Pál Rózsa; Imre Péter Tóth

Über die direkte numerische Lösung von partiellen Differentialgleichungen mit Anwendung der Hypermatrizen

Aplikace matematiky, Vol. 10 (1965), No. 3, 289–292

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102965

SVAZEK 10 (1965) APLIKACE MATEMATIKY ČÍSLO 3

ÜBER DIE DIREKTE NUMERISCHE LÖSUNG VON PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT ANWENDUNG DER HYPERMATRIZEN

P. Rózsa und I. Tóth

(zum Thema c)

Die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen geschieht im allgemeinen mit Hilfe des Differenzenverfahrens. Die am meisten verbreiteten Methoden suchen die Lösung des so erhaltenen algebraischen Gleichungssystems durch Iteration. Es gibt jedoch eine Bestrebung, in gewissen Fällen zur Lösung des Systems direkte Methoden anzuwenden. Die spezielle Struktur der Koeffizientenmatrix des durch die partielle Differenzengleichung erhaltenen Gleichungssystems ermöglicht nämlich, die Matrizen auf Grund einiger Ergebnisse der Theorie der Hypermatrizen umzukehren. Die Ausnützung der zweckmässigen Aufteilung der Koeffizientenmatrix ist schon in den Arbeiten von Cornock zu finden [1]. E. Egerváry hat durch die Verallgemeinerung der Ergebnisse von Williamson [10] und Stéphanos [9] die Elemente der Kehrmatrix mit Hilfe doppelter Summen in geschlossener Form angegeben. In seinen Untersuchungen wurde die Differentialgleichung mit Genauigkeit von $O(h^2)$ durch eine Differenzengleichung approximiert [2]. Es ist bekannt, dass die Grössenordnung des Fehlers durch einen entsprechenden, aus neun benachbarten Funktionenwerten gebildeten Differenzenoperator auf $O(h^6)$ vermindert werden kann ([7], [4] S. 176, [5] S. 112). A. Békéssy stellte die Frage, ob diese Methode mit dem Egerváryschen Algorithmus verknüpfbar wäre. Wir haben gezeigt [8], dass diese Frage positiv beantwortet werden kann.

Betrachten wir die Poissonsche Differentialgleichung

$$\Delta w = - f(x, y) \tag{1}$$

für ein Rechteckgebiet mit homogenen Randbedingungen, d. h., am Rand ist $(w)_R = 0$. Führen wir die Symbole

$$\Diamond\, w_{ip} = w_{i,p+1} + w_{i,p-1} + w_{i+1,p} + w_{i-1,p} - 4w_{ip}\,,$$

$$\Box\, w_{ip} = w_{i+1,p+1} + w_{i+1,p-1} + w_{i-1,p+1} + w_{i-1,p-1} - 4w_{ip}$$

ein und entwickeln wir die hier auftretenden Differenzen in Taylorsche Reihen, so erhalten wir die Differenzengleichung

$$(2)\quad \frac{1}{6h^2}(4\Diamond+\Box)w_{ip}=g_{ip}\,,\quad g_{ip}=f_{ip}+\frac{h^2}{12}(\Delta f)_{ip}+\frac{h^4}{360}\left\{(\Delta^2 f)_{ip}+2\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\,\partial y^2}\right)_{ip}\right\},$$

welche die Differentialgleichung (1) mit einem Fehler von Grössenordnung h^6 approximiert, wo h die Maschenweite bezeichnet. Falls die Funktion $f(x, y)$ in analytischer Form nicht gegeben ist, nur ihre in den Gitterpunkten angenommenen Werte bekannt sind, so können die Werte g_{ip} in (2) mit Hilfe der Formel

$$(3)\quad \begin{aligned} g_{ip} = {} & \tfrac{7}{90}(f_{i,p+1}+f_{i,p-1}+f_{i+1,p}+f_{i-1,p})+\\ & +\tfrac{1}{90}(f_{i+1,p+1}+f_{i+1,p-1}+f_{i-1,p+1}+f_{i-1,p-1})-\\ & -\tfrac{1}{240}(f_{i,p+2}+f_{i,p-2}+f_{i+2,p}+f_{i-2,p})+\tfrac{119}{180}f_{ip}\end{aligned}$$

gleichfalls mit einem Fehler von Grössenordnung h^6 berechnet werden. Für $i = 1, n$ oder $p = 1, m$ enthält das dritte Glied auch solche Werte der Funktion $f(x, y)$, welche ausserhalb des Gebietes liegen. Diese „fiktiven" Funktionenwerte können mit Hilfe der Lagrangeschen Interpolationspolynome durch Extrapolation berechnet werden. Für $i = 1$ z.B.

$$(4)\quad f_{-1,p}=6f_{0p}-15f_{1p}+20f_{2p}-15f_{3p}+6f_{4p}-f_{5p}\,.$$

Die Differenzengleichung (2), als ein algebraisches Gleichungssystem, besitzt eine Koeffizientenmatrix, welche mit Hilfe der gleichmässigen Kontinuantenmatrix $\mathbf{A}_n=[a_{ij}^{(n)}]$

$$(5)\quad a_{ij}^{(n)}=\begin{cases} 2 & \text{falls} \quad i=j\,,\\ -1 & \text{falls} \quad |i-j|=1\,,\\ 0 & \text{falls} \quad |i-j|\geqq 2\,,\end{cases}$$

in der Form eines direkten Polynoms sich aufschreiben lässt

$$(6)\quad \mathbf{M}_{4\Diamond+\Box}=\mathbf{A}_m\,.\times\mathbf{E}_n+\mathbf{E}_m\,.\times\mathbf{A}_n-\tfrac{1}{6}\mathbf{A}_m\,.\times\mathbf{A}_n\,.$$

(Das direkte Produkt der Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ wird als $\mathbf{A}\,.\times\mathbf{B}=[\mathbf{A}b_{ij}]$ definiert.) Die Elemente der Kehrmatrix $(\mathbf{M}^{-1}_{4\Diamond+\Box})_{ijpq}$ können mit Hilfe der Sätze von E. Egerváry [2], [3] über die Spektralzerlegung der aus Kontinuantenmatrizen gebildeten Hypermatrizen in Form von doppelten Summen aufgeschrieben werden

$$(7)\quad u_{ijpq}=\frac{1}{(m+1)(n+1)}\cdot$$

$$\cdot\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin\frac{il\pi}{n+1}\sin\frac{jl\pi}{n+1}\sin\frac{pk\pi}{m+1}\sin\frac{qk\pi}{m+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2(m+1)}+\sin^2\frac{l\pi}{2(n+1)}-\frac{2}{3}\sin^2\frac{k\pi}{2(m+1)}\sin^2\frac{l\pi}{2(n+1)}}\,.$$

So erhalten wir die gesuchten Funktionenwerte in der Form

$$w_{ip} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} u_{ijpq} g_{jq} \,. \tag{8}$$

In drei Dimensionen erhält man ein entsprechendes Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = {} & \mathbf{A}_{m_1} \,.\times\, \mathbf{E}_{m_2} \,.\times\, \mathbf{E}_{m_3} + \mathbf{E}_{m1} \,.\times\, \mathbf{A}_{m_2} \,.\times\, \mathbf{E}_{m_3} + \mathbf{E}_{m_1} \,.\times\, \mathbf{E}_{m_2} \,.\times\, \mathbf{A}_{m_3} - \\ & - \tfrac{5}{30}(\mathbf{E}_{m_1} \,.\times\, \mathbf{A}_{m_2} \,.\times\, \mathbf{A}_{m_3} + \mathbf{A}_{m_1} \,.\times\, \mathbf{E}_{m_2} \,.\times\, \mathbf{A}_{m_3} + \mathbf{A}_{m_1} \,.\times\, \mathbf{A}_{m_2} \,.\times\, \mathbf{E}_{m3}) + \\ & + \tfrac{1}{30}\mathbf{A}_{m_1} \,.\times\, \mathbf{A}_{m_2} \,.\times\, \mathbf{A}_{m_3} \,. \end{aligned}$$

Die Elemente ihrer Kehrmatrix können ähnlicherweise, jedoch mit Hilfe von dreifachen Summen ausgedrückt werden.

Für beliebige Gebiete können die entsprechenden Ergebnisse von E. EGERVÁRY angewendet werden [3]. Sein Grundgedanke besteht darin, dass das gegebene Gebiet in ein quadratisches Gebiet eingefasst werden kann, und wenn diejenige Punkte des Gitternetzes, welche dem Rand des gegebenen Gebietes entsprechen, als festgehaltene Punkte betrachtet werden, führt das Problem zur Invertierung einer Minormatrix der zum quadratischen Gebiet gehörenden Koeffizientenmatrix. Die gesuchte Inverse dieser Minormatrix erhält man von der schon bekannten Inversen der Koeffizientenmatrix durch iterative Subtraktion.

Die Ergebnisse können auch auf die Lösung der biharmonischen Differentialgleichung und auf das Neumannsche Problem, d. h. für die zweite Randwertaufgabe angewendet werden.

In der letzten Zeit erschien eine Arbeit von R. E. LYNCH, J. R. RICE und D. H. THOMAS [6], in welcher die Autoren den Rechenaufwand bei verschiedenen Methoden der numerischen Integration von partieller Differentialgleichungen näher analysieren. Sie zeigen in ihrer Arbeit, dass die Egerványsche Methode, auch wenn man die Inverse der Koeffizientenmatrix für ein gegebenes Gebiet kennt, für numerische Rechnung nicht geeignet ist, da die Anzahl der Operationen allein bei der Multiplikation mit dem auf der rechten Seite stehenden Vektor von der Grössenordnung n^4 ist (falls $n = m$ ist), also mehr als bei der Lösung der ganzen Aufgabe durch geeignete Iteration, oder durch die von ihnen empfohlene Tensor Product Methode. Sie formen nämlich die zur Berechnung der gesuchten Funktionenwerte dienende Formel von Egerváry so um, dass sie für den praktischen Gebrauch geeigneter ist. Bezeichnen wir die Elemente der Eigenvektore von $\mathbf{A}_n$ durch $u_{il}^{(n)}$ und die Eigenwerte durch $\lambda_l^{(n)}$:

$$u_{il}^{(n)} = \sqrt{\left(\frac{2}{n+1}\right)} \sin \frac{il\pi}{n+1} \,,$$

$$\lambda_l^{(n)} = 4 \sin^2 \frac{l\pi}{2(n+1)} \,,$$

so kann die Lösung (8) — ähnlicherweise, wie bei Lynch, Rice und Thomas — in folgender Form aufgeschrieben werden

$$w_{ip} = \sum_{k=1}^{m} u_{pk}^{(m)} \sum_{l=1}^{n} u_{il}^{(n)} \frac{1}{\lambda_k^{(m)} + \lambda_l^{(n)} - \frac{1}{6}\lambda_k^{(m)}\lambda_l^{(n)}} \sum_{q=1}^{m} u_{qk}^{(m)} \sum_{j=1}^{n} u_{jl}^{(n)} g_{qj} .$$

Die Werte von g_{qj} werden nach (3) und (4) berechnet und die Grössenordnung des Fehlers ist h^6. Darin liegt der Vorteil der angeführten Methode. Die Anzahl der benötigten Operationen ist von der Grössenordnung n^3 — worauf Lynch, Rice und Thomas hingewiesen haben — wenn $n = m$ ist.

Auf dieselbe Weise kann die Lösung der ersten und zweiten Randwertaufgabe in mehreren Dimensionen, und auch die Lösung der polyharmonischen Differentialgleichung mit gewissen Randbedingungen gegeben werden.

Literatur

[1] *A. V. Cornock:* The numerical solution of Poisson's and the biharmonic equations by matrices; Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 50 (1954) 524—535.

[2] *E. Egerváry:* On hypermatrices whose blocks are commutable in pairs and their application in lattice-dynamics; Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) 15 (1954) 211—222.

[3] *E. Egerváry:* Über eine Methode zur numerischen Lösung der Poissonschen Differenzengleichung für beliebige Gebiete; Acta Mathematicae Academiae Scientiarum Hungaricae 11 (1960) 341—361.

[4] *L. W. Kantorowitsch, W. I. Krylow:* Näherungsmethoden der höheren Analysis; Berlin, 1956, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

[5] *G. N. Lance:* Numerical methods for high speed computers; London, 1960, Iliffe.

[6] *R. E. Lynch, J. R. Rice, D. H. Thomas:* Direct solution of partial difference equations by tensor product methods; Numerische Mathematik 6 (1964) 185—199.

[7] *Ш. Е. Микеладзе:* О численном решении дифференциальных уравнений Лапласа и Пуассона; Известия Акад. Наук СССР *2* (1938) 271—293.

[8] *P. Rózsa, I. Tóth:* Über die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen mit Anwendung der Theorie der Hypermatrizen; Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 32 (1964).

[9] *C. Stéphanos:* Sur une extension du calcul des substitutions linéaires; Journal de Mathématique Pures et Appliquées (5) 6 (1900) 73—126.

[10] *J. Williamson:* The latent roots of a matrix of special type; Bulletin of the American Mathematical Society 3 (1931) 585—590.

P. Rózsa, Magyar Tudományos Akadémia Központi Fizikai Kutató Intézet, Konkoly Thege ut., Budapest XII, Ungarn.

I. Tóth, Magyar Tudományos Akadémia Központi Fizikai Kutató Intézet, Konkoly Thege ut., Budapest XII, Ungarn.