вытекает, что все координаты вектора $w = \sum_{k=0}^{N} [L^{-1}B]^k\, L^{-1}Cz$ положительны почти всюду в $\mathfrak{A}$ для достаточно больших N. Тем самым доказано условие (α) абсолютной $\mathscr{K}$—положительности оператора T.

Выполнение условия (β) получим следующим образом. Пусть $x_j \in \mathscr{L}_2(\mathfrak{A})$, $b_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \geqq 0$, $b_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \not\equiv 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathfrak{A}} b_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})\, x_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\Omega\right| = \\
&= \left\{\left[\int_{\mathfrak{A}} b_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})\, |x_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})| \cos\arg x_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\Omega\right]^2 + \right. \\
&\left. + \left[\int_{\mathfrak{A}} b_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})\, |x_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})| \sin\arg x_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\Omega\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leqq \\
&\leqq \int_{\mathfrak{A}} b_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})\, |x_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}|\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\Omega
\end{aligned}$$

и как известно, равенство имеет место тогда и только тогда, если $\arg x_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \mathrm{konst.}$ для тех $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \in \mathfrak{A}$, для которых $b_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) > 0$. Отсюда сразу вытекает выполнение соотношения $L^{-1}C|x| \gg |L^{-1}Cx|$ для вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$, у которого имеется по крайней мере одна координата x_p, для которой $\arg x_p(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \neq \neq \mathrm{konst}$.

Если $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $\arg x_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = c_j$, $j = 1, \ldots, m$, где c_j – постоянные, и если найдутся по крайней мере два индекса q, s, для которых $c_s \neq c_q$, то соотношение $L^{-1}C|x| \gg |L^{-1}Cx|$ получается аналогично как следствие неравенства

$$\left|\sum_{k=1}^{m} b_k x_k\right| \leqq \sum_{k=1}^{m} b_k |x| , \quad b_k \geqq 0 ,$$

где, как можно просто убедиться, равенство достигается тогда и только тогда, если $\arg b_k x_k$ не зависит от k.

В обоих случаях доказываемое соотношение $|Tx| \ll T|x|$ вытекает из неравенств

$$T|x| - |Tx| > \sum_{k=0}^{\infty} [L^{-1}B]^k \{L^{-1}C|x| - |L^{-1}Cx|\} > L^{-1}C|x| - |L^{-1}Cx| \gg 0 ,$$

ввиду того, что

$$|Ty| < \sum_{k=0}^{\infty} [L^{-1}B]^k |L^{-1}Cy| , \quad y \in \mathscr{X} .$$

Итак, мы доказали, что $T = (L - B)^{-1} C$ – компактный абсолютно $\mathscr{K}$–положительный оператор. Потому что его линейность очевидна, то тем самым лемма 2.2 полностью доказана.

Замечание 3. *Случай* $r(L^{-1}B) \geqq 1$ *теряет физический смысл, точнее, система уравнений* (0.1) *с условиями* (0.3) *не описывает перенос нейтронов.*

Чтобы доказать это предложение, предположим обратное, что система (0.1) с условиями (0.3) описывает перенос нейтронов. Тогда соответствующее положительному собственному вектору характеристическое значение однородной системы имеет физическое значение и должно быть положительным. Если, однако, $r(L^{-1}B) \geqq 1$, то по теоремам **А**, **Б** существуют собственное значение τ_0 и соответствующий собственный вектор y_0 оператора $L^{-1}B$ такие, что

$$L^{-1}By_0 = \tau_0 y_0 , \quad y_0 \in \mathscr{K} , \quad \tau_0 \geqq r(L^{-1}B) \geqq 1 .$$

С помощью $\mathscr{K}$–положительности операторов $L^{-1}B$, $L^{-1}C$ выводим просто, что для произвольного $\lambda > 0$ и $y \in \mathscr{K}$ имеет место соотношение $U(\lambda)\, y > L^{-1}By$, где

$$U(\lambda) = L^{-1}B + \lambda L^{-1}C . \tag{2.6}$$

Оператор $U(\lambda)$ является линейным компактным оператором для λ, подчиняющихся условию $|\lambda| < +\infty$, и $\mathscr{K}$–положительным для $\lambda \geqq 0$. Из теоремы **В** вытекает существование собственного значения $\nu_0(\lambda)$ и ему соответствующего собственного вектора $x(\lambda) \in \mathscr{K}$:

$$U(\lambda)\, x(\lambda) = \nu_0(\lambda)\, x(\lambda) , \quad \lambda \geqq 0 .$$

Из теоремы Б следует справедливость неравенств

$$v_0(\lambda) \geqq \tau_0 \geqq 1$$

для $\lambda \geqq 0$.

Однако в нашем случае $x_0 = L^{-1}Bx_0 + \lambda L^{-1}Cx_0$, т.е. $v_0(\lambda) = 1$. Тем самым является недопустимой возможность $r(L^{-1}B) > 1$, ибо $1 \geqq \tau_0 = r(L^{-1}B)$. Равенство $r(L^{-1}B) = 1$ тоже не может выполняться, ибо в этом случае из $y_0 = L^{-1}By_0$ следует равенство

$$Ly_0 = By_0 \,. \tag{2.7}$$

Но, ввиду того, что операторы L, B описывают диффузию, поглощение и рассеяние нейтронов, то в рассматриваемой среде цепная реакция всегда затухнет, и это противоречит равенству (2.7). Мы доказали, что условие $r(L^{-1}B) < 1$ является естественным. Мы будем поэтому предполагать его выполненым. Отметим, что в конкретных проблемах теории и расчета ядерных реакторов удостоверение этого условия не затруднительно и, как правило, его выполнение очевидно.

Теорема 2.1. *Множество значений λ, $\bar{\lambda}$, для которых имеется нетривиальные решения систем,*

$$Lx = Bx + \lambda Cx \,, \tag{2.8}$$

$$L^*x^* = B^*x^* + \bar{\lambda}C^*x^* \tag{2.9}$$

не более чем счетно, но не пусто. Существуют $\lambda_0 > 0$ и векторы $x_0 \in \mathscr{K}$, $x_0^* \in \mathscr{K}$, являющиеся решениями систем уравнений (2.8) и (2.9). Кроме cx_0, $c^*x_0^*$, где c, c^* — положительные постоянные, системы (2.8) и (2.9) не обладают другими неотрицательными решениями. Значение $\mu_0 = \lambda_0^{-1}$ является простым полюсом резольвент $R(\lambda, (L - B)^{-1} C)$, $R(\lambda, C^*(L^* - B^*)^{-1})$ и доминантной точкой спектров операторов $(L - B)^{-1} C$, $C^*(L^* - B^*)^{-1}$.

Доказательство. Во-первых, докажем, что каждый собственный вектор y оператора $T = (L - B)^{-1} C$, соответствующий собственному значению μ с ненулевым модулем является решением уравнения (2.8) с $\lambda = \mu^{-1}$ и обратно, каждое ненулевое решение уравнения (2.8) является собственным вектором оператора T. Аналогичное предложение справедливо также для сопряженной системы. Однако, здесь положение более сложно.

Пусть x — собственный вектор оператора T, соответствующий собственному значению μ, т.е. $(L - B)^{-1} Cx = \mu x$, или $\mu^{-1}Cx = (L - B)x$. Обратно, пусть x — решение уравнения (2.8) для некоторого $\lambda \neq 0$, т.е. $Lx = Bx + \lambda Cx$, откуда $x = \lambda(L - B)^{-1} Cx$, так что x — собственный вектор оператора T.

Приходим к сопряженной системе. Пусть y^* — собственный вектор оператора $T^* = C^*(L^* - B^*)^{-1}$, соответствующий собственному значению μ: $T^*y^* = \mu y^*$, $|\mu| \neq 0$. Положим $z^* = (L^* - B^*)^{-1} y^*$, так что $(L^* - B^*) z^* = y^* = \mu^{-1}C^*(L^* - B^*)^{-1} y^* = \mu^{-1}C^*z^*$. Мы видим, что каждому собственному вектору y^* оператора T^*, соответствующему ненулевому собственному значению μ, можем поставить в соответствие ненулевое решение $z^* = (L^* - B^*)^{-1} y^*$ уравнения (2.9) с $\lambda = \mu^{-1}$. Наоборот, пусть z^* является решением уравнения (2.9) с $\lambda \neq 0$. Полагая $y^* = C^* z^*$, получим $(L^* - B^*)^{-1} y^* = (L^* - B^*)^{-1} C^* z^* = \lambda^{-1} z^*$, следовательно, $C^*(L^* - B^*)^{-1} y^* = \lambda^{-1} y^*$ и тем самым доказано и обратное предложение.

Существование не более чем счетного множества значений λ, $\bar{\lambda}$, для которых имеются ненулевые решения однородных систем (2.8), (2.9), вытекает из линейности и компактности оператора $T = (L - B)^{-1} C$. Существование положительного характеристического значения λ_0, его свойства и свойства соответствующих собственных векторов x_0, x_0^* вытекают из леммы 2.2 и теоремы **B**.

Замечание 4. *Существование по крайней мере одного собственного вектора* $x_0 \in \mathscr{K}$ *уравнения* (2.8) *и по крайней мере одного собственного вектора* $x_0^* \in \mathscr{K}$ *уравнения* (2.9), *соответствующих положительному характеристическому значению* λ_0, *мы можем получить с помощью тех же рассуждений, пользуясь только леммой* 2.1.

В заключение этой главы мы приведем одно предложение, с помощью которого будет облегчен выбор начальных приближений для конструкции характеристических значений и собственных векторов уравнений (2.8), (2.9) итерационными методами.

Теорема 2.2. *Если* μ_0 *является доминантным собственным значением* (собственным значением с максимальным модулем) *оператора* $T \in [\mathscr{X}]$, *то существуют операторы*

$$B_1 = \lim_{n\to\infty} \mu_0^{-n} T^n\,, \quad C_1 = \lim_{n\to\infty} \mu_0^{-n} T^{*n} \tag{2.10}$$

и оба эти оператора абсолютно $\mathscr{K}$*—положительны.*

Доказательство. Утверждение теоремы 2.2 является следствием существования доминантной точки спектров операторов T, T^* ([4], теорема 1) и абсолютной $\mathscr{K}$—положительности этих операторов.

Следствие. *Если* $x \in \mathscr{K}$, $x \neq 0$, *то* $B_1 x \gg 0$ *и* $C_1 x \gg 0$.

Замечание 5. *Пусть* μ_0 — *доминантная точка спектра оператора* T. *Вектор* $x \in \mathscr{K}$, $x \neq 0$ *не может принадлежать множеству* $\mathscr{X} \ominus \mathscr{M}(\mu_0)$, *где* $\mathscr{M}(\mu_0) = \{x \mid \mu_0 x - Tx = 0\}$, *и множеству* $\mathscr{X} \ominus \mathscr{M}^*(\mu_0)$, *где* $\mathscr{M}^*(\mu_0) = \{x \mid \mu_0 x - T^* x = 0\}$.

Из теоремы 1 статьи [4] следует, что

$$B_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} R(\lambda, T)\, \mathrm{d}\lambda\,, \quad C_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} R(\lambda, T^*)\, \mathrm{d}\lambda\,,$$

где C_0 — окружность с центром в точке μ_0 и с достаточно малым радиусом.

В предыдущих галвах мы доказали, что $T = (L - B)^{-1} C = \sum_{k=0}^{\infty} [L^{-1}B]^k L^{-1}C$ является линейным компактным оператором. Мы доказали тоже, что имеется положительное доминантное собственное значение μ_0 оператора T. Этими свойствами обладает также сопряженный оператор T^*.

Произвольная точка v, принадлежащая комплексной плоскости, для которой

$$|v| > \mu_0 , \tag{3.1}$$

является регулярной точкой резольвент $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$, $R(\lambda, T^*) = (\lambda I - T^*)^{-1}$. Это значит, что уравнения

$$vu - Tu = y , \quad y \in \mathscr{X} , \tag{3.2}$$

$$\bar{v}u^* - T^*u^* = y^* , \quad y^* \in \mathscr{X} , \tag{3.3}$$

обладают единственными решениями $u = R(v, T) y$, $u^* = R(\bar{v}, T^*) y^*$. Неоднородные системы (0.1)–(0.4), или, что то же самое, (1.3) и (1.9) и уравнения

$$x - \lambda(L - B)^{-1} Cx = (L - B)^{-1} z , \quad \lambda = v^{-1} ,$$

$$C^*x^* - \bar{\lambda}C^*(L^* - B^*)^{-1} C^*x^* = C^*(L^* - B^*)^{-1} z^*$$

эквивалентны.

При условии, что

$$|\lambda| < \lambda_0 = \mu_0^{-1} , \tag{3.4}$$

уравнение (1.3) ((1.9)) имеет одно и только одно решение $x \in \mathscr{X}$ ($x^* \in \mathscr{X}$) и справедливы равенства

$$x = [I - \lambda(L - B)^{-1} C]^{-1} (L - B)^{-1} z , \tag{3.5}$$

$$C^*x^* = [I - \bar{\lambda}C^*(L^* - B^*)^{-1}]^{-1} C^*(L^* - B^*)^{-1} z^* ,$$

и

$$x^* = \bar{\lambda}(L^* - B^*)^{-1} C^*x^* + (L^* - B^*)^{-1} z^* . \tag{3.6}$$

Если λ, $\bar{\lambda}$ произвольны, то уравнения (1.3), (1.9) обладают решениями тогда и только тогда, если неоднородные члены z, z^* подчиняются условиям ортогональности

$$(z, y^*) = 0 , \tag{3.7}$$

$$(y, z^*) = 0 , \tag{3.8}$$

где y^* – произвольное решение однородного уравнения (2.9) и y – произвольное решение уравнения (2.8).

Чтобы доказать это предложение, вспомним, что ввиду линейности и компактности операторов T, T^* уравнения

$$u - \lambda T u = s\,, \tag{3.9}$$

$$u^* - \bar{\lambda} T u^* = s^* \tag{3.10}$$

имеют решения в том и только в том случае, если $(s, v^*) = 0$, $(v, s^*) = 0$ для каждого решения v^* уравнения

$$v^* - \bar{\lambda} T^* v^* = 0 \tag{3.11}$$

и для каждого решения v уравнения

$$v - \lambda T v = 0\,. \tag{3.12}$$

Очевидно, что уравнение (1.3) разрешимо тогда и только тогда, если разрешимо уравнение (3.9) с правой частью $s = (L - B)^{-1} z$. Аналогично, уравнение (1.9) разрешимо тогда и только тогда, если разрешимо уравнение (3.10) с правой частью $s^* = C^*(L^* - B^*)^{-1} z^*$. Из линейности и компактности операторов T, T^* вытекает ([10], теорема 5.5 – I, стр. 283), что необходимым и достаточным условием разрешимости уравнений (3.9), (3.10) является выполнение равенств

$$\begin{aligned} 0 &= (s, v^*) = ((L - B)^{-1} z,\ v^*) = (z, (L^* - B^*)^{-1} v^*)\,, \\ 0 &= (v, s^*) = (v, T^* z^*) = (Tv, z^*) = \lambda^{-1}(v, z^*)\,, \end{aligned} \tag{3.13}$$

где v – решение уравнениея (3.12) и v^* – решение уравнения (3.11).

Положим $y = v$, $y^* = (L^* - B^*)^{-1} v^*$. Аналогично как в доказательстве теоремы 2.2 получим, что только что определенные векторы y, y^* являются решениями уравнений (2.8), (2.9). Из (3.13) следует справедливость равенств $0 = (z, y^*)$, $0 = (y, z^*)$ – условий ортогональности.

Тем самым доказана

Теорема 3.1. *Необходимым и достаточным условием разрешимости уравнений* (1.3), (1.9) *является выполнение условий ортогональности* (3.7) *и* (3.8). *Если имеет место неравенство* (3.4), *где* $\mu_0 = \lambda_0^{-1}$ – *доминантная точка спектра оператора* T, *то существует одно и только одно решение уравнения* (1.3) ((1.9)) *для произвольного вектора* $z \in \mathscr{X}$ $(z^* \in \mathscr{X})$ *и вид решения дается формулой* (3.5) ((3.6)).

4. ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

Широко распространенным методом конструкции решений систем уравнений (1.3), (1.9) является, бесспорно, итерационный метод. Для конструкции решений однородных задач используется особенно так называемый метод итерации источника. Этот метод является в определенном смысле математической моделью физических процессов, описываемых этими системами. В теории приближенных методов метод итерации источника известен как модифицированный метод Келлога построения собственных значений и собственных векторов. Почти все на практике употребляемые итерационные схемы типа итерации источника мы можем получить с помощью единого принципа (см. [4] и [8]). К построению решений неоднородных систем используются некоторые комбинации метода последовательных приближений Банаха-Ралля [7], [5], [9].

Метод итерации источника мы можем определить с помощью формул

$$v^{(n)} = Cu_{(n)}, \quad Lu^{(n+1)} = Bu^{(n+1)} + v^{(n)}, \tag{4.1}$$

$$u_{n+1} = \lambda_{(n)} u^{(n+1)}, \quad u_{(0)} = x^{(0)},$$

$$L^* u^*_{(n)} = B^* u^*_{(n)} + v^{*(n)}, \quad u^{*(n+1)} = C^* u^*_{(n)}, \tag{4.2}$$

$$v^{*(n+1)} = \lambda^*_{(n)} u^{*(n+1)}, \quad v^{*(0)} = x^{*(0)},$$

$$\lambda_{(n)} = \frac{y_n'(u_{(n)})}{z_n'(u^{(n+1)})}, \tag{4.3}$$

$$\lambda^*_{(n)} = \frac{y_n'(v^{*(n)})}{z_n'(u^{*(n+1)})}, \tag{4.4}$$

где y_n', z_n' — функционалы, подчиняющиеся следующим условиям:

Предположим что справедливы неравенства

$$|y_n'(x - y)| \leqq C_1 \|x - y\|, \quad |z_n'(x - y)| \leqq C_2 \|x - y\|, \tag{4.5}$$

$$x \in \mathscr{X}, \quad y \in \mathscr{X},$$

в которых c_1, c_2 — постоянные, независимые от n, от x и от y.

Пусть существует функционал y' такой, что

$$y_n'(x) \to y'(x), \quad z_n'(x) = y'(x) \tag{4.6}$$

для произвольного вектора $x \in \mathscr{X}$.

Пусть равенства

$$y_n'(\lambda x) = \lambda y_n'(x), \quad z_n'(\lambda x) = \lambda z_n'(x) \tag{4.7}$$

имеют место для всех векторов $x \in \mathscr{X}$ и $\lambda > 0$.

Предположим далее, что найдется $\delta > 0$ такое, что неравенство

$$|y_n'(x) - y'(x)| + |z_n'(x) - y'(x)| \leqq C_3(x)\, n^{-1-\delta} \tag{4.8}$$

справедливо для всех векторов $x \in \mathscr{X}$ для достаточно больших n.

Пусть начальные итерационные векторы $x^{(0)}, x^{*(0)}$ положительны, т.е. $x^{(0)} \in \mathscr{K}$, $x^{(0)} \neq 0$, $x^{*(0)} \in \mathscr{K}$, $x^{*(0)} \neq 0$.

Наконец, пусть

$$(4.9) \qquad \begin{aligned} &y_n'(T^n x^{(0)}) \neq 0\,, \qquad z_n'(T^n x^{(0)}) \neq 0\,, \\ &y_n'(T^{*n} x^{*(0)}) \neq 0\,, \quad z_n'(T^{*n} x^{*(0)}) \neq 0 \end{aligned}$$

для $n = 0, 1, \ldots$

Вид некоторых на практике употребляемых последовательностей функционалов мы покажем позже.

Теорема 4.1. *Пусть $x^{(0)} \in \mathscr{K}$, $x^{*(0)} \in \mathscr{K}$ — ненулевые векторы. Если выполнены условия (4.5)–(4.9), то для последовательностей (4.3), (4.4) справедливы соотношения*

$$(4.10) \qquad \lambda_{(n)} \to \lambda_0\,, \quad \lambda_{(n)}^* \to \lambda_0$$

и для последовательностей $\{u_{(n)}\}$ из (4.1) и $\{u_{(n)}^*\}$ из (4.2) в норме пространства $\mathscr{X}$ имеют место соотношения

$$(4.11) \qquad u_{(n)} \to u_0\,, \quad u_{(n)}^* \to u_0^*\,,$$

где u_0 — собственный вектор уравнения (2.8) и u_0^* — собственный вектор уравнения (2.9), соответствующие характеристическому значению λ_0, где $\lambda_0^{-1} = \mu_0$ — доминантная точка спектров операторов T, T^*.

Доказательство. Справедливост соотношений (4.10), (4.11) следует из теоремы 4′ статьи [8], условия которой выполнены в силу (4.5)–(4.9).

Замечание 6. *В силу условия (b) вводной главы и в силу леммы 1.1 координаты $u_{01}, \ldots, u_{0m}$ собственного вектора u_0, о котором речь идет в теореме 4.1, являются ограниченными в $\mathfrak{A}$. Начальные итерационные векторы $x^{(0)}, x^{*(0)}$ поэтому выбираем так, чтобы их координаты были ограничены в $\mathfrak{A}$.*

Если мы определим некоторый итерационный процесс с помощью функционалов y_n', z_n' подчиняющихся условиям теоремы (4.1), то у нас имеется возможность строить другие итерационные схемы, комбинируя имеющиеся схемы. Мы будем поэтому в примерах приводить лишь одну из последовательностей $\{y_n'\}$, $\{z_n'\}$, потому что всегда можем построить итерационный процесс с $y_n' = z_n'$.

Пример 1. Предположим, что $x^{(0)} \in \mathscr{K}$, $x^{(0)} \neq 0$, $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})$ и что найдется точка $(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{\Omega}_0) \in \mathfrak{A}$ такая, что $x_j^{(0)}(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{\Omega}_0) > 0$, $j = 1, \ldots, m$. Пусть оператор $A \in [\mathscr{X}]$ обладает тем свойством, что $y_j(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{\Omega}_0) > 0$, где $y = Ax$ имеет место для произвольного вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$, для которого $x_j(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{\Omega}_0) > 0$. Положим

$$(4.12) \qquad y_n'(x) = \sum_{j=1}^{m} \zeta_j y_j(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{\Omega}_0)\,,$$

где $y = Ax$ и ζ_j — или 1 или 0 и $\sum_{j=1}^{m} |\zeta_j| > 0$. Мы получим итерационный процесс, для которого

$$\lambda_{(n)} = \frac{\sum_{j=1}^{m} \zeta_j [Au_{(n)}]_j (\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\Omega}_0)}{\sum_{j=1}^{m} \zeta_j [Au^{(n+1)}]_j (\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\Omega}_0)}, \tag{4.13}$$

где $u_{(n)}$, $u^{(n+1)}$ определены формулами (4.1). В частности, если $A = I$ (I — идентический оператор) и $\zeta_j = 1$ для $j = 1, \ldots, m$, мы получим хорошо известную схему ([3], стр. 47, [14]).

Явный вид последовательностей $\{u_{(n)}\}$, $\{u^*_{(n)}\}$ приводить не будем. Мы надеемся, что вид формулы для $\lambda_{(n)}$ предоставляет возможность сделать достаточно наглядное представление о структуре рассматриваемого процесса.

Пример 2. Пусть $\Theta \neq A \in [\mathscr{X}]$ — некоторый $\mathscr{K}$—положительный оператор (символ Θ обозначает нулевой оператор). Положим

$$y'_n(x) = y'(x) = \|y\|, \quad y = Ax, \tag{4.14}$$

откуда

$$\lambda_{(n)} = \frac{\|Au_{(n)}\|}{\|Au^{(n+1)}\|}, \tag{4.15}$$

где $u_{(n)}$, $u^{(n+1)}$ определены формулами (4.1). Если $A = I$, то процесс (4.15) — хорошо известный процесс Келлога [4].

Пример 3. Пусть $\Theta \neq A \in [\mathscr{X}]$ — некоторый $\mathscr{K}$—положительный оператор. Положим

$$y'_n(x) = (Ax, y_n), \tag{4.16}$$

где $\{y_n\}$, $y_n \in \mathscr{X}$ — последовательность слабо сходящаяся к вектору $y \in \mathscr{X}$: $(x, y_n) \to (x, y)$ для всех векторов $x \in \mathscr{X}$. Мы получим систему итерационных схем следующего вида

$$\lambda_{(n)} = \frac{(Au_{(n)}, y_n)}{(Au^{(n+1)}, y_n)} \tag{4.17}$$

где векторы $u_{(n)}$, $u^{(n+1)}$ определены формулами (4.1).

Специальным выбором векторов y_n мы получим специальные итерационные схемы. Поэтому спрашиваем, которая из этой системы схем является наилучшей. В статье [7] доказано, что если в качестве критерия оптимальности взять некоторые экстремальные свойства рассматриваемой совокупности итерационных схем, то оптимальным процессом типа (4.17) является процес, у которого y_n является элементом сопряженной итерационной последовательности. Это значит, что $y_n = v^{*(n)}$, где $v^{*(n)}$ определяется формулами (4.2) и $\lambda^*_{(n)} = \lambda_{(n)}$, где $A = I$. Преимущества этого процесса показывают соотношения

$$\lambda_{(n)} = \frac{\left(u_{(n)}, v^{*(n)}\right)}{\left(u^{(n+1)}, v^{*(n)}\right)} = \frac{\left(u_{(n)}, T^{*n}v^{*(0)}\right)}{\left(u^{(n+1)}, T^{*(n)}v^{*(0)}\right)} = \frac{\left(T^n u_{(0)}, T^{*n}v^{*(0)}\right)}{\left(T^{n+1}u_{(0)}, T^{*n}v^{*(0)}\right)} =$$

$$= \frac{\left(T^{2n}u_{(0)}, v^{*(0)}\right)}{\left(T^{2n+1}u_{(0)}, v^{*(0)}\right)},$$

откуда видно, что приближение $\lambda_{(n)}$, данное по формуле (4.17) с $y_n = v^{*(n)}$ равно $\lambda_{(2n)}$ с $y_n = v^{*(0)}$.

Замечание 7. *В прикладных задачах показывается, что преимущества „оптимального" процесса еще больше, чем показывает его простая связь со стационарным процессом* $y'_n = v^{*(0)}$. Это объясняется появлением ошибок округления. Ошибки округления, как известно, связаны с числом проведенных итераций. В случае „оптимального" процесса число итераций равно $n + n$ в отличие от стационарного процесса, где число итераций равно $2n$, а, значит, у „оптимального" процесса получаем ошибки округления порядка n, между тем как у стационарного процесса эти ошибки порядка $2n$.

Для полноты мы приведем точную формулировку „оптимальности" процесса (4.17) с $y_n = v^{*(n)}$.

Теорема 4.2. ([7]) *Итерационный процесс* (4.1), (4.2) *с* $\lambda_{(n)}$, *определенными формулой* (4.17) *и с* $y_n = v^{*(n)}$, $A = I$, *оптимален в том смысле, что минимумов функций*

$$\psi_n(v) = \left(u^{(n+1)} - v u_{(n)},\ u^{*(n+1)} - v v^{*(n)}\right)$$

достигается в точках $v = \lambda_n^{-1}$, $n = 0, 1, \ldots$. *Равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(v) = \psi(v),$$

где

$$\psi(v) = \beta^2(\mu_0 - v)^2 \left(B_1 x^{(0)},\ C_1 x^{*(0)}\right),$$

$$\beta = \prod_{n=0}^{\infty} \mu_0 \lambda_{(n)},$$

имеет место равномерно в произвольном отрезке $\langle v_1, v_2\rangle$, $-\infty < v_1 \leqq v_2 < +\infty$.

К построению решений неоднородных систем (1.3), (1.9) мы можем, правда, пользоваться методом Банаха-Ралля, однако из-за медленной сходимости мы вынуждены использовать некоторые методы для ускорения сходимости итерационных последовательностей типа Банаха-Ралля. Широко распространенным методом ускорения сходимости итерационных процессов является метод Люстерника [2], [5], [8] [11], [12]. Метод ускорения Люстерника заключается в использовании некоторых приближений доминантного собственного значения оператора T.

Чтобы обеспечить сходимость итерационных последовательностей мы требуем, чтобы рассматриваемые системы обладали единственными решениями. Мы будем поэтому предполагать, что

$$(3.4) \qquad |\lambda| < \lambda_0 ,$$

где $\lambda_0^{-1} = \mu_0$ — доминантная точка спектра оператора T.

Определим итерационные процессы

$$(4.18) \qquad z_{n+1} = \frac{1}{\lambda_{(n)} - \lambda} \left(\lambda_{(n)} y_{n+1} - \lambda y_n\right),$$

$$(4.19) \qquad z^*_{n+1} = \frac{1}{\lambda^*_{(n)} - \bar{\lambda}} \left(\lambda^*_{(n)} y^*_{n+1} - \bar{\lambda} y^*_n\right),$$

в которых $\lambda_{(n)}$, $\lambda^*_{(n)}$ определены формулами (4.3), (4.4) и y_n, y^*_n — это последовательные приближения, определенные следующими формулами

$$(4.20) \qquad L y_{n+1} = B y_{n+1} + \lambda C y_n + z , \quad y_0 = x_0 \in X ,$$

$$(4.21) \qquad L^* x^*_{n+1} = B x^*_{n+1} + \bar{\lambda} y^*_n + z^* , \quad y^*_{n+1} = C^* x^*_{n+1} , \quad x^*_0 \in X , \quad y^*_0 = C^* x^*_0 .$$

Сходимость итерационного процесса (4.18), (4.19) является следствием абсолютной $\mathscr{K}$-положительности оператора $T = (L - B)^{-1} C$ ([8], теорема 4).

Теорема 4.3. *Если выполнено условие* (3.4), *то последовательности* $\{z_n\}$, $\{z^*_n\}$ *определенные формулами* (4.18), (4.19) *сходятся в норме пространства* $\mathscr{X}$ *к решениям* x, x^* *уравнений* (1.3), (1.9), *где* z, z^* *произвольные элементы пространства* $\mathscr{X}$. *Имеют место оценки*

$$(4.22) \qquad \|z_n - x\| \leqq c_0 v^n , \quad v > \varrho ,$$

$$\|z^*_n - x^*\| \leqq c^*_0 v^n , \quad v > \varrho ,$$

где c_0, c^*_0 *— независимые от* n *постоянные и* ϱ *— радиус наименьшего круга с центром в начале системы координат и содержащего спектр оператора* T *кроме точки* $\lambda\mu_0$. *Итак,* $v < |\lambda\mu_0|$.

Замечание 8. *Известно* ([5], [8]), *что последовательности* $\{y\}$, $\{y^*_n\}$, *определенные формулами* (4.20), (4.21), *сходятся по норме пространства* $\mathscr{X}$ *к решениям* x, x^*. *однако медленнее, чем последовательности* (4.18), (4.19). *Справедливы оценки*

$$(4.23) \qquad \|y_n - x\| \leqq d_0 |\lambda\mu_0|^n ,$$

$$\|y^*_n - x^*\| \leqq d^*_0 |\lambda\mu_0|^n ,$$

где d_0, d^*_0 *— независимые от* n *постоянные. Очевидно, что преимущества процесса* (4.18), (4.19) *по сравнению с последовательными приближениями* (4.20), (4.21), *тем больше, чем больше отношение* μ_0/v.

Следствие. *Если мы положим в формулах* (4.18), (4.19) $x_0 = (L - B)^{-1} z$, $x_0^* = C^*(L^* - B^*)^{-1} z^*$, *получим итерационную последовательность в форме „усеченного" ряда Неймана* ([11], глава 6).

$$w_{n+1} = \frac{\lambda_{(n)}}{\lambda_{(n)} - \lambda} x_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} x_k ,$$

$$w_{n+1}^* = \frac{\lambda_{(n)}^*}{\lambda_{(n)}^* - \bar{\lambda}} x_{n+1}^* + \sum_{k=0}^{n} x_k^* ,$$

где

$$x_k = (\lambda T)^k x_0 , \quad x_k^* = (\bar{\lambda} T^*)^k x_0^* .$$

5. КРИТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ

Если уравнения (0.1), (0.2) с краевыми условиями (0.3), (0.4) описывают плотность и ценность нейтронов в ядерном реакторе, то операторы L, B, C в уравнениях (1.3), (1.9) зависят от некоторых параметров, например, от размеров реактора, от состава горючего и от подобных параметров.

Пусть Γ — интервал вещественных чисел и пусть оператор $T = (L - B)^{-1} C$ зависит от $\gamma \in \Gamma$. Критическим значением (параметром) называется такое $\gamma_0 \in \Gamma$, для которого соответствующее доминантное собственное значение $\mu_0(\gamma_0)$ равно 1. В том случае реактор называем критическим. Для $\mu_0(\gamma) < 1$ реактор является по определению подкритическим и для $\mu_0(\gamma) > 1$ надкритическим. Из физических соображений очевидно, что существует не более чем один критический параметр. Следуя тем же соображениям, мы ожидаем, что $\mu_0 = \mu_0(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$ является строго монотонной функцией. Если эта гипотеза справедлива, то из нее следует существование или несуществование, а в случае существования и однозначность критического параметра. Докажем, что эта гипотеза справедлива. Монотонность функции $\mu_0 = \mu_0(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, является следствием монотонной зависимости оператор-функции $T = T(\gamma)$ от названного аргумента.

Определение. *Пусть* $\Gamma = \langle \gamma_{-\infty}, \gamma_{+\infty} \rangle$ — *интервал вещественных чисел,* $-\infty < \gamma_{-\infty} \leqq \gamma \leqq \gamma_{+\infty} < +\infty$. *Пусть* $A(\gamma) \in [\mathscr{X}]$ *для всех* $\gamma \in \Gamma$. *Оператор-функция* $A = A(\gamma)$ *называется непрерывной в точке* $\gamma_0 \in \Gamma$, *если для произвольного* $\varepsilon > 0$ *можно подобрать* $\delta > 0$ *так, чтобы неравенство*

$$\|A(\gamma) - A(\gamma_0)\| < \varepsilon$$

имело место для весх $\gamma \in \Gamma$, *для которых* $|\gamma - \gamma_0| < \delta$. *Если* $A = A(\gamma)$ *непрерывна в каждой точке* $\gamma \in \Gamma$, *то говорим, что оператор-функция* $A = A(\gamma)$ *непрерывна в* Γ.

Теорема 5.1. *Предложим, что*

1. $A(\gamma) \in [\mathscr{X}]$ *является абсолютно* $\mathscr{K}$*-положительным оператором для всех* $\gamma \in \Gamma$.

2. *Оператор-функция $A = A(\gamma)$ непрерывна в Γ.*

3. *Соотношение*

$$[A(\gamma) - A(\gamma')]\, x > \alpha(\gamma, \gamma')\, x\,,$$

в котором $\alpha(\gamma, \gamma')$ зависит в общем от x и $\alpha(\gamma, \gamma') > 0$ для $\gamma > \gamma'$, имеет место для каждого вектора $x \in \mathscr{K}$, координаты которого положительны почти всюду в $\mathfrak{A}$.

Если выполнены условия 1.–5., то функция $\mu_0 = \mu_0(\gamma)$, где $\mu_0(\gamma)$ – доминатное собственное значение оператора $A(\gamma)$, является непрерывной строго возрастающей, т.е.

$$\mu_0(\gamma') < \mu_0(\gamma) \quad \text{для} \quad \gamma' < \gamma,\ \gamma' \in \Gamma,\ \gamma \in \Gamma\,. \tag{5.1}$$

Доказательство. Из теоремы **В** вытекает существование доминантного собственного значения $\mu_0(\gamma')$ оператора $A(\gamma')$ для каждого $\gamma' \in \Gamma$. Пусть $x_0(\gamma')$ – соответствующий собственный вектор оператора $A(\gamma')$ такой, что $x_0(\gamma') \in K$, т.е.

$$A(\gamma')\, x_0(\gamma') = \mu_0(\gamma')\, x_0(\gamma')\,.$$

Из условия 3. выводим соотношения

$$\begin{aligned} A(\gamma)\, x_0(\gamma') &= A(\gamma')\, x_0(\gamma') + [A(\gamma) - A(\gamma')]\, x_0(\gamma') > \\ &> [\mu_0(\gamma') + \alpha(\gamma, \gamma')]\, x_0(\gamma')\,. \end{aligned}$$

Теорема **Б** обеспечивает существование собственных элементов $v_0(\gamma)$, $y_0(\gamma)$ таких, что $A(\gamma)\, y_0(\gamma) = v_0(\gamma)\, y_0(\gamma)$, где $y_0(\gamma) \in \mathscr{K}$ и $v_0(\gamma) \geqq \mu_0(\gamma') + \alpha(\gamma, \gamma')$. Однако из теоремы **В** вытекает, что $y_0(\gamma) = c x_0(\gamma)$, где c – положительная постоянная, и тем самым $v_0(\gamma) = \mu_0(\gamma)$. Итак, мы доказали справедливость соотношений (5.1).

Непрерывность функции $\mu_0 = \mu_0(\gamma)$ доказывается точно так же, как в случае сильно $\mathscr{K}$–положительных операторов, что сделано в статье [6], теорема **С**.

В качестве примера, показывающего использование теоремы 5.1, мы приведем зависимость критичности ядерного реактора от обогащения горючего одним изотопом с большим поперечным сечением для деления. В этом случае предположим, что размеры реактора постоянны, так что реактор становится критическим для определенной концентрации присутствующих изотопов в составе горючего.

Предположим, что функции $\Sigma_j = \Sigma_j(\boldsymbol{r}, \gamma)$, $\Sigma_j^s = \Sigma_j^s(\boldsymbol{r}, \gamma)$, $\Sigma_j^f = \Sigma_j^f(\boldsymbol{r}, \gamma)$, $v_j^f = v_j^f(\boldsymbol{r}, \gamma)$, $w_{jk}^s = w_{jk}^s(\mu, \gamma)$, $w_{jk}^f = w_{jk}^f(\mu, \gamma)$ равномерно ограничены в Γ. Зависимость этих функций от степени обогащения предполагается монотонной и удовлетворяющей условию Липшица, т.е. например,

$$|\Sigma_j^f(\boldsymbol{r}, \gamma) - \Sigma_j^f(\boldsymbol{r}, \gamma')| \leqq \kappa |\gamma - \gamma'|\,,$$

где κ – постоянная, независимая то γ, γ' и от $\boldsymbol{r} \in \mathfrak{G}$ (γ обозначает степень обогащения горючего изотопом с большим поперечным сечением для деления, измеряемого, например, в процентах). Предполагается выполнение следующих неравенств

$$\Sigma_j^f(\mathbf{r}, \gamma) > \Sigma_j^f(\mathbf{r}, \gamma'), \quad \nu_j^f(\mathbf{r}, \gamma) > \nu_j^f(\mathbf{r}, \gamma), \quad w_{jk}^f(\mu, \gamma) \geqq w_{jk}^f(\mu, \gamma')$$

для $\gamma > \gamma'$,

$$\Sigma_j^s(\mathbf{r}, \gamma)\, w_{jk}^s(\mu, \gamma) \geqq \Sigma_j^s(\mathbf{r}, \gamma')\, w_{jk}^s(\mu, \gamma')$$

для $\gamma \geqq \gamma'$,

$$\Sigma_j(\mathbf{r}, \gamma) > \Sigma_j(\mathbf{r}, \gamma')$$

для $\gamma > \gamma'$.

Предположим далее, что справедливы тождества

$$\begin{aligned} \Sigma_j^f(\mathbf{r}, \gamma) &= \Sigma_j^f(\mathbf{r}, \gamma') + \sigma_{fj}(\mathbf{r}, \gamma, \gamma'), \\ \nu_j^f(\mathbf{r}, \gamma) &= \nu_j^f(\mathbf{r}, \gamma') + \zeta_j(\mathbf{r}, \gamma, \gamma'), \\ \Sigma_j(\mathbf{r}, \gamma) &= \Sigma_j(\mathbf{r}, \gamma') + \sigma_j(\mathbf{r}, \gamma, \gamma'), \end{aligned} \tag{5.2}$$

где

$$\sigma_{fj}(\mathbf{r}, \gamma, \gamma') > 0, \quad \zeta_j(\mathbf{r}, \gamma, \gamma') > 0, \quad \sigma_j(\mathbf{r}, \gamma, \gamma') > 0 \tag{5.3}$$

для $\gamma > \gamma'$, $j = 1, \ldots, m$.

Будем проверять выполнение условий теоремы 5.1 для оператора $T = T(\gamma)$ в предположении, что условие 1. выполнено для $\gamma = 0$. Нетрудно убедиться в том, что это условие выполняется тогда для всех $\gamma > 0$, $\gamma < +\infty$, ввиду (5.2), (5.3).

Непрерывность оператор-функции $T = T(\gamma)$ требуемая в условии 2. является следствием непрерывности оператор-функции $C = C(\gamma)$ и равномерной ограниченности семейства операторов $\{[L(\gamma) - B(\gamma)]^{-1}\}$. Непрерывность оператор-функции $C = C(\gamma)$ получим с помощью следующих рассуждений. Ясно, что матрица-оператор является непрерывной оператор-функцией в $[\mathscr{X}]$, если каждый элемент этой матрицы является непрерывной оператор-функцией в $\mathscr{L}_2(\mathfrak{A})$. Непрерывность операторов $C_{jk} = C_{jk}(\gamma)$ $1 \leqq j, k \leqq m$, следует из тождеств

$$[C_{jk}(\gamma) - C_{jk}(\gamma')]\, x_k \equiv$$
$$\equiv \int_{\boldsymbol{\Omega}} [\Sigma_k^f(\mathbf{r}, \gamma)\, \nu_k^f(\mathbf{r}, \gamma)\, w_{jk}^f(\mu, \gamma) - \Sigma_k^f(\mathbf{r}, \gamma')\, \nu_k^f(\mathbf{r}, \gamma')\, w_{jk}^f(\mu, \gamma')]\, x_k(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}')\, \mathrm{d}\Omega'$$

в силу оценок

$$[\Sigma_k^f(\mathbf{r}, \gamma)\, \nu_k^f(\mathbf{r}, \gamma)\, w_{jk}^f(\mu, \gamma) - \Sigma_k^f(\mathbf{r}, \gamma')\, \nu_k^f(\mathbf{r}, \gamma')\, w_{jk}^f(\mu, \gamma')] \leqq g(\mathbf{r}, \gamma, \gamma') \leqq g < +\infty,$$

где $g(\mathbf{r}, \gamma, \gamma')$ не зависит от j', k и g – некоторая постоянная. Соотношения $g(\mathbf{r}, \gamma, \gamma') \to 0$ для $\gamma \to \gamma'$ справедливы в силу теоремы Лебега и условий Липшица.

Равномерная ограниченность семейства операторов $\{[L(\gamma) - B(\gamma)]^{-1}\}$ вытекает из оценки

$$\|[L(\gamma) - B(\gamma)]^{-1} x\| = \| \sum_{k=0}^{\infty} [L^{-1}(\gamma) B(\gamma)]^k L^{-1}(\gamma) x\| \leqq \kappa_1 \|x\| ,$$

где постоянная κ_1 не зависит от $\gamma \in \Gamma$.

Чтобы доказать выполнение условия 3. теоремы 5.1 заметим, что по доказательству этой теоремы мы можем убедиться в том, что ввиду замечания 6, для обеспечения справедливости теоремы 5.1 достаточно проверять выполнение условия 3. этой теоремы лишь для векторов, координаты которых ограничены в $\mathfrak{A}$. Для обеспечения справедливости теоремы 5.1 достаточно доказать справедливость соотношений

$$[T(\gamma) - T(\gamma')]\, x > \alpha(\gamma, \gamma')\, x\,, \quad \alpha(\gamma, \gamma') > 0 \tag{5.4}$$

для $\gamma > \gamma'$, $x \in \mathscr{K}$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$ предполагая, что x_j ограничены и положительны почти всюду в $\mathfrak{A}$.

В силу справедливости соотношений

$$\begin{aligned}
[T(\gamma) - T(\gamma')]\, x &= T(\gamma)\, x - [(L - B)^{-1}]\,(\gamma')\, C(\gamma)\, x + \\
&\quad + [(L - B)^{-1}]\,(\gamma')\, C(\gamma)\, x - T(\gamma')\, x = \\
&= \{[(L - B)^{-1}]\,(\gamma) - [(L - B)^{-1}]\,(\gamma')\}\, C(\gamma)\, x + \\
&\quad + [(L - B)^{-1}]\,(\gamma')\,[C(\gamma) - C(\gamma')]\, x > [(L - B)^{-1}]\,(\gamma')\,[C(\gamma) - C(\gamma')]\, x = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} [L^{-1} B]^k\,(\gamma')\, L^{-1}(\gamma')\,[C(\gamma) - C(\gamma')]\, x > L^{-1}(\gamma')\,[C(\gamma) - C(\gamma')]\, x
\end{aligned}$$

достаточно доказать, что

$$L^{-1}(\gamma')\,[C(\gamma) - C(\gamma')]\, x > \alpha(\gamma, \gamma')\, x\,, \quad \alpha(\gamma, \gamma') > 0 \tag{5.5}$$

для $\gamma > \gamma'$, $x \in \mathscr{K}$, координаты которого ограничены и положительны почти всюду в $\mathfrak{A}$.

Во первых, докажем, что

$$[C(\gamma) - C(\gamma')]\, x > \beta(\gamma, \gamma')\, x\,, \quad \beta(\gamma,\gamma') > 0 \quad \text{для} \quad \gamma > \gamma'\,, \tag{5.6}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_m)$ — произвольный вектор, координаты которого ограничены и положительны почти всюду в $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{W} \times \Omega'$, $\operatorname{mes} \mathfrak{L} > 0$ — множество такое, что для x_j положительной почти всюду в $\mathfrak{A}$

$$\eta_j = \eta_j(x_j) = \inf_{\boldsymbol{r} \in \mathfrak{W},\, \boldsymbol{\Omega} \in \Omega'} x_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}) > 0\,, \quad \eta = \min_j \eta_j\,.$$

Если

$$\begin{aligned}
\sigma_j &= \sup_{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}) \in \mathfrak{A}} x_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega})\,, \quad \tau_{jk}(\boldsymbol{r}, \mu, \gamma, \gamma') = \\
&= [\Sigma_k^f(\boldsymbol{r}, \gamma)\, \nu_k^f(\boldsymbol{r}, \gamma)\, w_{jk}^f(\mu, \gamma) - \Sigma_k^f(\boldsymbol{r}, \gamma')\, \nu_k^f(\boldsymbol{r}, \gamma')\, w_{jk}^f(\mu, \gamma')]\,,
\end{aligned}$$

то

$$\sum_{k=1}^{m} [C_{jk}(\gamma) - C_{jk}(\gamma')]\, x_k \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{m} \int_{\Omega'} [\Sigma_k^f(\mathbf{r}, \gamma)\, v_k^f(\mathbf{r}, \gamma)\, w_{jk}^f(\mu, \gamma) - \Sigma_j^f(\mathbf{r}, \gamma')\, v_j^f(\mathbf{r}, \gamma')\, w_{jk}^f(\mu, \gamma')]\, x_k(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}')\, \mathrm{d}\Omega' \geqq$$

$$\geqq \sum_{k=1}^{m} \int_{\Omega'} \tau_{jk}(\mathbf{r}, \mu, \gamma, \gamma')\, x_k(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}')\, \mathrm{d}\Omega' \geqq \tau_j \,.\, \eta \,.\, \mathrm{mes}\, \Omega' \,.\, \frac{1}{\sigma_j}\, x_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}),$$

где

$$\tau_j = \inf_{(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \in \mathfrak{A}} \sum_{k=1}^{m} \tau_{jk}(\mathbf{r}, \mu, \gamma, \gamma') > 0 \,.$$

Итак, мы доказали, что для произвольной вектор—функции $x = (x_1, \ldots, x_m)$ с $x_j, j = 1, \ldots, m$ положительными и ограниченными почти всюду в $\mathfrak{A}$ справедливы соотношения

$$\sum_{k=1}^{m} [C_{jk}(\gamma) - C_{jk}(\gamma')]\, x_k > \beta_j(\gamma, \gamma')\, x_j \,, \tag{5.7}$$

где

$$0 < \beta_j(\gamma, \gamma') = \eta \,.\, \tau_j(\gamma, \gamma')\, \sigma_j^{-1} \,.\, \mathrm{mes}\, \Omega' \,.$$

Положим

$$\beta(\gamma, \gamma') = \min_j \beta_j(\gamma, \gamma') \,,$$

($\beta(\gamma,\gamma')$ зависит в общем от x). Соотношения (5.7) мы можем записать в форме

$$[C(\gamma) - C(\gamma')]\, x > \beta(\gamma, \gamma')\, x \,,$$

что и есть соотношение (5.6).

Явный вид оператора $L_j^{-1}(\gamma) = [M_j^{-1} S_j]\,(\gamma)$ хорошо известен. ([11]) С помощью его мы можем узнать, что мера множества нулей функции $y_j = L_j^{-1}(\gamma)\, x_j$, $x_j \in \mathscr{K}$, не больше меры множества нулей функции x_j. Если x_j положительна и ограничена почти всюду в $\mathfrak{A}$, то найдется множество $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$ mes $\mathfrak{A}_1 > 0$ такое, что

$$\xi_j = \inf_{(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \in \mathfrak{A}_1} x_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) > 0$$

и

$$y_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \geqq \varrho_j \xi_j \sigma_j^{-1} x_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \vartheta_j x_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \,, \tag{5.8}$$

где ϱ_j — положительные постоянные, $j = 1, \ldots, m$. Это значит, что имеет место соотношение

$$L^{-1}(\gamma')\, x > \vartheta(\gamma')\, x \,, \quad \gamma' \in \Gamma \,,$$

где

$$\vartheta = \vartheta(\gamma') = \min_j \vartheta_j(\gamma') \,.$$

Из (5.7), (5.8) вытекает, (5.5) с $\alpha(\gamma, \gamma') = \vartheta\beta(\gamma, \gamma')$, и тем самым проверено выполнение условия 3. теоремы 5.1.

Результатом только что приведенных рассуждений является

Теорема 5.2. *Пусть Γ – интервал вещественных чисел $\gamma \in \Gamma$. Каждое $\gamma \in \Gamma$ пусть обозначает степень обогащения горючего ядерного реактора изотопом с большим поперечным сечением для деления. Если $\lambda_0(\gamma)$ – характеристическое значение уравнения (2.8) для даной степени обогащения $\gamma \in \Gamma$, то для меньшей степени обогащения $\gamma' \in \Gamma$, $\gamma' < \gamma$, имеет место неравенство $\lambda_0(\gamma') > \lambda_0(\gamma)$. Если для некоторой степени обогащения $\gamma \in \Gamma$, $\lambda_0(\gamma) < 1$, то существует обогащение $\gamma_0 \in \Gamma$ для которого $\lambda_0(\gamma_0) = 1$, и степень этого обогащения определена однозначно.*

Цитированная литература

[1] *М. Г. Крейн, М. А. Рутман:* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха. Усп. мат. наук III (1948), № 1, 3—97.

[2] *Л. А. Люстерник:* Замечания к численному решению краевых задач уравнения Лапласа и вычислениям собственных значений методом сеток. Труды мат. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 20 (1947), 49—64.

[3] *Г. И. Марчук:* Численные методы расчета ядерных реакторов. Атомиздат, Москва 1958.

[4] *I. Marek:* Iterations of linear bounded operators and Kellogg's iterations in non self-adjoint eigenvalue problems. Czech. Math. Journ. 12 (1962), 536—554.

[5] *И. Марек:* Об одном методе ускорения сходимости итерационных процессов. Журнал выч. матем. и матем. физики 2 (1962), № 6, 963—971.

[6] *I. Marek:* Řetězová reakce s rychlými neutrony v obohaceném uranu. Aplikace matematiky 8 (1963), 102—117.

[7] *I. Marek:* Kellogg's iterations with minimizing parameters. Comment. Math. Univ. Carol 4, 2 (1963), 53—64.

[8] *I. Marek:* O speciálním typu lineárních rovnic v Hilbertově prostoru. Čas. pěst. mat. (v tisku).

[9] *L. B. Rall:* Error bounds for iterative solutions of Fredholm integral equations. Pacif. Journ. Math., Vol. 5 (1955), Suppl. 2, 977—986.

[10] *A. E. Taylor:* Introduction to functional analysis. J. Wiley publ., New York 1958.

[11] *В. С. Владимиров:* Об одном интегро-дифференциальном уравнении. Изв. Акад. Наук СССР, серия матем. 21 (1957), 3—52.

[12] *В. С. Владимиров:* Интегро-дифференциальное уравнение для переноса частиц. Изд. Акад. Наук СССР, сер. матем. 21 (1957), 681—710.

[13] *G. J. Habetler, M. A. Martino:* The multigroup diffusion equations of reactor physics. KAPL-1896, AEC Research and Development Report, 1958.

[14] *H. Wielandt:* Das Iterationsverfahren bei nicht selbstadjungierten linearen Eigenwertaufgaben. Math. Zeitschrift 50 (1944), 93—143.

Výtah

NĚKTERÉ MATEMATICKÉ ÚLOHY TEORIE RYCHLÝCH JADERNÝCH REAKTORŮ

IVO MAREK

Obsahem této práce je vyšetřování existence řešení soustav kinetických rovnic pro transport neutronů v mnohoskupinovém přiblížení. Vyšetřují se reaktory rychlé, protože pro tepelné reaktory je použitelné mnohoskupinové přiblížení difuzní a teorie difusních soustav je známa [13].

Uvedeme stručně obsahy jednotlivých odstavců, při čemž hlavní výsledky každého odstavce formulujeme ve tvaru teorémů.

V odstavci 1. jsou zavedeny potřebné definice a označení a jsou uvedena některá pomocná tvrzení.

Systém (0.1) tak zvaných základních rovnic reaktoru ([3], str. 33) v mnohoskupinovém přiblížení s okrajovými podmínkami (0.2) a systém rovnic k němu adjungovaný lze symbolicky zapisovati ve tvaru

$$Lx = Bx + \lambda Cx + z\,, \tag{1.3}$$

$$L^*x^* = B^*x^* + \bar{\lambda}C^*x^* + z^*\,, \tag{1.9}$$

kde L, B, C jsou lineární operátory definované formulemi (1.4), (1.5), (1.6), (1.7) a L^*, B^*, C^* jsou příslušné adjungované operátory. Předpokládáme, že platí nerovnosti (0.5).

Vlastnosti rovnic mnohoskupinového přiblížení (0.1)–(0.4) závisejí na spektrálních vlastnostech operátoru $T = (L - B)^{-1}\, C$, jmenovitě pak na jeho linearitě, kompaktnosti a absolutní $\mathscr{K}$–kladnosti (lemma 1.4, 1.5).

V odstavcích 2. a 3. jsou studovány vlastnosti kinetických rovnic a rovnic k nim adjungovaných. V odstavci 2. je dokázána existence kladné charakteristické hodnoty a kladných vlastních vektorů příslušných homogenních soustav. V odstavci 3. vyšetřujeme nehomogenní soustavy. Jsou nalezeny nutné a postačující podmínky pro existenci řešení nehomogenních soustav pro libovolné nehomogenní členy.

Věta 2.1. *Množina hodnot λ, $\bar{\lambda}$, pro něž existují nenulová řešení soustav* (2.8) *a* (2.9) *je nejvýše spočetná, není však prázdná. Existuje $\lambda_0 > 0$ a nezáporné vlastní vektory x_0, x_0^* rovnic* (2.8) *a* (2.9), *při čemž tyto rovnice nemají jiných nezáporných řešení kromě cx_0, $c^*x_0^*$, kde c, c^* jsou kladné konstanty.*

Věta 3.1. *K tomu, aby rovnice* (1.3), (1.9) *měly řešení, je nutné a stačí splnění podmínek ortogonality* (3.7), (3.8). *Je-li splněna podmínka* (3.4), *pak rovnice* (1.3), (1.9) *mají jediná řešení pro libovolné nehomogenní členy z, z^*.*

Odstavec 4. je věnován iteračním metodám sestrojování řešení soustav homogenních i nehomogenních. Podařilo se nám dokázati, že pouhá existence charakteristic-

ké hodnoty s minimálním modulem soustavy kinetických rovnic zaručuje konvergenci iteračních procesů typu iterace zdroje. Toto tvrzení platí i v obecném případě, kdy kinetické rovnice závisejí spojitě na energii. K sestrojování řešení nehomogenních soustav doporučujeme Ljusternikovu metodu urychlování konvergence obvyklých postupných aproximací Banach-Rallových.

Věta 4.1. *Jsou-li* $x^{(0)}$, $x^{*(0)}$ *nezáporné nenulové vektory a jsou-li splněny předpoklady* (4.5)–(4.9), *pak pro posloupnosti* (4.3), (4.4) *platí vztahy* (4.10) *a* (4.11), *kde* u_0 *vlastní vektor rovnice* (2.8) *a* u_0^* *vlastní vektor rovnice* (2.9) *příslušný charakteristické hodnotě* $\lambda_0 > 0$.

Věta 4.3. *Platí-li nerovnost* (3.4), *pak posloupnosti* $\{z_n\}$, $\{z_n^*\}$ *definované formulemi* (4.18), (4.19) *konvergují k řešením* x, x^* *rovnic* (1.3), (1.9) *a platí odhady* (4.22).

V odstavci 5. se zabýváme kritickými parametry jaderných reaktorů, jejich existencí a jednoznačností. Používáme k tomu věty zaručující spojitost a monotonii vlastní hodnoty s maximálním modulem lineární kompaktní absolutně $\mathscr{K}$–kladné operátor–funkce závislé na reálném parametru (věta 5.1).

Summary

SOME MATHEMATICAL PROBLEMS OF THE THEORY OF FAST REACTORS

IVO MAREK

The purpose of this paper is to prove the existence of solutions of the systems of the neutron transport equations in the multigroup energy approximation. We are interested in fast reactors, since for thermal reactors the diffusion theory approximation can be applied and the theory of these systems is well known [13].

Let us recapitulate the contents of individual chapters. The main results are formulated in the form of theorems.

In the first chapter there are given the necessary notations and basic auxiliary assertions.

Symbolically, the system (0.1) of the so-called basic equations of the reactor ([3], p. 33) in the multigroup energy approximation with the boundary conditions (0.2) and the adjoint system of equations can be written in the form

$$(1.3) \qquad Lx = Bx + \lambda Cx + z\,,$$

$$(1.9) \qquad L^*x^* = B^*x^* + \bar{\lambda}C^*x^* + z^*\,,$$

where L, B, C are linear operators defined by (1.4), (1.5), (1.6), (1.7) and L^*, C^*, B^* the corresponding adjoint operators. We suppose that the inequalities (0.5) hold.

The properties of the multigroup energy approximation systems (0·1)–(0·4) depend on the spectral properties of the operator $T = (L - B)^{-1} C$, especially on its linearity, compactness and absolute $\mathcal{K}$–positivity. (see lemma 1.4, lemma 1.5).

In the second and third chapters the properties of neutron transport equations together with the adjoint equations are studied. Namely, in the second chapter the existence of a positive characteristic value and positive eigenvectors of the homogeneous systems is proved. In the third chapter there are found necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of the unhomogeneous systems with arbitrary right sides z, z^*.

Theorem 2.1. *The set of characteristic values* λ, $\bar{\lambda}$ *of the systems* (2.8), (2.9) *is at most countable, but non empty. There exist a positive characteristic value* $\lambda_0 > 0$ *and corresponding non-negative eigenvectors* x_0, x_0^* *of the equations* (2.8), (2.9). *Moreover, these equations have no non-negative solutions other than* cx_0, $c^*x_0^*$, *where* c, c^* *are positive constants.*

Theorem 3.1. *The equations* (1.3), (1.9) *have solutions if and only if the ortogonality conditions* (3.7), (3.8) *are fulfilled. If condition* (3.4) *holds, the mentioned equations have unique solutions* x, x^* *for arbitrary right sides* z, z^*.

The fourth chapter is concerned with the construction of iterative methods of solutions of both homogeneous and non-homogeneous systems. We have succeeded in proving that the existence of a characteristic value with minimal absolute value yields the convergence of iterative processes of the type "source iteration". This assertion holds also in the general case if the neutron transport equations depend on energy continuously.

Theorem 4.1. *Assume that* $x^{(0)}, x^{*(0)}$ *are non-negative and non zero–vectors and that conditions* (4.5)–(4.9) *are satisfied. Then for the sequences* (4.3), (4.4) *the relations* (4.10), (4.11) *hold, where* u_0 *is an eigenvector of equation* (2.8) *and* u_0^* *is an eigenvector of equation* (2.9) *corresponding to the characteristic value* $\lambda_0 > 0$.
For the construction of solutions of the non-homogeneous systems, Ljusternik's method of improving the convergence of the usual Banach-Rall successive approximations is recommended.

Theorem 4.3. *If the inequalities* (3.4) *holds, the sequences* $\{z_n\}$, $\{z_n^*\}$ *defined by the formulae* (4.18), (4.19) *converge to the solutions* x, x^* *of the equations* (1.3), (1.9) *and the estimates* (4.22) *hold.*

In the fifth chapter we are concerned with critical parameters of neclear reactors, with their existence and unicity. For proving this, the theorem asserting the continuous and monotonous dependence of the eigenvalue with the maximal absolute value of a linear compact absolutely $\mathcal{K}$–positive operator–function depending on a real parameter is applied.

Адрес автора: *Ivo Marek* C.Sc., Ústav jaderného výzkumu ČSAV, Řež, p. Klecany.