Ján Čepel; Andrej Šiposs

Obálka n-parametrickej sústavy plôch v priestore

Aplikace matematiky, Vol. 12 (1967), No. 3, 217–218

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103091

OBÁLKA n-PARAMETRICKEJ SÚSTAVY PLÔCH V PRIESTORE

JÁN ČEPEL, ANDREJ ŠIPOSS

(Došlo dňa 3. novembra 1966.)

Úvod. Pre sústavu plôch, ktoré sú dané rovnicami $x = f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, $y = g(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, $z = h(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, kde $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sú na sebe nezávislé parametre, hľadáme rovnicu obalovej plochy, pričom obecne nevieme vyjadriť rovnicu sústavy o $n - 1$ parametroch pomocou konečného počtu elementárnych funkcii.

Veta. *Majme dané funkcie* $x = f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, $y = g(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, $z = h(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, *ktoré sú v n rozmernej oblasti* $t_{i1} \leqq t_1 \leqq t_{i2}$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$ *spojité a majú spojité parciálne derivácie podľa* t_i; *ak sústava plôch určená týmito rovnicami má obalovú plochu určenú rovnicami* $x = \varphi(t_k, t_m)$, $y = \psi(t_k, t_m)$, $z = \varkappa(t_k, t_m)$, *ktoré sú v oblasti* $t_{k1} \leqq t_k \leqq t_{k2}$, $t_{m1} \leqq t_m \leqq t_{m2}$ *spojité a majú spojité parciálne derivácie, potom rovnice obalovej plochy dostaneme vylúčením* $n - 2$ *parametrov z rovníc*

$$x = f(t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots, t_n)\,, \tag{1}$$

$$y = g(t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots, t_n)\,, \tag{2}$$

$$z = h(t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots, t_n)\,, \tag{3}$$

$$D_i = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial t_{i-1}}, & \dfrac{\partial f}{\partial t_i}, & \dfrac{\partial f}{\partial t_{i+1}} \\ \dfrac{\partial g}{\partial t_{i-1}}, & \dfrac{\partial g}{\partial t_i}, & \dfrac{\partial g}{\partial t_{i+1}} \\ \dfrac{\partial h}{\partial t_{i-1}}, & \dfrac{\partial h}{\partial t_i}, & \dfrac{\partial h}{\partial t_{i+1}} \end{vmatrix} = 0 \; pre \; i = 2, 3, \ldots, n - 1\,. \tag{4}$$

Dôkaz: Predpokladajme, že existuje obalová plocha. Táto sa dotýka plôch $x = f(t_{i-1}, t_i, t_{i+1})$, $y = g(t_{i-1}, t_i, t_{i+1})$, $z = h(t_{i-1}, t_i, t_{i+1})$ v nejakom bode, kde ostatné parametre majú konštantné hodnoty, a majú v tomto bode spoločnú dotykovú rovinu s obalovou plochou. Táto dotyková rovina je kolmá na normálove roviny čiar

$$
\begin{aligned}
x &= f(t_{i-1}), \quad y = g(t_{i-1}), \quad z = h(t_{i-1}), \ldots, t_i = \text{konšt.}, \; t_{i+1} = \text{konšt.}, \\
x &= f(t_i), \quad y = g(t_i), \quad z = h(t_i), \ldots, t_{i-1} = \text{konšt.}, \; t_{i+1} = \text{konšt.}, \\
x &= f(t_{i+1}), \quad y = g(t_{i+1}), \quad z = h(t_{i+1}), \ldots, t_{i-1} = \text{konšt.}, \; t_i = \text{konšt.},
\end{aligned}
$$

ktoré v bode (x_0, y_0, z_0) majú rovnice

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t_{i-1}}(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial t_{i-1}}(y - y_0) + \frac{\partial h}{\partial t_{i-1}}(z - z_0) &= 0, \\
\frac{\partial f}{\partial t_i}(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial t_i}(y - y_0) + \frac{\partial h}{\partial t_i}(z - z_0) &= 0, \\
\frac{\partial f}{\partial t_{i+1}}(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial t_{i+1}}(y - y_0) + \frac{\partial h}{\partial t_{i+1}}(z - z_0) &= 0
\end{aligned}
$$

a tvoria zväzok pre ktorý platí

$$
D_i = \begin{vmatrix}
\frac{\partial f}{\partial t_{i-1}}, & \frac{\partial f}{\partial t_i}, & \frac{\partial f}{\partial t_{i+1}} \\
\frac{\partial g}{\partial t_{i-1}}, & \frac{\partial g}{\partial t_i}, & \frac{\partial g}{\partial t_{i+1}} \\
\frac{\partial h}{\partial t_{i-1}}, & \frac{\partial h}{\partial t_i}, & \frac{\partial h}{\partial t_{i+1}}
\end{vmatrix} = 0 .
$$

Pretože všetky parametre sú rovnocenné, môžeme tento postup previesť pre $i = 2, 3, \ldots, n - 1$ čiže dostaneme $n - 2$ na sebe nezávislých determinantov, ktoré dostaneme z matice

$$
A = \begin{Vmatrix}
\frac{\partial f}{\partial t_1}, & \frac{\partial f}{\partial t_2}, \ldots, \ldots, & \frac{\partial f}{\partial t_i}, \ldots, & \frac{\partial f}{\partial t_n} \\
\frac{\partial g}{\partial t_1}, & \frac{\partial g}{\partial t_2}, \ldots, \ldots, & \frac{\partial g}{\partial t_i}, \ldots, & \frac{\partial g}{\partial t_n} \\
\frac{\partial h}{\partial t_1}, & \frac{\partial h}{\partial t_2}, \ldots, \ldots, & \frac{\partial h}{\partial t_i}, \ldots, & \frac{\partial h}{\partial t_n}
\end{Vmatrix}
$$

Záver. n-parametrickú sústavu plôch o parametroch $t_1, t_2, \ldots, t_n$ môžeme teda znázorniť ako n sústav jednoparametrických čiar, keď vždy $n - 1$ parametrov považujeme za konštanty. Obalová plocha, ktorá má v každom svojom bode normálu, ktorou prechádzajú normálové roviny všetkých kriviek idúcich týmto bodom.

Literatúra

J. Favard: Cours de géométrie différentielle locale; Paris 1957.

Adresy autorů: Doc. Ing. *Ján Čepel* C.Sc., Pasteurova 7, Košice. — Ing. *Andrej Šiposs*, Črmelská 57, Košice.